

УДК 531.53

О СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ МАЯТНИК-КОЛЬЦО В УСЛОВИЯХ ВИБРАЦИИ ОСНОВАНИЯ

МЕНЯЙЛОВ А. И., МОВЧАН А. В.

Исследуется динамическая устойчивость системы, представляющей собой шарнирно закрепленный за один конец стержень с насаженным на него подвижным кольцом, в условиях высокочастотной вибрации основания в вертикальной плоскости [3]. Задача решается методом усреднения. Найдены необходимые условия стабилизации кольца на стержне в окрестности его верхнего устойчивого положения — наличие плоской вибрации. Определяются квазистационарные решения, характеризующие нетривиальные положения кольца, исследуется их устойчивость и зависимость от различных параметров системы.

1. Рассмотрим физический маятник в виде шарнирно закрепленного за один конец неоднородного стержня длины L , совершающего движения в вертикальной плоскости вокруг точки подвеса. Пусть на стержень надето кольцо, внутренний диаметр которого равен толщине стержня и которое может свободно перемещаться вдоль него. Точка подвеса маятника совершает периодические колебания с высокой частотой, имеющие вертикальную и горизонтальную составляющие r_y и r_x соответственно (фиг. 1).

Ставится задача существования периодических движений рассматриваемой системы, таких, что «перевернутый» стержень совершает периодические колебания около вертикали, а кольцо — периодические колебания на стержне, не слетая с него и не опускаясь на точку подвеса.

Введем безразмерные параметры и переменные

$$\tau = \omega t, \quad \xi = \xi_*/L, \quad l = R/L, \quad l_1 = I_1/ML^2$$

$$v = m/M, \quad \varepsilon = a/L \ll 1, \quad \delta = \sqrt{gL}/a\omega \quad (1.1)$$

$$\alpha = \alpha_1/2MLa\omega, \quad \beta = \beta_1/2ma\omega$$

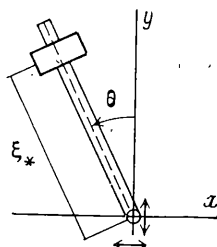
где m — масса кольца, M — масса стержня, ξ_* — текущая координата кольца, отсчитываемая от точки подвеса стержня, R — расстояние от точки подвеса до центра масс стержня, L — приведенная длина стержня, I_1 — собственный момент инерции кольца, α_1, β_1 — коэффициенты вязкого трения в шарнире и между кольцом и стержнем соответственно, a, ω — амплитуда и частота вибраций вдоль вертикальной оси y , g — ускорение свободного падения.

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$\xi'' - \xi\theta'^2 + (\delta^2\varepsilon^2 + \varepsilon f_y'') \cos \theta - k\varepsilon f_x'' \sin \theta + 2\beta\varepsilon\xi' = 0 \quad (1.2)$$

$$[(l + l_1 + v\xi^2)\theta']' - (l + v\xi)[(\delta^2\varepsilon^2 + \varepsilon f_y'') \sin \theta + k\varepsilon f_x'' \cos \theta] + 2\alpha\varepsilon\theta' = 0$$

где θ — угол отклонения стержня от вертикали, k — коэффициент эллиптичности вибрации ($r_y = af_y(\tau)$, $r_x = kaf_x(\tau)$, $|f_x|, |f_y| \leq 1$).



Фиг. 1

Динамическая устойчивость маятника с грузом при вибрации точки подвеса рассматривалась в работах [1–3]. В [1] исследована устойчивость верхнего положения равновесия маятника, у которого вдоль направляющей закреплен на пружине свободный или колеблющийся по заданному закону груз. Однако наличие пружины снимает вопрос о стабилизации положения груза на стержне. В [2] рассмотрена динамика поведения маятника с грузом в окрестности его нижнего положения равновесия при одноосной горизонтальной вибрации без учета массы стержня. В [3] приведены результаты экспериментального исследования механической системы, аналогичной рассматриваемой. Однако предложенная в [3] математическая модель тем самым несколько уточняет описанное явление стабилизации кольца — необходимость дополнительного учета горизонтальной составляющей вибрации.

В публикуемой работе, обобщающей исследования [1, 2], рассматривается случай маятника более общего вида и изучается вопрос о стабилизации свободного груза (кольца) на стержне в окрестности его верхнего положения равновесия при произвольной плоской периодической вибрации ($k \neq 0$).

Будем исследовать систему (1.2) методом усреднения, считая ε малым ($\varepsilon \ll 1$). Приведем ее к стандартной форме, введя замену переменных:

$$\begin{aligned}\xi &= \gamma - \varepsilon (f_y \cos \psi - k f_x \sin \psi), \quad \xi' = \varepsilon \Phi - \varepsilon (f_y' \cos \psi - k f_x' \sin \psi) \\ \theta &= \psi + \varepsilon (l + v \xi) (f_y \sin \psi + k f_x \cos \psi) (l + l_1 + v \xi^2)^{-1} \\ \theta' &= [\varepsilon \Omega + \varepsilon (l + v \xi) (f_y' \sin \psi + k f_x' \cos \psi)] (l + l_1 + v \xi^2)^{-1}\end{aligned}\quad (1.3)$$

Преобразование (1.3), невырожденное для любого $\tau > 0$ при $0 < \varepsilon_* < \varepsilon < 2[\sqrt{l^2 + v(l + l_1)} - l]/[v(1 + k)]$.

Дифференцируя (1.3), с учетом (1.2) получим

$$\begin{aligned}\psi' &= \varepsilon \frac{\Omega (l + l_1 + v \xi^2)^{-1} - f_x' \xi' (f_y \sin \psi + k f_x \cos \psi)}{1 + \varepsilon (l + v \xi) (f_y \cos \psi - k f_x \sin \psi) (l + l_1 + v \xi^2)^{-1}} \\ \Omega' &= -v (f_y' \sin \psi + k f_x' \cos \psi) \xi' - (l + v \xi) (f_y' \cos \psi - \\ &\quad - k f_x' \sin \psi) \psi' - (l + v \xi) \{f_y'' (\sin \psi - \sin \theta) + \\ &\quad + k f_x'' (\cos \psi - \cos \theta)\} + \varepsilon (l + v \xi) \delta^2 \sin \theta - 2\alpha (l + l_1 + v \xi^2)^{-1} \theta' \\ \gamma' &= \varepsilon \Phi - \varepsilon (f_y \sin \psi + k f_x \cos \psi) \psi' \\ \Phi' &= - (f_y' \sin \psi + k f_x' \cos \psi) \psi' + \varepsilon^{-1} \xi \theta'^2 - \\ &\quad - \varepsilon \delta^2 \cos \theta + f_y'' (\cos \psi - \cos \theta) - \\ &\quad - k f_x'' (\sin \psi - \sin \theta) - 2\beta \xi', \quad \tau' = 1\end{aligned}\quad (1.4)$$

где $f(\xi) = (l + v \xi) (l + l_1 + v \xi^2)^{-1}$ и $f_x' = df/d\xi$.

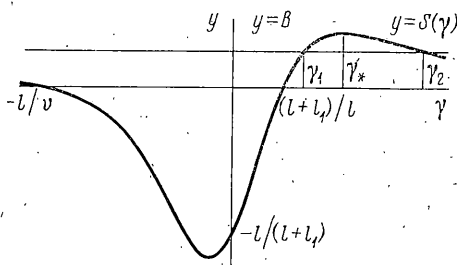
Таким образом, преобразование (1.3) сводит систему (1.2) к системе (1.4) с четырьмя медленными $\psi, \Omega, \gamma, \Phi$ и одной быстрой τ переменными. Осредним (1.4) по τ [4]. Оставляя те же обозначения для усредненных значений переменных, что и для самых переменных, получим уравнения первого приближения в виде

$$\begin{aligned}\psi' &= \varepsilon \Omega (l + l_1 + v \gamma^2)^{-1} \\ \Omega' &= \varepsilon [Q(\gamma, \psi) - 2\alpha \Omega (l + l_1 + v \gamma^2)^{-1}] \\ \gamma' &= \varepsilon \Phi, \quad \Phi' = \varepsilon [\gamma \Omega^2 (l + l_1 + v \gamma^2)^{-2} + P(\gamma, \psi) - 2\beta \Phi]\end{aligned}\quad (1.5)$$

$$Q(\gamma, \psi) = -[2v\gamma + l^2 - v(l+l_1)] [(l+l_1+v\gamma^2)2\pi]^{-1} \int_0^{2\pi} [(f_y')^2 - k^2(f_x')^2] \sin \psi \cos \psi + \\ + kf_x' f_y' \cos 2\psi] d\tau + \delta^2(l+v\gamma) \sin \psi$$

$$P(\gamma, \psi) = (l+v\gamma)(l\gamma - l - l_1)(l+l_1+v\gamma^2)^{-2} (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} [f_y'^2 \sin^2 \psi + k^2 f_x'^2 \cos^2 \psi + \\ + kf_x' f_y' \sin 2\psi] d\tau - \delta^2 \cos \psi$$

2. Рассмотрим стационарные режимы движения системы (1.5). Полагая $\psi'=0$, $\Omega'=0$, $\gamma'=0$, $\Phi'=0$, из первого и третьего уравнений системы



Фиг. 2

(1.5) получим $\Omega=0$, $\Phi=0$, а из второго уравнения получим необходимое условие существования решения вида $\psi=0$, $\gamma=\text{const}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_x' f_y' d\tau = 0 \quad (2.1)$$

Значение γ в этом случае определяется из уравнения $P(\gamma, \psi)=0$, которое имеет смысл при $r_x \neq 0$. Это уравнение имеет вид

$$S(\gamma) = \delta^2 \left[\frac{k^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_x'^2 d\tau \right]^{-1} \quad (2.2)$$

$$S(\gamma) = (l+v\gamma)(l\gamma - l - l_1)(l+l_1+v\gamma^2)^{-2}$$

На фиг. 2 построены функции $y=S(\gamma)$ и $y=B$, где B равно правой части уравнения (2.2). Искомые решения этого уравнения должны лежать в области $\gamma > 0$, в которой $S(\gamma)$ имеет один максимум при

$$\gamma = \gamma_* = \frac{l + (1+l_1/l)v}{v} \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) - \frac{l - (1+l_1/l)v}{2v} \quad (2.3)$$

где φ — решение уравнения

$$\cos \varphi = - \frac{l - (1+l_1/l)v}{l + (1+l_1/l)v}$$

При $k \neq 0$ и значениях δ , таких, что правая часть уравнения (2.2) меньше $S(\gamma_*)$, будем иметь два стационарных решения системы (1.5), в которых $\gamma_i > 0$ ($i=1, 2$) определяются из уравнения (2.2):

$$\psi=0, \gamma=\gamma_1; \quad \psi=0, \gamma=\gamma_2 \quad (2.4)$$

3. Исследуем устойчивость найденных стационарных решений системы (1.5), которая может быть представлена в виде

$$\gamma'' - \gamma \psi'^2 + 2\epsilon \beta \gamma' - \epsilon^2 P(\gamma, \psi) = 0 \quad (3.1)$$

$$[(l + l_1 + \nu \gamma^2) \psi']' + 2\epsilon \alpha \psi' - \epsilon^2 Q(\gamma, \psi) = 0$$

Ей соответствуют следующие уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned} u'' + 2\epsilon \beta u' - \epsilon^2 \left(\frac{\partial P}{\partial \gamma} \right)_{\substack{\psi=0 \\ \gamma=\gamma_i}} u &= 0 \\ v'' + 2\epsilon \alpha (l + l_1 + \nu \gamma^2)^{-1} v' - \epsilon^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial \psi} \right)_{\substack{\psi=0 \\ \gamma=\gamma_i}} (l + l_1 + \nu \gamma^2)^{-1} v &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Характеристическое уравнение системы (3.2) имеет вид

$$\left[\lambda^2 + 2\epsilon \beta \lambda - \epsilon^2 \left(\frac{\partial P}{\partial \gamma} \right) \right] \left[\lambda^2 + 2\epsilon \alpha (l + l_1 + \nu \gamma^2)^{-1} \lambda - \epsilon^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial \psi} \right) (l + l_1 + \nu \gamma^2)^{-1} \right] = 0 \quad (3.3)$$

Устойчивыми будут те из решений (2.4), для которых одновременно выполняются условия

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \gamma} \right)_{\substack{\psi=0 \\ \gamma=\gamma_i}} < 0, \quad \left(\frac{\partial Q}{\partial \psi} \right)_{\substack{\psi=0 \\ \gamma=\gamma_i}} < 0 \quad (3.4)$$

Из первого неравенства (3.4) следует, что при выполнении второго $\gamma_2 = \max [\gamma_1, \gamma_2]$ устойчиво, а $\gamma_1 = \min [\gamma_1, \gamma_2]$ неустойчиво, так как первое условие (3.4) эквивалентно $dS/d\gamma|_{\gamma=\gamma_i} < 0$, т. е. устойчивый корень γ_i находится в области убывания функции $S(\gamma)$ при $\gamma > \gamma_*$.

Из второго неравенства (3.4) с учетом уравнения (2.2) получим дополнительные условия на δ и k , обеспечивающие устойчивость соответствующих им стационарных решений системы (1.5) $\gamma = \gamma_2, \psi = 0$:

$$\delta^2 < \frac{D(\gamma_2) S(\gamma_2)}{F(\gamma_2) + D(\gamma_2)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_y'^2 d\tau \quad (3.5)$$

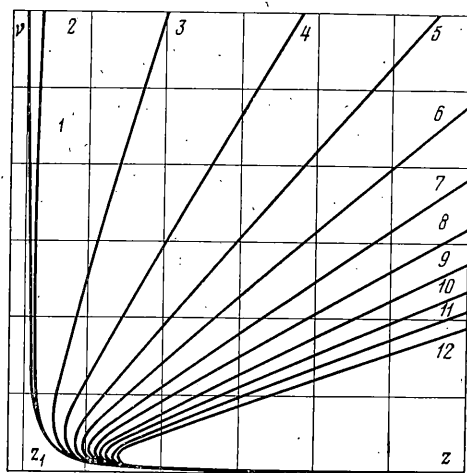
$$\frac{\delta^2}{\frac{S(\gamma_*)}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_x'^2 d\tau} < k^2 < \frac{D(\gamma_2)}{F(\gamma_2) + D(\gamma_2)} \frac{\int_0^{2\pi} f_y'^2 d\tau}{\int_0^{2\pi} f_x'^2 d\tau} \quad (3.6)$$

$$D(\gamma) = 2\nu l \gamma + l^2 - \nu(l + l_1)$$

$$F(\gamma) = (l + \nu \gamma)^2 (l \gamma - l - l_1) (l + l_1 + \nu \gamma^2)^{-1}$$

Отметим, что исследование второго и третьего приближений метода усреднения при нахождении квазистационарных режимов движения системы (1.2) показало, что для решений вида (2.4) высшие приближения не вносят качественных изменений в характер поведения системы.

4. Проведем оценку параметров системы, при которых реализуются найденные квазистационарные решения.



Фиг. 3

Кольцо будет находиться на стержне, если для любого $\tau > 0$ выполняется неравенство $0 < \xi(\tau) < L_1/L$ или

$$\gamma_* + \varepsilon < \gamma_2 < L_1/L - \varepsilon \quad (4.1)$$

Выбирая γ_2 , например $\gamma_2 = 0,5(L_1/L + \gamma_*)$, и параметры системы из области $\gamma_* < L_1/L - 2\varepsilon$, а δ^2 (или k^2) из условия (3.5) (или (3.6)), получим из (2.2) значение k^2 (или δ^2). В системе с таким образом выбранными параметрами кольцо зависнет на стержне, который колеблется в окрестности верхнего положения равновесия.

Рассмотрим подробнее условие $\gamma_* < L_1/L - 2\varepsilon$, которое определяет конструкцию стержня, состоящего из двух жестко соединенных однородных стержней, таких, что центр масс лежит на границе соединения. Составные части имеют длины R и $L_1 - R = R(z-1)$ и плотности $\rho_1 = M(z-1)/(Rz)$, $\rho_2 = M/(Rz(z-1))$.

Для стержня с кольцом, радиус инерции которого r_* :

$$l = 3(z+2)^{-1}, \quad l_1 = 9\nu n(z+2)^{-2} \quad (4.2)$$

$$n = r_*^2 R^{-2}, \quad \varepsilon = 3\varepsilon_1(z+2)^{-1}, \quad \varepsilon_1 = aR^{-1}$$

Неравенство $\gamma_* < L_1/L - 2\varepsilon$ в этом случае принимает вид

$$A(z, \nu, n, \varepsilon_1) > 0 \quad (4.3)$$

$$A(z, \nu, n, \varepsilon_1) = -9n[3(z-b)^2 - n]\nu^3 + 3\{3(z-b)^2(z-2-2b) - n[4(4z-1) - 18b]\}\nu^2 + \{3[2(z-1) - 3b]^2 - 2(z+2)^2 - 9n\}\nu - 3(z+2), \quad b = 2\varepsilon_1$$

Область определения (4.3) построена на фиг. 3 для $\varepsilon_1 = 0,1$; где изображены пересечения поверхности $A(z, \nu, n, \varepsilon_1) = 0$ плоскостями $n = \text{const}$ в проекции на плоскость (z, ν) . Отсчет по оси z начинается со значения 2, а по оси ν с 0, а z -координата точки z_1 равна $2+2b$. Кривые 1-12, представленные на фиг. 3, соответствуют $n = 0; 0,01; 0,1-1$. Точки, принадлежащие области (4.3), лежат правее изображенных кривых для каждого n . Из фиг. 3 видно, что стержень должен быть неоднородным со смещенным к точке подвеса центром масс.

Дадим оценку частот возбуждения ω . Для случая, когда точка подвеса маятника совершает гармонические колебания $f_x = \cos \omega t$, $f_y = \sin \omega t$, а параметры системы имеют численные значения $L_1 = 60$ см, $\nu = 0,5$; $l_1 =$

$=0,01$; $\varepsilon_1=0,1$; $z=4$, получаем, что ω должна быть больше 89,7 Гц. При увеличении z , например $z=6$, и тех же остальных параметрах, ω должна быть больше 149,2 Гц. Значения δ и k для $z=4$ определяются из условий $\delta^2 < 0,04$ и $16,636^2 < k^2 < 16,956^2$, а для $z=6$ — из условий $\delta^2 < 0,03$ и $21,676^2 < k^2 < 23,496^2$.

Авторы выражают признательность Л. Д. Акуленко за обсуждение и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрижак Т. Г. Методы исследования динамических систем типа «Маятник». Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.
2. Schmidt B. A. Vibrated pendulum with a mass free to move radially.— Trans. ASME. J. Appl. Mech., 1980, v. 47, № 2, p. 428–430.
3. Челомей В. Н. Парадоксы в механике, вызванные вибрациями. — Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 1, с. 62–67.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958. 408 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.XI.1983