

УДК 531.8

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ПОХОДКИ ДВУНОГОГО ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА

БОЛОТИН Ю. В.

Задача снижения энергозатрат возникает при изучении вопроса о возможности создания быстроходных шагающих роботов [1]. Имеющиеся оценки энергозатрат ходьбы со скоростями, сравнимыми со скоростью колесного транспорта, приводят к весьма высоким требованиям к средней мощности управляющих двигателей [2, 3]. Поэтому целесообразен поиск минимальных теоретически достижимых оценок энергозатрат как с точки зрения конструкции, так и закона управления шагающими аппаратами. Функционал энергозатрат не является гладким по скорости, что создает дополнительные трудности при аналитических и численных методах исследования. До настоящего времени, по-видимому, точное решение задачи оптимизации не было найдено даже в простейших задачах ходьбы. Из-за недостаточной гладкости задачи методы параметрической оптимизации очень чувствительны к выбору класса варьируемых параметров и не всегда обеспечивают близость решения к оптимальному [2].

Необходимость снижения энергозатрат приводит к отказу от требования статической устойчивости и переходу к изучению одноопорных и безопорных фаз движения [1, 2]. В отсутствие фаз опоры на две и более конечности число конечностей аппарата мало влияет на свойства походки. Поэтому характер роста энергозатрат при увеличении скорости движения для двуногого, четырехногого и шестиногого аппаратов аналогичен.

В публикуемой работе точное решение задачи минимизации энергозатрат построено в случае идеализированной модели двуногого шагающего аппарата с малоинерционными конечностями и поступательно движущимся корпусом. Несмотря на условность постановки, решение задачи позволяет сделать некоторые содержательные выводы.

1. Рассматривается движение одномассовой модели двуногого шагающего аппарата с точечными стопами по ровной горизонтальной поверхности, при котором нет проскальзывания и участков двуопорной фазы, а конечности ставятся на опорную поверхность безударно. Положение центра масс аппарата в пространстве определяется его радиус-вектором $\mathbf{r}$, начало которого связано с текущей точкой опоры. При рассмотрении безопорной фазы для определенности считаем точкой опоры ту точку, в которой стопа предыдущей опорной конечности находилась перед отрывом.

Движение центра масс аппарата определяется взаимодействием двух сил: веса аппарата $\mathbf{P}$, приложенного в центре масс, и опорной реакции $\mathbf{R}$, приложенной в текущей точке опоры

$$M\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{P} + \mathbf{R} \quad (1.1)$$

Реакция опоры в (1.1) удовлетворяет условиям

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \leq 0, \quad \mathbf{R} \times \mathbf{r} = 0 \quad (1.2)$$

Первое соотношение (1.2) утверждает, что опорная поверхность дает одностороннюю связь. Второе означает возможность пренебречь динамической относительного движения: в противном случае скорость изменения центрального момента количества движения аппарата отлична от нуля. При изучении движения центра масс реакцию опоры можно считать управляющим параметром. Мощность управляющих двигателей прибли-

женно определяется мощностью $N = \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}$ силы реакции, а энергозатраты — величиной [2]:

$$W = \int_{t_0}^{t_k} |N(t)| dt \quad (1.3)$$

Поставим задачу минимизации энергозатрат (1.3), наложив на движение аппарата следующие дополнительные условия: движение прямолинейно в среднем и происходит с заданной средней скоростью V и длиной шага $2s$; фазы опоры на левую и правую конечности динамически симметричны; максимальная величина $r = |\mathbf{r}|$ в опорной фазе ограничена константой $r_{\max} > 0$.

Заметим, что в реальной задаче оптимизации ходьбы фиксировать длину шага и максимальную величину r нет необходимости: первая может быть вычислена как оптимальная функция скорости из динамики относительного движения, а вторая ограничена автоматически за счет ограниченности длин конечностей. В рассматриваемой же здесь модельной задаче варьирование s и снятие ограничения $r \leq r_{\max}$ дает $s \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$, что физически невозможно.

С учетом симметрии левоопорной и правоопорной фаз достаточно рассматривать ходьбу в течение одного шага. Можно считать, что движение происходит в направлении оси e_x декартовой системы координат с началом в точке опоры; при этом ось e_z вертикальна.

Задача минимизации энергозатрат имеет помимо симметрии левоопорной и правоопорной фаз группу симметрий, порожденную отражениями $y \rightarrow -y$, $x \rightarrow -x$ и обращением времени. Эта группа переводит решения оптимальной задачи в решения. Возможен частный тип оптимальных траекторий, инвариантных к преобразованиям группы, которые будем называть симметричными. Если симметричная траектория оптимальна при фиксированных значениях параметров, то симметричная траектория оптимальна и при близких к ним значениях. Отмеченные свойства делают целесообразным поиск походов, оптимальных в классе симметричных траекторий. Симметричные траектории достаточно изучать на половине шага.

После перехода к безразмерным переменным $t_* = t(g/r_{\max})^{1/2}$, $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}/r_{\max}$, $\mathbf{R}_* = \mathbf{R}/P$, $W_* = W/2sP$ задача имеет два безразмерных параметра $s_* = s/r_{\max}$, $V_* = V \cdot (gr_{\max})^{-1/2}$ и формулируется следующим образом (в дальнейшем знак * опущен):

Задача оптимизации. При заданных s , V найти минимум функционала

$$W = \frac{1}{s} \int_0^{s/V} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}| dt \quad (1.4)$$

в классе траекторий, удовлетворяющих динамическим ограничениям

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}^* = \mathbf{u} \mathbf{r} - \mathbf{e}_z, \quad 0 \leq ru \leq u \quad (1.5)$$

и краевым условиям периодичности

$$x(0) = 0, \quad x(s/V) = s, \quad w(0) = w(s/V) = 0 \quad (1.6)$$

Здесь x , z , v , w — компоненты векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ по осям x , z , управляющий параметр u связан с реакцией опоры $\mathbf{R}$ заменой $\mathbf{R} = \mathbf{r}u$. С учетом условий (1.2) замена невырождена, если $r > 0$. Ниже показано, что случай $r = 0$ можно исключить из рассмотрения.

2. Найдем необходимые условия экстремума в задаче (1.4) — (1.6). Это — задача с негладким выпуклым функционалом и выпуклым по скорости фазовым ограничением. В любой точке, где $r > 0$, множество вари-

ций фазовой скорости выпукло. Отсюда следует, что здесь не может возникать скользящих режимов.

Пусть траектория определена на отрезке $0=t_0 \leq t \leq t_k=s/V$, $\mathbf{q}(t) = (\mathbf{r}, \mathbf{v})^T$ — фазовый вектор, а $(\psi_0, \psi(t))$ — нетривиальный расширенный сопряженный ему ковектор. Гамильтониан задачи определяется формулой

$$H = \psi \cdot \mathbf{f}(\mathbf{q}, u) - \psi_0 |\mathbf{u} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}| \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{f}(\mathbf{q}, u)$ — вектор правых частей уравнения (1.5). Разделим отрезок $t_0 \leq t \leq t_k$ на конечное число кусков $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, на которых величина $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$ сохраняет знак. На таком куске задача эквивалентна задаче минимизации функционала

$$W_i^\pm = \pm \frac{1}{s} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{u} \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} dt \rightarrow \min \quad (2.2)$$

в классе траекторий, удовлетворяющих уравнению (1.5) и дополнительному фазовому ограничению $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \geq 0$. Индексы плюс и минус в задаче (2.2) соответствуют случаям $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \geq 0$. Если невозможны разночтения, индексы опускаются.

Задача (2.2) стандартна. Принцип максимума для нее формулируется следующим образом [4]. Существует нетривиальный ковектор $(\psi_0, \psi^\pm(t))$, $\psi_0 \geq 0$, удовлетворяющий уравнению

$$\dot{\psi} = -H_{\mathbf{q}} - \mu \cdot \partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) / \partial \mathbf{q} \quad (2.3)$$

такой, что управление $u(t)$ обеспечивает максимум $H = \text{const}$ гамильтониана (2.1) среди всех допустимых управлений. Здесь μ — неотрицательная при $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \geq 0$ (соответственно неположительная при $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \leq 0$) мера, сосредоточенная на множестве тех точек t , где $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$. На левой и правой границах отрезка $t_0 \leq t \leq t_k$ и в точках склейки t_i участков $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \geq 0$ вектор ψ удовлетворяет условиям трансверсальности.

Найдем условия трансверсальности с учетом конкретных условий на концах (1.6). На левом конце траектории фазовые переменные удовлетворяют ограничениям $x=0$, $w=0$, $z \leq 1$. Трансверсальность означает, что ковектор ψ определяет опорную гиперплоскость к множеству допустимых левых концов, т. е. удовлетворяет правилу множителей Лагранжа [5]

$$\psi \cdot \delta \mathbf{q} + \lambda \partial z / \partial \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{q} = 0 \quad (z \leq 1, \lambda \leq 0)$$

Здесь λ — множитель при ограничении $z \leq 1$; вариации $\delta \mathbf{q}$ согласованы с ограничениями $x=0$, $w=0$. Приравнявая нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим условия на левом конце

$$\psi_3 = 0, \quad \psi_2 \geq 0, \quad \psi_2 = 0 \Leftrightarrow z < 1 \quad (2.4)$$

Рассмотрим условия на правом конце. Если движение при $t=t_k$ происходит в фазе опоры, то в этот момент должны быть выполнены ограничения $x=s$, $w=0$, $r \leq 1$. Если же концу траектории предшествует фаза полета, то ограничение $r \leq 1$ задается в начале этой фазы, а ограничение $x=s$, $w=0$ — в ее конце. Объединяя оба случая, введем краевые условия в начале последней фазы полета $x+vw=s$, $t+w=s/V$ ($w \geq 0$, $r \leq 1$), модифицируя ограничения типа равенства. Здесь t — длительность движения до фазы полета. Вводя множители Лагранжа λ, v при ограничениях $r \leq 1$, $w \geq 0$ соответственно и переменную ψ_5 , сопряженную времени, получим условия трансверсальности в виде

$$\psi \cdot \delta \mathbf{q} + \psi_5 \delta t + \lambda r \partial r / \partial \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{q} - v \partial w / \partial \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{q} = 0$$

$$(r \leq 1, \lambda \leq 0, w \geq 0, v \leq 0)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях, найдем условия на правом конце

$$\begin{aligned}\psi_2 &\geq 0, \quad -w\psi_1 + (x/z)w\psi_2 + \psi_3 = 0 \\ -\psi_3 - v\psi_1 + (x/z)v\psi_2 + \psi_4 &\leq 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

Равенства в первом и третьем соотношениях достигаются тогда и только тогда, когда соответственно $r < 1$, $w > 0$.

Рассмотрим условия в точках склейки участков $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \geq 0$. Допустимая вариация точки склейки совместима с ограничением $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$; скачок $\psi^+ - \psi^-$ ортогонален вариации. Отсюда

$$\begin{aligned}(\psi_1^+ - \psi_1^-)z &= (\psi_4^+ - \psi_4^-)v \\ (\psi_2^+ - \psi_2^-)z &= (\psi_4^+ - \psi_4^-)w \\ (\psi_3^+ - \psi_3^-)z &= (\psi_4^+ - \psi_4^-)x\end{aligned}\quad (2.6)$$

3. Опишем различные по своим экстремальным свойствам участки траекторий задачи (2.2). Они различаются, во-первых, различными типами максимума гамильтониана H и, во-вторых, условием выхода на ограничение $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$. Возможны следующие четыре типа участков, которые будем обозначать S , $P^\pm$, $I^\pm$, $X^\pm$.

Участок траектории имеет тип S , если на нем $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0$. Это значит, что центр тяжести аппарата движется по окружности; реакция u отлична от нуля и определяется равенством

$$u = (z - |\mathbf{v}|^2)/r^2 \quad (3.1)$$

Поскольку управление (3.1) обеспечивает максимум гамильтониана, а H — линейная функция u , то $H_u = 0$. Мера $\mu^\pm$, входящая в уравнение (2.3), абсолютно непрерывна во внутренних точках участка S и на его левом конце. На правом конце $\mu^\pm$ сингулярна тогда и только тогда, когда происходит пассивный отрыв от опорной поверхности

$$z = |\mathbf{v}|^2, \quad d\mu^+ > 0 \quad (3.2)$$

Участок траектории имеет тип P , если $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \neq 0$, а гамильтониан достигает на нем строгого невырожденного максимума при $u = 0$. Это кусок баллистической траектории. Функция H_u на нем является полиномом третьей степени по времени, причем выполнено неравенство $H_u < 0$.

Участок траектории имеет тип I , если гамильтониан на нем достигает строгого невырожденного максимума, когда u принимает максимально возможное значение $u = u_{\max}$. Это толчок опорной конечностью максимально возможной интенсивности; во время толчка $H_u \geq 0$. На практике величина $u_{\max}$ определяется пиковой мощностью управляющих двигателей. Будем считать, что $u_{\max}$ — достаточно большая величина, т. е. рассматривать асимптотику решений оптимальной задачи при $u_{\max} \rightarrow \infty$. Поскольку энергозатраты на оптимальной траектории ограничены, длительность участка I мала при больших $u_{\max}$, так что функция uH_u ограничена на I . В пределе при $u_{\max} \rightarrow \infty$ имеем $H_u = 0$. Если, кроме того, I находится внутри одного из промежутков $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \geq 0$, то $H_u = 0$ на I .

Участок траектории имеет тип X и называется особым, если на нем $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \neq 0$, но максимум гамильтониана является вырожденным: $H_u = 0$.

Помимо перечисленных S , $P^\pm$, $I^\pm$, $X^\pm$ введем символы L , R , означающие соответственно левый и правый концы траектории, и будем нумеровать участки оптимальных траекторий слева направо. Тогда каждой оптимальной траектории задачи (1.4)–(1.6) отвечает последовательность $L \dots SP^+I^+ \dots R$, называемая типом походки.

4. Пусть $E = z + |\mathbf{v}|^2/2$ — полная механическая энергия аппарата. Сделаем замену переменных

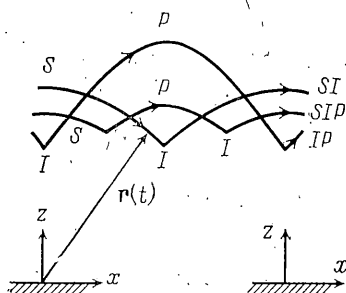
$$\mathbf{p}^\pm = \psi \mp \psi_0 E_{\mathbf{q}} \quad (4.1)$$

Гамильтониан задачи преобразуется к виду

$$H = p_1 v + p_2 w + p_3 u x + p_4 (u z - 1) \quad (4.2)$$

гамильтониана задачи оптимального быстрогодействия; уравнения (2.3) сохраняют гамильтонову форму

$$\dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{q}} - \mu \cdot \partial (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) / \partial \mathbf{q}$$



Фиг. 1

Заметим, что, хотя гамильтониан (4.2) совпадает с гамильтонианом задачи быстрогодействия, это не значит, что траектории экстремальны по быстродействию. Во-первых, условия трансверсальности не инвариантны к преобразованию (4.1), так что траектория может быть экстремальна по быстродействию только в задаче с закрепленными концами. Во-вторых, ковектор задачи быстрогодействия может оказаться нулевым.

Утверждение 1. Пусть на участке $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ множество D_i допустимых пар граничных точек $\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i$ таково, что функция $E(\mathbf{q}_i) - E(\mathbf{q}_{i-1})$ не имеет экстремума на D_i . Тогда оптимальная траектория экстремальна по быстродействию в задаче с закрепленными концами и фазовым ограничением $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \geq 0$.

Для доказательства заметим, что с точностью до знака функционал (2.2) совпадает с приращением механической энергии аппарата и потому определяется концами траектории. Концы оптимальной траектории лежат в пересечении D_i и множества достижимости задачи экстремального быстрогодействия. Поскольку, по предположению, это пересечение не содержит внутренних точек экстремума энергии, концы траектории лежат на границе множества достижимости.

Краевые условия (1.6) при $r > 0$ удовлетворяют требованиям утверждения 1. Следовательно, любая неэкстремальная по быстродействию и не проходящая через точку $\mathbf{r} = 0$ оптимальная траектория $\mathbf{q}(t)$, $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ не содержит граничных точек t_0, t_k и является особой, причем на ней ковектор $\mathbf{p}(t)$ тождественно равен нулю.

Утверждение 2. Оптимальная траектория задачи (2.2) является особой только в одном из двух случаев: если траектория проходит через точку $\mathbf{r} = 0$ и является баллистической; если траектория не содержит граничных точек t_0, t_k , а ковектор $\mathbf{p}(t)$ тождественно равен нулю.

Доказательство. Особая траектория удовлетворяет системе дифференциальных соотношений $d^n/dt^n H_u = 0$, $0 \leq n \leq 3$. Вычисление здесь производных по времени как скобок Пуассона с гамильтонианом задачи сводит эту систему к системе линейных уравнений, однородной по $\mathbf{p}$. Определитель системы имеет вид $\det = 2v(vz - wx) - x^2$ и является неотрицательной и неубывающей функцией времени. Его производная по времени равна нулю в фазе полета и положительна в фазе опоры; следовательно, тождество $\det = 0$ достигается только на баллистической траектории, проходящей через начало координат. Если же на особой траектории $\det \neq 0$, то $\mathbf{p}(t) = 0$; последнее несовместимо с условиями трансверсальности (2.4), (2.5) в граничных точках траектории.

Траектория называется жесткой [5], если на ней $\psi_0 = 0$. Для жестких траекторий гамильтониан дифференцируем во всей своей области определения и нет необходимости разделять участки $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \leq 0$. В частности, переменные $\mathbf{p}^\pm$ совпадают с ψ , а задача (2.2) — с задачей (1.4) — (1.6).

Утверждение 3. Неособая оптимальная траектория задачи (2.2) является жесткой тогда и только тогда, когда она имеет тип *LIPR* и проходит через точку $\mathbf{r} = 0$.

¹ См. Болотин Ю. В. Энергетически оптимальные походы в модельной задаче управления двуногим падающим аппаратом. — Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1982, № 202. 28 с.

Из приведенных утверждений следует, что возможны два типа оптимальных траекторий, начинающихся в начале координат: неэкстремальные по быстродействию и жесткие траектории. Для траекторий первого типа аппарат неподвижно стоит в точке $r=0$ конечный отрезок времени $t_0 \leq t \leq t_1$, а затем «выпрыгивает» из этой точки с ненулевой скоростью и под ненулевым углом к горизонту. Неэкстремальность по быстродействию связана здесь с возможностью изменения длительности стояния $t_1 - t_0$. Для траекторий второго типа в момент прохождения точки $r=0$ горизонтальная составляющая скорости центра тяжести отлична от нуля, импульс реакции в этот момент меняет вертикальную, но сохраняет горизонтальную составляющую скорости центра тяжести.

Жесткой траектории отвечает вырожденный минимум функционала (1.4): подняв ее на высоту $0 < h < 1$ вдоль оси z , получим то же значение энергозатрат. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\psi_0 = 1$.

Выясним свойства точек склейки траекторий задачи (2.2).

Утверждение 4. Пусть точка склейки участков $v \cdot r \geq 0$ оптимальной траектории задачи (1.4) — (1.6) не является точкой пассивного отрыва SP^+ . Тогда переменные ψ непрерывны в этой точке, а переменные $p^\pm$ преобразуются в ней по формуле $p^+ - p^- = -2E_q$.

Это утверждение вытекает из соотношения (3.2), условий трансверсальности (2.6) и требования непрерывности гамильтониана. Поскольку всегда возможно разбиение оптимальной траектории на участки $v \cdot r \geq 0$, такое, что среди точек склейки нет точек пассивного отрыва, можно считать, что переменные ψ всегда непрерывны в точках склейки.

5. Доказанные выше утверждения полностью характеризуют локальные свойства походок, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности. Множество оптимальных походок, т. е. тех походок, для которых эти свойства согласованы, описывается следующим образом.

Теорема. Пусть максимальная интенсивность управления $u_{\max}$ достаточно велика. Тогда при любых значениях параметров s, V возможны только следующие типы оптимальных походок: $LSI+R$ — ходьба; $LSI+P+R$ — медленный бег; $LSP+I+P+R$, $LSP+P+I+P+R$, $LSP-I-I+P+R$, $LP+I+P+R$ — медленный бег с разгрузкой; $LI+P+R$ — быстрый бег. Ходьба и медленный бег являются решениями задачи минимального, а быстрый бег — задачи максимального быстродействия с закрепленными концами и фазовым ограничением $v \cdot r \geq 0$.

Доказательство теоремы основано на последовательном переборе возможных последовательностей участков $S, I^\pm, P^\pm, X^{\pm 2}$.

6. Дадим механическую интерпретацию описанных типов оптимальных походок (фиг. 1).

Ходьба. Конечности аппарата выпрямлены, движение в опорной фазе осуществляется «перекатом». В момент окончания шага происходит толчок опорной конечностью максимально возможной интенсивности.

Медленный бег. Движение аппарата в опорной фазе осуществляется перекатом. При толчке в момент окончания опорной фазы аппарат переходит в фазу полета, которая заканчивается в момент постановки другой конечности.

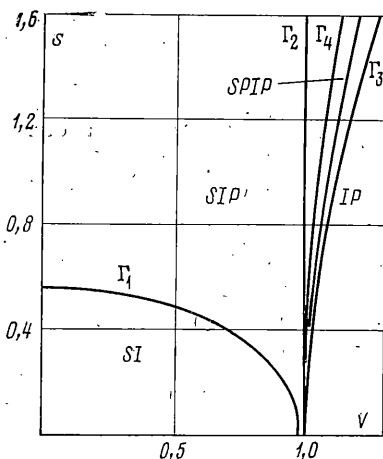
Медленный бег с разгрузкой. При этом типе походки движение в фазе опоры происходит на не полностью выпрямленных конечностях. Перед толчком в момент окончания опорной фазы опорная конечность полностью разгружена.

Быстрый бег. Движение в фазе опоры происходит на полусогнутых конечностях. Длительность фазы опоры минимально возможная для того, чтобы обеспечить необходимую настильность вылета аппарата в фазе полета.

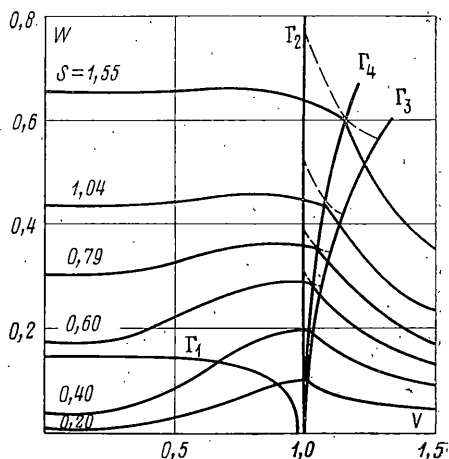
Пусть заданы значения безразмерных длины шага $2s_*$ и скорости движения V_* и требуется найти отвечающую им оптимальную походку. Параметризуем описанный класс походок четырехмерным вектором a , координаты которого составляют начальная горизонтальная скорость $v(0)$ и длительности участков движения перекатом, разгрузкой и в фазе полета. Энергозатраты, средняя скорость и длина шага являются гладкими функциями $W(a), V(a), 2s(a)$. Найти оптимальную при заданных s_*, V_* походку — значит решить конечномерную экстремальную задачу с ограничениями

$$W(a) \rightarrow \min, \quad a_i \geq 0, \quad V(a) = V_*, \quad s(a) = s_* \quad (6.1)$$

² См. также указ. публ. с. 52.



Фиг. 2



Фиг. 3

Локальному минимуму (6.1) отвечает локально оптимальная походка аппарата, глобальному минимуму — глобально оптимальная походка [6].

Задача (6.1) решена численно, методом множителей Лагранжа. Бифуркационная диаграмма локально оптимальных походок в плоскости s, V приведена на фиг. 2. При малых скоростях и длинах шага единственной локально оптимальной походкой является ходьба, при пересечении бифуркационной кривой Γ_1 ходьба теряет локальную оптимальность и переходит в медленный бег. Медленный бег — единственная локально оптимальная походка в области, ограниченной кривыми Γ_1, Γ_2 . При пересечении Γ_2 возникает еще одна походка — быстрый бег, которая сохраняет локальную оптимальность во всем диапазоне $1 < V < \infty, 0 < s < \infty$. Область глобальной оптимальности быстрого бега уже. Это связано с наличием зоны гистерезиса — клина с границами Γ_2, Γ_3 , внутри которого локально оптимальны как медленный, так и быстрый бег. Потеря локальной оптимальности медленного бега происходит на Γ_3 , а глобальной — на Γ_4 . Таким образом, бифуркация медленный бег — быстрый бег отличается от бифуркации ходьба — медленный бег. В первом случае при пересечении бифуркационной кривой параметры меняются скачкообразно, во втором — непрерывно. Невозможность непрерывного перехода от медленного к быстрому бегу следует и из теоретических соображений: медленный бег является наихудшей, а быстрый — наилучшей по быстродействию походкой. Поэтому переходная походка должна быть или неэкстремальной по быстродействию, или жесткой, что, по доказанному, невозможно.

Зона локальной оптимальности медленного бега с разгрузкой оказывается очень узким клином, лежащим внутри зоны гистерезиса. Более того, этот клин лежит в области глобальной оптимальности быстрого бега, так что медленный бег с разгрузкой не является глобально оптимальным ни при каких значениях параметров.

Зависимость энергозатрат от скорости при различных длинах шага приведена на фиг. 3.

Приведенные результаты хорошо согласуются с некоторыми свойствами ходьбы человека. Переход от ходьбы к медленному бегу выгоден, для длины ноги 1 м и длины шага 0,8 м, при скорости 7,5 км/ч, переход от медленного к быстрому бегу — при скорости 11 км/ч. Хотя в постановку задачи не входили ограничения на коэффициент трения опоры, его значение не превосходит 0,4.

Импульсный характер управления в данной задаче связан с отсутствием ограничений на мощность управляющих двигателей. Ограничение приведет к «размазыванию» импульса на конечный отрезок времени; для снижения средних энергозатрат целесообразно использовать энергоустановку с высокой пиковой мощностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Охоцимский Д. Е., Платонов А. К., Кузусев Е. И., Ярошевский В. С. Расчет динамических параметров движения шагающего аппарата на ЭВМ.— В кн.: Исследование робототехнических систем. М.: Наука, 1982, с. 72—77.
2. Белецкий В. В., Болотин Ю. В. Модельная оценка энергетики двуногой ходьбы и бега.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 89—94.
3. Охоцимский Д. Е., Платонов А. К., Лапшин В. В. Энергетика движения шестинового шагающего аппарата.— В кн.: Информационные и управляющие системы роботов. М.: Изд-е Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1982, с. 8—19.
4. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 3, с. 395—453.
5. Алексеев А. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.
6. Болотин Ю. В. Качественные закономерности энергетически оптимальной ходьбы и бега.— В кн.: Информационные и управляющие системы роботов. М.: Изд-е Ин-та прикл. матем. АН СССР, 1982, с. 20—27.

Москва

Поступила в редакцию
5.VII.1983