МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1984

УДК 531.8

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОХОДКИ МНОГОНОГОГО ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА

ГОЛУБЕВ Ю. Ф.

Для шагающих аппаратов с числом ног, не меньшим четырех, существует принципиальная возможность двигаться в режиме статической устойчивости, когда центр масс корпуса проектируется внутрь опорного многоугольника в любой момент времени. Такое свойство полезно, так как снижает нагрузку на систему управления и повышает надежность выполнения двигательной задачи.

Вместе с тем принцип обязательного обеспечения статической устойчивости, накладывая ограничение на структуру походки, снижает проходимость шагающего аппарата [1]. Движение в режиме статической устойчивости может оказаться нереализуемым, в то время как существуют предпосылки за счет использования запаса кинетической энергии успешно преодолеть труднопроходимое место [2].

Настоящая работа посвящена вопросам организации движения в предположении, что свойство статической устойчивости может не выполняться. Считается, что геометрическая структура движения задана, т. е. для каждой точки трассы указано положение корпуса и всех ног аппарата [1]. Цель управления состоит в выборе закона прохождения трассы, обеспечивающего заданную пространственную структуру движения. Предполагается, что построение движения осуществляется известными методами [2].

Получено уравнение, определяющее вынужденное ускорение в зависимости от запаса продольной статической устойчивости при поступательном прямолинейном движении корпуса. Выведены формулы, позволяющие оценить запас начальной скорости такого движения, достаточный для прохождения трассы при наличии вынужденного ускорения.

1. Движение шагающего аппарата зададим в виде функции от путевого параметра s, который в свою очередь зависит от времени: $s=s(t)$. Произвольно выбирая $s(t)$, можно получить движения, отличающиеся друг от друга режимом прохождения трассы, но обладающие одинаковым пространственным рисунком.

Нарушение статической устойчивости возникает, когда имеется лишь одна или две опорные точки, либо когда опорный многоугольник существует, но вертикальная проекция центра масс корпуса ему не принадлежит.

Обозначим P_1 точку опоры шагающего аппарата, принадлежащую звену ломаной границы опорного многоугольника, ближайшему по отношению к проекции центра масс. Если существует только одна точка опоры, то ее также будем обозначать P_1.

Пусть $\mathbf{K}$ — кинетический момент аппарата относительно точки P_1. Будем считать, что из внешних сил действуют только сила тяжести и реакции опоры. По теореме об изменении кинетического момента относи-

---

[1] *Голубев Ю. Ф., Новикова И. А.* Режимы движения шагающего аппарата с нарушением статической устойчивости.— Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1983, № 5. 30 с.

[2] *Охоцимский Д. Е., Платонов А. К., Кугушев Е. И., Ярошевский В. С.* Система построения движений шагающего аппарата. Модель Т-3.— Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1977, № 7. 62 с.

тельно точки P_1 найдем

$$d\mathbf{K}/dt=(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{p}+\sum_i(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{N}_i \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{p}$ — вектор силы тяжести, $\mathbf{N}_i$ — реакции поверхности в точках опоры, $\mathbf{r}_i$ — радиус-векторы точек опоры, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор центра масс аппарата. Вектор кинетического момента можно представить в виде $\mathbf{K}=\mathbf{H}\cdot s^{\cdot}$ и переписать уравнение (1.1) следующим образом:

$$\mathbf{H}s^{\cdot\cdot}=(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{p}+\sum_i(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{N}_i-\mathbf{H}_s s^{\cdot 2}, \quad \mathbf{H}_s=d\mathbf{H}/ds \tag{1.2}$$

Очевидно, что существование скалярного множителя $s^{\cdot\cdot}$, обеспечивающего равенство (1.2) при ненулевой правой части, возможно в том и только том случае, когда правая и левая части (1.2) коллинеарны. При фиксированных векторах $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}_s$ и значении параметра $s^{\cdot}$ изменять направление суммарного вектора правой части (1.2) можно лишь с помощью реакций $\mathbf{N}_i$. При движении по абсолютно твердой поверхности эти реакции ограничены условием принадлежности конусам трения

$$\mathbf{N}_i\cdot\mathbf{v}_i\geqslant 0, \qquad |\mathbf{N}_i-\mathbf{v}_i(\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{N}_i)|\leqslant k_i(\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{N}_i) \tag{1.3}$$

где $\mathbf{v}_i$ — внешние нормали к поверхности в точках опоры, k_i — коэффициенты трения в этих точках.

Неравенства (1.3) выделяют в пространстве R^3 область D допустимых значений правой части (1.2). Условие реализуемости заданного пространственного рисунка движения можно сформулировать как наличие ненулевого пересечения области D с прямой l_s, проходящей через начало координат параллельно вектору $\mathbf{H}$. В частности, если опора осуществляется лишь на одну ногу, то множество D содержит только одну точку, через которую и должна проходить прямая l_s. В этом случае возможность маневра скоростью движения при сохранении его заданного пространственного рисунка практически отсутствует.

Если опора осуществляется по крайней мере на две ноги, то множество D представляет собой конус, вершина которого расположена в точке с радиус-вектором $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{p}-\mathbf{H}_s s^{\cdot 2}$. Пусть выполнено условие $D_s=l_s\cap D\neq\varnothing$. Тогда решение задачи о выборе $s^{\cdot\cdot}$ будет однозначным, если множество D_s состоит лишь из одной точки. В противоположном случае решение неоднозначно. Естественно стремиться к осуществлению возможно более равномерного режима прохождения трассы и из всего множества допустимых значений $s^{\cdot\cdot}$ выбирать наименьшее по модулю.

Можно показать [3], что всегда существуют радиус-вектор $\mathbf{R}$ и сила $\mathbf{F}$, с помощью которых уравнение (1.2) приводится к эквивалентному уравнению

$$\mathbf{H}s^{\cdot\cdot}=(\mathbf{R}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{F}+\sum_i(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{N}_i \tag{1.4}$$

Пусть все точки опоры принадлежат одной плоскости П. Обозначим P_2 опорную точку с радиус-вектором $\mathbf{r}_2$, определяющую вместе с P_1 линейный участок опорного контура. Рассмотрим уравнение кинетического момента относительно прямой l с направляющим вектором $\mathbf{e}_l$, проходящей через точки P_1 и P_2. Оно получится путем проектирования уравнения (1.4) на направление $\mathbf{e}_l$:

$$H_l s^{\cdot\cdot}=\mathbf{F}\cdot[\mathbf{e}_l\times(\boldsymbol{\rho}-\mathbf{r}_1)]+\sum_i\mathbf{N}_i\cdot[\mathbf{e}_l\times(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_1)] \tag{1.5}$$

---

[3] См. *Голубев Ю. Ф., Новикова И. А.* Указ публ. с. 65.

$$\boldsymbol\rho=\mathbf{R}-\mathbf{R}_F, \quad \mathbf{R}_F\|\mathbf{F}, \quad \boldsymbol\rho-\mathbf{r}_1\in\Pi$$

$$H_l=\mathbf{H}\cdot\mathbf{e}_l, \quad \mathbf{e}_l=(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|$$

Так как прямая l определяет часть границы выпуклого опорного многоугольника, то все векторы вида $\mathbf{e}_l\times(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_1)$ имеют одинаковое направление и ортогональны опорной плоскости. Проекции векторов $\mathbf{N}_i$ на внешнюю нормаль к опорной плоскости должны быть положительны. Поэтому в выражении $\sum_i \mathbf{N}_i\cdot[\mathbf{e}_l\times(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_1)]$ все слагаемые имеют одинаковые знаки.

Примем, что проекция силы $\mathbf{F}$ на внешнюю нормаль к опорной плоскости отрицательна. Если вектор $\mathbf{e}_l\times(\boldsymbol\rho-\mathbf{r}_1)$ имеет положительную проекцию на направление векторов $\mathbf{e}_l\times(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_1)$, т. е. конец O_ρ вектора $\boldsymbol\rho$, и все точки опоры расположены по одну сторону от прямой l, то слагаемые

$$\mathbf{F}\cdot[\mathbf{e}_l\times(\boldsymbol\rho-\mathbf{r}_1)], \quad \sum_i \mathbf{N}_i\cdot[\mathbf{e}_l\times(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_1)] \tag{1.6}$$

имеют разные знаки. В таком случае за счет выбора реакций $\mathbf{N}_i$ можно скомпенсировать момент силы $\mathbf{F}$ относительно прямой l. Это имеет место в случае выполнения условия статической устойчивости при пренебрежимо малых скоростях движения. При достаточно больших скоростях выполнение условия статической устойчивости уже не всегда будет означать возможность обеспечения нулевого ускорения $s^{\cdot\cdot}$, и это условие следует заменить условием принадлежности описанной выше точки O_ρ опорному многоугольнику независимо от того, к какой точке опоры отнесен кинетический момент $\mathbf{K}$.

Пусть проекция вектора $\mathbf{e}_l\times(\boldsymbol\rho-\mathbf{r}_1)$ на направление векторов $\mathbf{e}_l\times(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_1)$ отрицательна, т. е. точка O_ρ и опорный многоугольник расположены по разные стороны относительно прямой l. Тогда слагаемые (1.6) имеют одинаковые знаки. Следовательно, ускорение $s^{\cdot\cdot}$ не может быть сделано равным нулю. В частности, при нарушении статической устойчивости, когда $\mathbf{F}=\mathbf{p}$, поступательное движение корпуса может быть обеспечено лишь за счет изменения темпа движения.

2. Предположим, что ноги не имеют массы, а корпус абсолютно жесткий. Тогда

$$\mathbf{H}=I\boldsymbol\omega_s+m(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{V}_s \tag{2.1}$$

Здесь I — центральный тензор инерции корпуса, $\boldsymbol\omega_s$ — характеристика угловой скорости $\boldsymbol\omega$ корпуса $\boldsymbol\omega=\boldsymbol\omega_s s^{\cdot}$, $\mathbf{V}_s$ — аналогичная характеристика скорости $\mathbf{V}$ центра масс $\mathbf{V}=\mathbf{V}_s s^{\cdot}$.

При поступательном движении корпуса $\boldsymbol\omega_s=0$. Пусть требуется осуществить прямолинейное движение центра масс вдоль горизонтальной плоскости. Параметр s выберем так, чтобы вектор $\mathbf{V}_s$ был постоянным. Для этого достаточно, например, принять s равным длине трассы, пройденной центром масс аппарата от исходной точки. Тогда $\mathbf{H}_s=0$, $\mathbf{F}=\mathbf{p}$, $\mathbf{H}=m(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{V}_s$.

Из-за поступательного характера движения корпуса силы реакции имеют равнодействующую, проходящую через центр масс. Поскольку было принято, что все точки опоры принадлежат одной плоскости, то векторы $\mathbf{e}_l\times(\boldsymbol\rho-\mathbf{r}_1)$, $\mathbf{e}_l\times(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_1)$ перпендикулярны этой плоскости и существует вектор $\mathbf{P}^*$, параллельный $\mathbf{p}$ и удовлетворяющий равенству

$$\mathbf{p}[\mathbf{e}_l\times(\boldsymbol\rho-\mathbf{r}_1)]+\sum_i \mathbf{N}_i[\mathbf{e}_l\times(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_1)]=\mathbf{P}^*[\mathbf{e}_l\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)]$$

Если имеет место статическая устойчивость, то можно добиться, чтобы $\mathbf{P}^*=0$. При нарушении свойства статической устойчивости имеем

$\mathbf{P}^* \geqslant \mathbf{p}$. Из уравнения (1.5) следует выражение для допустимого ускорения $s^{\cdot\cdot}$:

$$ms^{\cdot\cdot} = \mathbf{P}^*[\mathbf{e}_l \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)]/\{\mathbf{V}_s[\mathbf{e}_l \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)]\}$$

Анализ геометрического смысла смешанных произведений, стоящих в числителе и знаменателе правой части полученного равенства, приводит к соотношению

$$ms^{\cdot\cdot} = P^*\xi/(hV_s) \tag{2.2}$$

в котором h — высота центра масс корпуса над опорной плоскостью, ξ — перемещение вдоль трассы от границы опорного многоугольника до проекции центра масс на горизонтальную опорную плоскость. Величина ξ положительна, если проекция центра масс находится впереди опорного многоугольника, и отрицательна, если проекция центра масс находится сзади опорного многоугольника. Заметим, что ξ и продольный запас статической устойчивости [4] совпадают по абсолютной величине и имеют разные знаки лишь тогда, когда проекция центра масс на опорную плоскость оказывается впереди опорного многоугольника.

Таким образом, при нарушении свойства статической устойчивости поступательное прямолинейное движение корпуса можно сохранить за счет увеличения (при отрицательном переднем запасе устойчивости) или уменьшения (при отрицательном заднем запасе устойчивости) скорости пропорционально потере запаса устойчивости.

Очевидно, что минимальное вынужденное искажение скорости при нарушении свойства статической устойчивости будет достигнуто при $\mathbf{P}^* = \mathbf{p}$, что означает равенство нулю реакций во всех точках опоры, не принадлежащих границе l опорного многоугольника.

3. Предположим, что точки подвеса ног шагающего аппарата расположены на двух прямых, симметричных относительно вертикальной плоскости, содержащей центр масс корпуса и параллельной вектору скорости центра масс. Ноги, точки подвеса которых расположены справа по ходу движения, перенумеруем последовательными нечетными номерами, начиная с правой задней ноги, которую будем считать первой. Левую группу ног перенумеруем последовательными четными номерами, начиная с левой задней, которую будем считать второй. Исследуем случай, когда следовые точки правой и левой групп ног принадлежат соответственно двум прямолинейным следовым колеям, параллельным трассе и симметричным относительно нее. На опорной плоскости выберем неподвижную прямоугольную систему координат $O\xi\eta$ с началом в точке O. Ось абсцисс $O\xi$ направим вдоль трассы в сторону движения.

Примем, что в момент подъема задней правой (первой) ноги абсцисса ее следовой точки равна x_1, а абсцисса центра масс равна x_0. Абсциссу ξ_c положения центра масс относительно точки x_0 будем характеризовать путевым параметром трассы $\xi_c = x_0 + s$.

Пусть следовое расписание, т. е. совокупность моментов поднятия и постановки соответствующих ног, задано в зависимости от параметра s. Абсциссы передней правой, передней левой, задней правой и задней левой вершин опорного многоугольника обозначим соответственно ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4. Задняя левая (вторая) нога имеет относительно первой запаздывание начала работы, составляющее долю φ от расстояния S, проходимого центром масс в течение одного цикла походки. Очевидно, что S есть длина следового шага. Абсциссу следовой точки второй ноги в момент, когда центр масс корпуса отойдет от начальной точки на расстояние φS, обозначим x_2. Формулы для изменения координат ξ_i запишем в виде

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 + f_1(s), \quad \xi_2 = x_2 + f_2(s) \\ \xi_3 &= x_1 + f_3(s), \quad \xi_4 = x_2 + f_4(s) \end{aligned} \tag{3.1}$$

[4] См. *Охоцимский Д. Е., Платонов А. К., Кугушев Е. И., Ярошевский В. С.* Указ. публ. с. 65.

Функции $f_i(s)$ зависят от структуры походки, и для периодичной по параметру s походки обладают свойством [5]

$$f_i(s+S)=f_i(s)+S \quad (i=1,2,3,4) \tag{3.2}$$

Потребуем, чтобы при выполнении свойства статической устойчивости корпус аппарата двигался равномерно, а при нарушении свойства статической устойчивости корпусу сообщалось минимальное по абсолютной величине ускорение, достаточное для сохранения выбранного рисунка движения. Такое ускорение назовем вынужденным.

Функцию $\xi(s)$, характеризующую вынужденное ускорение центра масс в (2.2), выразим с помощью формулы

$$\xi(s)=x-s-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}f_i+\frac{1}{2}\left(\left|x+s-\frac{1}{2}(f_1+f_2)\right|-\left|x+s-\frac{1}{2}(f_3+f_4)\right|\right) \tag{3.3}$$

$$x=x_0+{}^1/_2(x_1+x_2)$$

На основании соотношений (3.2) заключаем, что функция $\xi(s)$ периодична с периодом S: $\xi(s+S)=\xi(s)$. Имеет место интеграл кинетической энергии

$$T-T_0=\frac{g}{h}\int_0^s\xi(s)\,ds, \qquad T=\frac{V^2}{2} \tag{3.4}$$

(T_0 — значение кинетической энергии в начальный момент движения).

Интеграл (3.4) дает возможность оценить вынужденное изменение скорости из-за потери статической устойчивости. В силу периодичности функции $\xi(s)$ достаточно проанализировать изменение кинетической энергии в пределах одного периода.

4. Функции f_i, соответствующие волновым походкам, когда волны переносов распространяются от задних к передним ногам с одинаковым запаздыванием для всех ног одной стороны [3], имеют вид [6]:

$$\begin{gathered} f_1=(M-1)d+S-f(\alpha S-s) \\ f_2=(M-1)d+S-f([\alpha+\varphi]S-s) \\ f_3=f(s), \quad f_4=f(s-\varphi S) \end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь функция $f(s)$ описывает положение задней опорной точки правой стороны, M — половина числа ног, α — параметр волны, определенный формулой $\alpha=(M-1)\tau+1-\beta$, τ — относительное запаздывание работы соседних ног, точки подвеса которых расположены на одной стороне, β — характеристика режима (задает длительность состояния опоры одной ноги), d — расстояние между точками опоры соседних ног одной стороны при совершении ими одного и того же шага.

Рассмотрим функции

$$f_f(s)={}^1/_2(f_1+f_2)-s, \qquad f_b={}^1/_2(f_3+f_4)-s \tag{4.2}$$

С помощью формул (4.1) можно показать, что имеет место тождество

$$f_f(s)=(M-1)d+S(1-\alpha-\varphi)-f_b([\alpha+\varphi]S-s) \tag{4.3}$$

Поэтому при $x=x^*={}^1/_2[(M-1)d+(1-\alpha-\varphi)S]$ можно установить взаимно однозначное соответствие [7]: $s\leftrightarrow s_1$, s_1, $s\in[0,S]$, $s\neq s_1$, при котором

---

[5], [6] *Ярошевский В. С.* Исследование динамики и устойчивости шагающего аппарата: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук, 1979.

[7] См. указ. публ. с. 65 *Голубев Ю. Ф., Новиков И. А.*

$x^*-f_f(s)=-x^*+f_b(s_1)$. Существование такого соответствия означает, что приращение кинетической энергии за один следовой шаг равно нулю.

Изучим вынужденное изменение скорости в пределах следового шага S при $x=x^*$. Функция $\xi(s)$ (см. (3.3)) записывается в виде

$$\xi(s)={}^1/_2[f_b([\alpha+\varphi]S-s)-f_b(s)+|x^*-f_b([\alpha+\varphi]S-s)|-|x^*-f_b(s)|]$$

Обозначим

$$\Phi(s)=\int\limits_0^s(f_b(t)+|x^*-f_b(t)|)\,dt \tag{4.4}$$

Тогда интеграл в правой части формулы (3.4) дается выражением

$$J(s)=\int\limits_0^s\xi(s)\,ds={}^1/_2[\Phi(s^*)-\Phi(s^*-s)-\Phi(s)] \tag{4.5}$$

$$s^*=S(\alpha+\varphi)\bmod 1$$

Отметим следующие свойства функции $J(s)$: $J(s)=J(s+S)$; $J(s^*)=$ $=J(S)=0$;

график функции $J(s)$ симметричен относительно прямых, параллельных оси ординат и имеющих абсциссы $s={}^1/_2s^*$, $s={}^1/_2(s^*+S)$;

поведение функции $J(s)$ меняется в зависимости от параметра φ, задающего тип походки, в соответствии с формулами (4.1). Связь между функциями $J(\varphi, s)$ и $J(1-\varphi, s)$ дается формулой $J(1-\varphi, s)=J(\varphi, s+\varphi S)-$ $-J(\varphi, \varphi S)$ или эквивалентной ей $J(1-\varphi, s)=J(\varphi, s+\varphi S)-J(\varphi, \alpha S)$.

для симметричной походки ($\varphi={}^1/_2$) период функции $J(s)$ составляет ${}^1/_2S$. Вместо параметра s^* можно тогда использовать

$$s^{**}=S\cdot(\alpha)\bmod 1 \tag{4.6}$$

В частности, будем иметь $J(s^{**})=0$, и график функции $J(s)$ будет симметричен относительно прямых, параллельных оси ординат и проходящих соответственно через точки $s={}^1/_2s^{**}$, $s={}^1/_2s^{**}+{}^1/_4S$.

При изучении походок, не обладающих свойством статической устойчивости, возникает вопрос о минимальном начальном запасе T_0 кинетической энергии, который должен иметь корпус аппарата, чтобы ту или иную походку можно было реализовать, двигаясь неограниченно в выбранном направлении. Из формулы (3.4) следует условие реализуемости походки $T_0\geqslant-(g/h)\min\limits_s J(s)$.

5. Конкретное расположение экстремумов функции $J(s)$ и их значения зависят от выбранной совокупности параметров τ, β, φ волновой походки. Проведенный выше анализ справедлив, когда с каждой стороны шагающего аппарата в состоянии опоры находится хотя бы одна нога. Это условие, например, для четырехногого аппарата можно записать в виде

$$1>\beta\geqslant\max(\tau, 1-\tau)\quad(0<\tau<1) \tag{5.1}$$

Известно [8], что в этой области максимальным запасом статической устойчивости обладают симметричные волновые походки. Стремясь сделать движение корпуса по возможности более комфортабельным, примем $\varphi=$ $={}^1/_2$ [9] и исследуем свойства минимумов функции $J(s)$ при выполнении условий (5.1).

---

[8] См. указ. публ. с. 69 *Ярошевский В. С.*

[9] *Кореновский В. В.* Области динамически устойчивых симметричных походок шагающих машин.– В кн.: Матер. 2-го Всес. совещ. по робототехническим системам в отраслях народного хозяйства. Минск. 1981, с. 111.

Функция $f(s)$, характеризующая изменение задней опорной точки правой стороны аппарата, принимает вид

$f(s)=d$ при $0\leqslant s<(1-\beta)S$, $f(s)=S$ при $(1-\beta)S\leqslant s<S$ (5.2)

Функция $f_b(s)$ дается выражениями $f_b(s)=-s+{}^1/_2d$ при $0\leqslant s<(1-\beta)S$, $f_b(s)=-s+{}^1/_2S$ при $(1-\beta)S\leqslant s<{}^1/_2S$.

Пусть $d\geqslant S$. Это значит, что никакая нога не может перешагнуть следовую точку соседней передней ноги, относящуюся к очередному шагу. Тогда функция $f_b(s)$ монотонно убывает при увеличении параметра s и, как показывает формула (4.4), производная $\Phi'=d\Phi/ds$ является невозрастающей функцией параметра s. Кроме того, $x^*={}^1/_2[(M-1)(d-S\tau)+S(\beta-{}^1/_2)]>0$ при выполнении условий (5.1). Так как $\Phi'\geqslant x^*$, то функция $\Phi(s)$ является неубывающей функцией параметра s. Отсюда следует, что абсолютный минимум функции $J(s)$, соответствующий симметричной волновой походке с параметрами, удовлетворяющими ограничению (5.1), дается выражением

$$\min_s (J(s))=\min[J({}^1/_2s^{**}),\ J({}^1/_2s^{**}+{}^1/_4S)]$$

$$J({}^1/_2s^{**})={}^1/_2[\Phi(s^{**})-2\Phi({}^1/_2s^{**})]$$

$$J({}^1/_2s^{**}+{}^1/_4S)={}^1/_2[\Phi(s^{**})-2\Phi({}^1/_2s^{**}+{}^1/_4S)+\Phi({}^1/_2S)]$$

Рассмотрим более подробно случай движения четырехногого аппарата симметричной волновой походкой. При $M=2$ имеем $\alpha=\tau+1-\beta$. Ограничение (5.1) показывает, что для значений параметров τ, β, для которых симметричные походки такого аппарата не являются статически устойчивыми [10], будет выполнено неравенство ${}^1/_2<\alpha<1$. Оно означает, что формулы (4.3), (4.6) эквивалентны следующим: $s^{**}=S(\alpha-{}^1/_2)$, $x^*={}^1/_2(d-s^{**})$.

Для вычисления функции $J(s)$ необходимо найти корень уравнения $x^*-f_b(s)=0$. Можно показать, что этот корень дается выражениями

$$\begin{aligned} &s_r\triangleq{}^1/_2s^{**} && \text{при}\quad \beta<{}^3/_2-\tau \\ &s_r=(1-\beta)S && \text{при}\quad {}^3/_2-\tau\leqslant\beta<d/S+{}^1/_2-\tau \\ &s_r={}^1/_2s^{**}-{}^1/_2(d-S) && \text{при}\quad d/S+{}^1/_2-\tau\leqslant\beta<1 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Отсюда следует справедливость неравенства $s_r\leqslant{}^1/_2s^{**}$, в соответствии с которым $dJ/ds=x^*-f_b(s)$ при $0\leqslant s<s_r$, $dJ/ds=0$ при $s_r\leqslant s<s^{**}-s_r$, $dJ/ds=f_b(s^{**}-s)-x^*$ при $s^{**}-s_r\leqslant s<s^{**}$, $dJ/ds=0$ при $s^{**}\leqslant s<{}^1/_2S$.

Следовательно

$$\min_s J(s)=J(s_r)=\int_0^{s_r}[x^*-f_b(s)]ds$$

Произведя интегрирование и используя неравенство (4.10), найдем

$$\begin{aligned} &V_0\geqslant{}^1/_2S(\tau-\beta+{}^1/_2)\sqrt{g/h} && \text{при}\quad \beta<{}^3/_2-\tau \\ &V_0\geqslant S\sqrt{(1-\beta)(\tau-{}^1/_2)g/h} && \text{при}\quad {}^3/_2-\tau\leqslant\beta<d/S+{}^1/_2-\tau \\ &V_0\geqslant\sqrt{\{{}^1/_4[d-S(\tau-\beta+{}^3/_2)]^2+S(d-S)(1-\beta)\}g/h} && \text{при}\quad d/S+{}^1/_2-\tau\leqslant\beta<1 \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$V_0\geqslant{}^1/_2S(\tau-\beta+{}^1/_2)\sqrt{g/h}$$

[10] См. указ. публ. с. 69 *Ярошевский В. С.*

Это ограничение и представляет собой критерий реализуемости волновой походки четырехного аппарата в области изменения параметров, описываемой неравенствами (5.1). Если аппарат выполняет движение «след в след» ($d=S$), то формула (5.4) упрощается

Вынужденный запас начальной скорости оказывается постоянным при изменении параметров τ и β вдоль прямых $\tau-\beta=\text{const}<0$ и растет, если $\tau-\beta\to 0$.

Изучение запаса начальной скорости, требуемого для реализации статически неустойчивых волновых походок аппаратов с числом ног, большим четырех, может быть проведено аналогично изложенному выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кугушев Е. И., Ярошевский В. С.* Проблемы выбора походки интегрального локомоционного робота.— В кн.: Тр. 4-й международной объединенной конференции по искусственному интеллекту. М.: ВИНИТИ, 1975, т. 9, с. 86—93.
2. *Гамбарян П. П.* Бег млекопитающих. Приспособительные особенности органов движения. Л.: Наука, 1972. 334 с.
3. *Siddal J. N.* The wave mode of walking locomotion.— J. Terramechanics, 1964, v. 1, No. 4, p. 54—73.

Москва

Поступила в редакцию
8.VI.1983