МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1984

О ПРИМЕНЕНИИ КВАТЕРНИОНОВ В ПРЕЦЕССИОННОЙ ТЕОРИИ ГИРОСКОПОВ

ЧЕЛНОКОВ Ю. Н.

Получены кватернионные уравнения, описывающие динамику прецессионного движения главной оси и гирорамы обобщенной гироскопической системы относительно системы координат, перемещающейся в инерциальном пространстве по произвольному заданному закону. С их помощью установлено одно свойство гиросистем с маятниковостью.

Рассмотрены некоторые приложения полученных уравнений к теории гиромаятника и двухроторной гирорамы. Указаны задачи, в которых применение кватернионных уравнений представляется целесообразным.

1. Рассмотрим гироскопическую систему, построенную следующим образом [1]. Гироскопы вместе с кожухами установлены на гирораме. Оси гироскопов вместе с кожухами могут поворачиваться относительно гирорамы, а также могут быть укреплены на ней неподвижно. Центры масс всех гироскопов неподвижны относительно гирорамы, а их оси собственного вращения могут располагаться в различных плоскостях. Гирорама установлена на платформе, движущейся в инерциальном пространстве по заданному закону, и имеет в общем случае относительно платформы три степени свободы. Центр масс C гирорамы не совпадает с ее точкой подвеса O.

Введем в рассмотрение следующие системы координат: $O^*X_1^*X_2^*X_3^*(X^*)$ — инерциальная система координат, $OX_1X_2X_3(X)$ — система координат с началом в точке O подвеса гиросистемы, перемещающаяся относительно X^* поступательно (одноименные оси систем координат X и X^* параллельны), $OZ_1Z_2Z_3(Z)$ — система координат, вращающаяся относительно X с заданной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^\circ$ (это может быть естественный трехгранник Дарбу, географический или какой-либо другой координатный трехгранник), $OY_1Y_2Y_3(Y)$ — система координат, жестко связанная с гирорамой, $O\eta_1\eta_2\eta_3(\eta)$ — система координат, одна из осей которой направлена по вектору кинетического момента гиросистемы.

Кватернионы $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\varkappa}$, характеризующие взаимную ориентацию введенных систем координат, а также векторы абсолютных $\boldsymbol{\omega}^\circ$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Omega}$ и относительной $\boldsymbol{\omega}'$ угловых скоростей этих систем координат введем в соответствии со схемами поворотов

$$X \xrightarrow{\nu,\,\omega^0} Z \xrightarrow{\lambda,\,\omega'} \eta \sim X \xrightarrow{\mu,\,\omega} \eta \qquad (1.1)$$

$$X \xrightarrow{\nu,\,\omega^0} Z \xrightarrow{\varkappa} Y \sim X \xrightarrow{\Omega} Y$$

Будем считать, что каждый из кватернионов $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ определен своими компонентами в базисе, преобразуемом этим кватернионом, т. е. является собственным кватернионом [2].

Движение гиросистемы будем рассматривать относительно поступательно перемещающейся системы координат X. Обозначим через $\mathbf{L}_0$ главный вектор момента количества этого движения гиросистемы относительно начала O системы координат X. Полагая, что вектор $\mathbf{L}_0$ определен своими проекциями в системе координат η, запишем теорему об изменении момента количества относительного движения гиросистемы в виде

$$(d\mathbf{L}_0/dt)_1+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{L}_0=\mathbf{M}_0'+\mathbf{M}_0'' \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{M}_0'$ — главный момент внешних сил, приложенных к гиросистеме, относительно точки O, $\mathbf{M}_0''$ — главный момент переносных сил инерции относительно той же точки; символ $(d/dt)_1$ означает локальное дифференцирование в системе координат η.

Уравнение (1.2) можно заменить кватернионными [3]

$$2\boldsymbol{\mu}^{\circ\bullet}=\boldsymbol{\mu}^\circ\circ\boldsymbol{\omega}_\eta+\boldsymbol{\mu}\circ(\mathbf{M}_{0\eta}'+\mathbf{M}_{0\eta}'') \tag{1.3}$$

$$2\boldsymbol{\mu}^\bullet=\boldsymbol{\mu}\circ\boldsymbol{\omega}_\eta \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{\mu}^\circ={}^1/_2\boldsymbol{\mu}\circ\mathbf{L}_{0\eta}={}^1/_2\mathbf{L}_{0X}\circ\boldsymbol{\mu} \tag{1.5}$$

Здесь и далее запись вида $\mathbf{r}_\xi$ означает отображение вектора $\mathbf{r}$ на базис ξ ($\xi=X, Z, \eta, Y$), точка означает дифференцирование по времени t, а знак $\circ$ — кватернионное умножение, кватернион $\boldsymbol{\mu}$ характеризует ориентацию системы координат η относительно X.

В соответствии с основным допущением прецессионной теории гироскопов будем считать, что $\mathbf{L}_0=\mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ — собственный кинетический момент гиросистемы, равный геометрической сумме кинетических моментов отдельных гироскопов в их собственном вращении.

Направим ось $O\eta_k$ системы координат η по вектору $\mathbf{H}$. Тогда

$$\mathbf{L}_{0\eta}=\mathbf{H}_\eta=H\mathbf{i}_k, \quad H=|\mathbf{H}| \quad (k=1, 2, 3) \tag{1.6}$$

где $\mathbf{i}_k$ — орт гиперкомплексного пространства [2].

Из (1.5) и (1.6) имеем $\boldsymbol{\mu}^\circ={}^1/_2H\boldsymbol{\mu}\circ\mathbf{i}_k$. Подставим это выражение в уравнение (1.3):

$$H\boldsymbol{\mu}^\bullet\circ\mathbf{i}_k+H^\bullet\boldsymbol{\mu}\circ\mathbf{i}_k={}^1/_2H\boldsymbol{\mu}\circ\mathbf{i}_k\circ\boldsymbol{\omega}_\eta+\boldsymbol{\mu}\circ(\mathbf{M}_{0\eta}'+\mathbf{M}_{0\eta}'') \tag{1.7}$$

Имеет место равенство $\mathbf{i}_k\circ\boldsymbol{\omega}_\eta=-2\omega_k-\boldsymbol{\omega}_\eta\circ\mathbf{i}_k$, где ω_k — проекция вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости системы координат η на ось $O\eta_k$. Подставляя его в уравнение (1.7) и учитывая соотношение (1.4), получим

$$2H\boldsymbol{\mu}^\bullet-H\omega_k\boldsymbol{\mu}\circ\mathbf{i}_k+H^\bullet\boldsymbol{\mu}=-\boldsymbol{\mu}\circ(\mathbf{M}_{0\eta}'+\mathbf{M}_{0\eta}'')\circ\mathbf{i}_k \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) описывает прецессионное движение оси собственного кинетического момента (главной оси) гиросистемы относительно системы координат X, перемещающейся в инерциальном пространстве поступательно. Это уравнение записано в сопутствующей системе координат η [4]. Проекция ω_k угловой скорости сопутствующей системы координат может быть задана произвольно. Для астатической системы координат $\omega_k=0$ и уравнение (1.8) упрощается.

Получим кватернионное уравнение, описывающее прецессионное движение главной оси гиросистемы относительно системы координат Z. Для этого перейдем в уравнении (1.8) к новой кватернионной переменной $\boldsymbol{\lambda}$, используя равенство

$$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\nu}\circ\boldsymbol{\lambda} \tag{1.9}$$

вытекающее из схемы поворотов (1.1). В (1.9) $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ — собственные кватернионы, характеризующие ориентацию систем координат Z относительно X и η относительно Z соответственно.

Подставляя равенство (1.9) в (1.8) и учитывая кинематическое уравнение $2\boldsymbol{\nu}^\bullet=\boldsymbol{\nu}\circ\boldsymbol{\omega}_z{}^\circ$, получим

$$\begin{aligned}2H\boldsymbol{\lambda}^\bullet+H\boldsymbol{\omega}_z{}^\circ\circ\boldsymbol{\lambda}-H\omega_k\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{i}_k+H^\bullet\boldsymbol{\lambda}=\\=-\boldsymbol{\lambda}\circ(\mathbf{M}_{0\eta}'+\mathbf{M}_{0\eta}'')\circ\mathbf{i}_k=-(\mathbf{M}_{0z}'+\mathbf{M}_{0z}'')\circ\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{i}_k\end{aligned} \tag{1.10}$$

Главный момент $\mathbf{M}_0''$ переносных сил инерции относительно точки O подвеса гиросистемы $\mathbf{M}_0''=m\mathbf{w}\times\mathbf{l}$, где m — масса гиросистемы, $\mathbf{w}$ — вектор абсолютного ускорения точки подвеса O, $\mathbf{l}$ — радиус-вектор, проведенный из точки O в центр масс C гиросистемы.

Среди моментов внешних сил выделим момент сил тяготения гравитационного поля Земли. Будем считать, что эти силы приводятся к одной равнодействующей силе $\mathbf{F}$, приложенной в центре масс C гиросистемы и направленной к центру Земли. Тогда $\mathbf{M}_0'=\mathbf{M}_0+\mathbf{l}\times\mathbf{F}$, где $\mathbf{M}_0$ — главный момент относительно точки O других внешних сил, действующих на гиросистему (помимо сил тяготения).

Теперь сумму моментов всех сил, действующих на гиросистему, можно представить в виде

$$\mathbf{M}_0'+\mathbf{M}_0''=\mathbf{M}_0+m\mathbf{a}\times\mathbf{l}, \qquad \mathbf{a}=\mathbf{w}-\mathbf{F}/m=\mathbf{w}-\mathbf{g} \tag{1.11}$$

Здесь $\mathbf{a}$ — вектор кажущегося ускорения точки подвеса гиросистемы, $\mathbf{g}$ — ускорение сил тяготения.

Учитывая (1.11), получим выражение для правой части уравнения (1.10):

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\lambda}\circ(\mathbf{M}_{0\eta}'+\mathbf{M}_{0\eta}'')\circ\mathbf{i}_k=\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{M}_{0\eta}\circ\mathbf{i}_k+\\ +{}^1/{}_2m(\mathbf{a}_z\circ\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{l}_\eta-\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{l}_\eta\circ\bar{\boldsymbol{\lambda}}\circ\mathbf{a}_z\circ\boldsymbol{\lambda})\circ\mathbf{i}_k\end{gathered} \tag{1.12}$$

где $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ — кватернион, сопряженный кватерниону λ.

Выражение (1.12) является достаточно сложным, поэтому рассмотрим некоторые частные случаи, представляющие практический интерес.

1. Будем считать, что гиросистема не имеет маятниковости. Тогда в выражении (1.12) следует положить $\mathbf{l}_\eta=0$ и уравнение (1.10) прецессионного движения главной оси гиросистемы принимает для этого случая вид

$$2H\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{\cdot}}+H\boldsymbol{\omega}_z^\circ\circ\boldsymbol{\lambda}-H\omega_k\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{i}_k+H^{\boldsymbol{\cdot}}\boldsymbol{\lambda}=-\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{M}_{0\eta}\circ\mathbf{i}_k \tag{1.13}$$

Для астатической системы координат в уравнении (1.13) следует положить $\omega_k=0$.

2. Предположим, что вектор $\mathbf{H}$ собственного кинетического момента гиросистемы сохраняет свое направление относительно гирорамы неизменным и направлен по оси OY_k. Кроме того, будем считать, что центр масс гиросистемы лежит на отрицательной части оси $OY_k(O\eta_k)$. Тогда $\mathbf{l}_\eta=-l\mathbf{i}_k(l=|\mathbf{l}|)$ и, используя равенство $\mathbf{i}_k\circ\mathbf{a}_\eta+\mathbf{a}_\eta\circ\mathbf{i}_k=-2a_k$, где a_k — проекция вектора $\mathbf{a}$ кажущегося ускорения точки подвеса гиросистемы на ось $OY_k(O\eta_k)$, выражение (1.12) можно привести к виду

$$\boldsymbol{\lambda}\circ(\mathbf{M}_{0\eta}'+\mathbf{M}_{0\eta}'')\circ\mathbf{i}_k=\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{M}_{0\eta}\circ\mathbf{i}_k+lm(\mathbf{a}_z\circ\boldsymbol{\lambda}-a_k\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{i}_k)$$

Уравнение (1.10) движения главной оси гиросистемы принимает в этом случае вид

$$2H\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{\cdot}}+(H\boldsymbol{\omega}_z^\circ+lm\mathbf{a}_z+H^{\boldsymbol{\cdot}})\circ\boldsymbol{\lambda}=(H\omega_k+lma_k)\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{i}_k-\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{M}_{0\eta}\circ\mathbf{i}_k \tag{1.14}$$

Отметим, что проекция $a_k=a_k(\lambda_j)$ кажущегося ускорения на направление вектора $\mathbf{H}$ — известная нелинейная функция компонент кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$ (параметров Родрига — Гамильтона λ_j).

Уравнение (1.14) существенно упрощается, если проекцию абсолютной угловой скорости сопутствующей системы координат η задать в соответствии с равенством

$$\omega_k=-lma_k/H \tag{1.15}$$

Учитывая (1.15), из (1.14) получим

$$2H\boldsymbol{\lambda}^{\boldsymbol{\cdot}}+(H\boldsymbol{\omega}_z^\circ+lm\mathbf{a}_z+H^{\boldsymbol{\cdot}})\circ\boldsymbol{\lambda}=-\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{M}_{0\eta}\circ\mathbf{i}_k \tag{1.16}$$

Для $\mathbf{M}_0=0$ и $\mathbf{H}=\text{const}$ из (1.16) следует линейное дифференциальное уравнение

$$2\lambda^{\boldsymbol{\cdot}}=-\left(\boldsymbol{\omega}_Z{}^{\circ}+\frac{lm}{H}\mathbf{a}_Z\right)\circ\lambda \tag{1.17}$$

Свяжем жестко с системой координат η некоторое твердое тело. Тогда уравнение (1.17) будет кватернионным кинематическим уравнением движения этого тела относительно системы координат Z с мгновенной угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}'=-\boldsymbol{\omega}^{\circ}-\frac{lm}{H}\mathbf{a}=-\boldsymbol{\omega}^{\circ}+\frac{l}{H}(\mathbf{F}-m\mathbf{w}) \tag{1.18}$$

проекции которой на оси системы Z (компоненты кватерниона $\boldsymbol{\omega}_z{}'=-\boldsymbol{\omega}_z{}^{\circ}-lm\mathbf{a}_z/H$) — известные функции времени.

Таким образом, главная ось гиросистемы в рассматриваемом случае движется относительно системы координат Z как одна из осей твердого тела с неподвижной точкой O, вращающегося по отношению к системе координат Z с мгновенной угловой скоростью (1.18). Поэтому задача о движении главной оси гиросистемы, точка подвеса которой перемещается в пространстве с произвольным заданным абсолютным ускорением $\mathbf{w}$, относительно системы координат Z, вращающейся с произвольной заданной абсолютной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^{\circ}$, при выполнении условий $\mathbf{l}_\eta=-l\mathbf{i}_k$, $\mathbf{M}_0=0$, $H=\mathrm{const}$ сводится к задаче Дарбу определения углового положения твердого тела по его заданной угловой скорости, определяемой формулой (1.18).

3. Как и в п. 2, будем считать, что вектор $\mathbf{H}$ жестко связан с гирорамой и направлен по оси OY_k. Уравнение движения гирорамы относительно системы координат Z получается из уравнения (1.10) и соотношения (1.12), если положить в них

$$\lambda=\varkappa,\qquad \omega_k=\Omega_k,\qquad \mathbf{M}_{0\eta}=\mathbf{M}_{0Y},\qquad \mathbf{l}_\eta=\mathbf{l}_Y \tag{1.19}$$

где $\varkappa$ — кватернион, характеризующий ориентацию гирорамы относительно системы координат Z, Ω_k — проекция абсолютной угловой скорости гирорамы на ось OY_k.

Направим ось OZ_3 системы координат Z по геоцентрической вертикали. Будем считать, что центр масс гиросистемы лежит на отрицательной части оси OY_3. Тогда $\mathbf{l}_Y=-l\mathbf{i}_3$ и из (1.10), (1.12) с учетом (1.19) получаем кватернионное уравнение движения гирорамы относительно системы координат Z

$$\begin{gathered}2H\varkappa^{\boldsymbol{\cdot}}+(H\boldsymbol{\omega}_z{}^{\circ}+H^{\boldsymbol{\cdot}})\circ\varkappa-lm\mathbf{a}_z\circ\varkappa\circ\mathbf{i}_3\circ\mathbf{i}_k=\\=(H\Omega_k+lma_3)\,\varkappa\circ\mathbf{i}_k-\varkappa\circ\mathbf{M}_{0Y}\circ\mathbf{i}_k\end{gathered} \tag{1.20}$$

где $a_3=a_3(\varkappa_j)$ $(j=0,1,2,3)$ — проекция кажущегося ускорения точки подвеса гиросистемы на ось OY_3, являющаяся нелинейной функцией параметров Родрига — Гамильтона $\varkappa_j$ (компонент кватерниона $\varkappa$). В случае отсутствия у гиросистемы маятниковости в уравнении (1.20) следует положить $l=0$.

Итак, получены различные кватернионные уравнения прецессионной теории гироскопов. Уравнение (1.10) вместе с соотношением (1.12) описывает прецессионное движение главной оси гиросистемы относительно системы координат Z, вращающейся с заданной абсолютной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^{\circ}$. Это уравнение записано в сопутствующей системе координат η, связанной с главной осью. Уравнения (1.13), (1.14), (1.16), (1.17) являются частными случаями уравнения (1.10) и описывают движение главной оси гиросистемы при выполнении указанных условий, накладываемых на схему гиросистемы, ее параметры и на закон движения сопутствующей системы координат вокруг главной оси гиросистемы. Уравнение (1.20) описывает прецессионное движение гирорамы относительно системы координат Z при выполнении указанных в п. 3 предположений.

Во всех полученных уравнениях кватернионы $\omega_Z{}^{\circ}$, $\mathbf{a}_Z$ являются известными функциями времени. Вид этих кватернионов зависит от выбора системы координат Z и закона движения точки подвеса гиросистемы. Величина ω_k в уравнениях (1.10), (1.13), (1.14), как уже отмечалось, может быть задана произвольно, а проекции a_k

и a_3 в уравнениях (1.14) и (1.20) являются известными нелинейными функциями параметров Родрига – Гамильтона λ_j и $\varkappa_j$ ($j=0, 1, 2, 3$) и времени. Во всех уравнениях величина H собственного кинетического момента гиросистемы полагается заданной функцией времени или функцией времени и каких-либо других параметров (в простейшем случае $H=\mathrm{const}$). Поэтому каждое из полученных кватернионных уравнений в каждом конкретном случае должно дополняться скалярным уравнением, описывающим изменение величины H. Вид этого уравнения обусловливается той или иной исследуемой конкретной схемой гиросистемы. Уравнение (1.20), кроме того, в каждом конкретном случае необходимо дополнить соотношением, описывающим изменение проекции Ω_k абсолютной угловой скорости гиросистемы на ось OY_k (направление вектора $\mathbf{H}$). Вид этого соотношения также определяется исследуемой конкретной схемой гиросистемы.

2. Рассмотрим гироскопический маятник с подвижной точкой подвеса [4–7]. Координатный трехгранник Z является в этом случае либо естественным координатным трехгранником Дарбу [4, 5], либо географическим трехгранником [6, 7], в зависимости от того, относительно какого трехгранника рассматривается движение гиромаятника. Ось OZ_3 системы координат Z необходимо направить по геоцентрической вертикали.

Кватернионное уравнение прецессионного движения гиромаятника имеет вид (1.14), где индекс k следует положить равным 3. В сопутствующей системе координат, для которой $\omega_3=-lma_3/H$, уравнение движения гиромаятника принимает вид (1.16). Это уравнение является линейным, если H и $\mathbf{M}_{0Y}$ — известные функции времени, а также в некоторых других случаях. При выполнении условий $\mathbf{M}_0=0$, $H=\mathrm{const}$ прецессионное движение гиромаятника описывается линейным кватернионным уравнением (1.17). Это уравнение эквивалентно четырем скалярным уравнениям движения гиромаятника в параметрах Родрига — Гамильтона, полученным в [8]. Для неподвижной точки подвеса гиромаятника $H=\mathrm{const}$ и $\mathbf{M}_0=0$ уравнения движения гиромаятника в параметрах Родрига — Гамильтона были получены в [9].

3. Рассмотрим движение маятниковой гирорамы в следующей постановке. Будем считать, что вектор собственного кинетического момента $\mathbf{H}$ жестко связан с гирорамой и направлен по ее оси OY_2, а ось OY_3 гирорамы в невозмущенном движении совпадает с геоцентрической вертикалью OZ_3. Кватернионное уравнение движения гирорамы относительно системы координат Z получается из уравнения (1.20), если положить в нем $k=2$:

$$2H\boldsymbol{\varkappa}^{\boldsymbol{\cdot}}+(H\boldsymbol{\omega}_z{}^{\circ}+H^{\boldsymbol{\cdot}})\circ\boldsymbol{\varkappa}+lm\mathbf{a}_z\circ\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{i}_1- \\ -(H\Omega_2+lma_3)\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{i}_2=-\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{M}_{0Y}\circ\mathbf{i}_2 \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) необходимо дополнить скалярными уравнениями для H и Ω_2, которые определим из условий существования у уравнения (3.1) определенного частного решения.

Предположим, что точка подвеса гирорамы движется по поверхности невращающейся сферы радиуса R, концентрической с земным шаром, а координатный трехгранник Z является естественным трехгранником Дарбу. В этом случае кватернионы

$$\boldsymbol{\omega}_Z{}^{\circ}=\frac{v}{R}\mathbf{i}_2+\frac{v}{\rho}\mathbf{i}_3,\quad \mathbf{a}_Z=(v^{\boldsymbol{\cdot}}+v\boldsymbol{\omega}_Z{}^{\circ})\circ\mathbf{i}_1+g\mathbf{i}_3 \tag{3.2}$$

где $v=v(t)$—скорость движения точки подвеса гирорамы относительно невращающейся сферы, $\rho=\rho(t)$ — радиус геодезической кривизны траектории точки подвеса гирорамы в том месте, где в данный момент находится точка подвеса.

Уравнения движения (3.1), (3.2) гирорамы имеют частное решение $\boldsymbol{\varkappa}=1$, при котором трехгранники Y и Z совпадают, в следующих случаях:

$$H^{\boldsymbol{\cdot}}=lma_1,\quad H(0)=lmv(0),\quad \Omega_2=H/lmR,\quad M_k=0$$

$$H=lmv,\quad \Omega_2=H/lmR=v/R,\quad M_k=0$$

$$H^{\cdot}=lma_1, \quad H(0)=lmv(0), \quad \Omega_2=lm(g-a_3)/H, \quad M_k=0$$

$$H=lmv, \quad \Omega_2=(g-a_3)/v, \quad M_k=0$$

Здесь $a_k=a_k(\varkappa_j)$ — проекция кажущегося ускорения точки подвеса гирорамы на ось OY_k, являющаяся нелинейной функцией параметров Родрига — Гамильтона $\varkappa_j$, M_k — момент внешних сил (в их состав не входят силы инерции и тяготения), действующих на гирораму, относительно оси OY_k (компонента кватерниона $\mathbf{M}_{0Y}$).

Отметим, что поскольку $M_k=0$, то указанные законы изменения H и Ω_2 могут быть обусловлены лишь переносными силами инерции, силами тяготения и внутренними по отношению к гирораме силами.

Движение гирорамы в каждом из четырех указанных случаев описывается кватернионным уравнением

$$2H\boldsymbol{\varkappa}^{\cdot}+(H^{\cdot}+H\omega_z^{\circ})\circ\boldsymbol{\varkappa}+lm\mathbf{a}_z\circ\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{i}_1-lmg\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{i}_2=\mathbf{f}_n \tag{3.3}$$

которое в зависимости от рассматриваемого случая необходимо дополнить соотношениями

$$\mathbf{f}_1=\frac{lm}{R}\left(\left[\left(\frac{H}{lm}\right)^2-v^2+R(a_3-a_3^{\circ})\right]\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{i}_2, \quad H^{\cdot}=lma_1\right. \tag{3.4}$$

$$\mathbf{f}_2=lm(a_3-a_3^{\circ})\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{i}_2, \quad H=lmv \tag{3.5}$$

$$\mathbf{f}_3=0, \quad H^{\cdot}=lma_1 \tag{3.6}$$

$$\mathbf{f}_4=0, \quad H=lmv \tag{3.7}$$

В этих соотношениях

$$a_1=[1-2(\varkappa_2^2+\varkappa_3^2)]a_1^{\circ}+2(\varkappa_1\varkappa_2+\varkappa_0\varkappa_3)a_2^{\circ}+2(\varkappa_1\varkappa_3-\varkappa_0\varkappa_2)a_3^{\circ}$$

$$a_3-a_3^{\circ}=2(\varkappa_1\varkappa_3+\varkappa_0\varkappa_2)a_1^{\circ}+2(\varkappa_2\varkappa_3-\varkappa_0\varkappa_1)a_2^{\circ}-2(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)a_3^{\circ}$$

a_i° — компоненты кватерниона $\mathbf{a}_z$: $a_1^{\circ}=v^{\cdot}$, $a_2^{\circ}=v^2/\rho$, $a_3^{\circ}=-v^2/R+g$.

Уравнения движения гирорамы (3.3) — (3.7) с учетом (3.2) принимают вид

$$v\boldsymbol{\varkappa}^{\cdot}+(v^{\cdot}+v\omega_z^{\circ})\circ(\varkappa_2\mathbf{i}_2+\varkappa_3\mathbf{i}_3)+g(\varkappa_2-\varkappa_1\mathbf{i}_3)=\mathbf{f}_n' \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{f}_1'=-\frac{h}{lm}\boldsymbol{\varkappa}^{\cdot}-\frac{1}{2lm}(h^{\cdot}+h\omega_z^{\circ})\circ\boldsymbol{\varkappa}+\\ +\left[\frac{h}{lmR}\left(v+\frac{h}{2lm}\right)+\frac{1}{2}(a_3-a_3^{\circ})\right]\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{i}_2, \quad h^{\cdot}=lm(a_1-a_1^{\circ})\end{gathered} \tag{3.9}$$

$$\mathbf{f}_2'={}^1/_2(a_3-a_3^{\circ})\boldsymbol{\varkappa}\circ\mathbf{i}_2 \tag{3.10}$$

$$\mathbf{f}_3'=-\frac{h}{lm}\boldsymbol{\varkappa}^{\cdot}-\frac{1}{2lm}(h^{\cdot}+h\omega_z^{\circ})\circ\boldsymbol{\varkappa}, \quad h^{\cdot}=lm(a_1-a_1^{\circ}) \tag{3.11}$$

$$\mathbf{f}_4'=0 \tag{3.12}$$

Уравнение (3.8) в случае (3.12) интегрируется в квадратурах. Его общее решение имеет вид

$$\begin{gathered}\varkappa_0=\varkappa_{00}+\frac{c}{R}t+cg\int\frac{1}{v^2}dt-\int\frac{x}{\rho}dt\\ \varkappa_1=\varkappa_{10}+c\int\frac{1}{\rho}dt-\frac{1}{R}\int x\,dt, \quad \varkappa_2=\frac{c}{v}, \quad \varkappa_3=\frac{x}{v}\\ x=a'\sin(\nu t+\varepsilon')+\frac{cg}{\nu}\int_0^t\frac{1}{\rho(\xi)}\sin\nu(t-\xi)\,d\xi\\ c=v_0\varkappa_{20}=\mathrm{const}, \quad \varkappa_{j0}=\varkappa_j(0), \quad v_0=v(0), \quad \nu^2=g/R\end{gathered} \tag{3.13}$$

Здесь a', ε' — постоянные интегрирования.

Формулы (3.13) существенно упрощаются, когда $c=0$. В этом случае $\varkappa_{20}=0$ (при $v_0 \neq 0$) и вектор конечного поворота, определяющий собой начальную ориентацию трехгранника Y относительно Z, должен лежать в вертикальной плоскости OZ_1Z_3.

Соотношения (3.13) будут являться решением уравнения (3.8) в остальных трех случаях (3.9), (3.10), (3.11) лишь при выполнении условий $a_1-a_1^\circ=0$, $a_3-a_3^\circ=0$, $H(0)=lmv(0)$; $a_3-a_3^\circ=0$; $a_1-a_1^\circ=0$, $H(0)=lmv(0)$, накладывающих существенные ограничения на характер движения точки подвеса гирорамы.

Полученные уравнения и соотношения представляется целесообразным использовать для исследования движения гирорамы методами нелинейной механики.

4. Рассмотрим двухроторную маятниковую гирораму [4, 6, 10, 11]. Направим ось OY_2 по вектору собственного кинетического момента $\mathbf{H}$ гирорамы, а ось OY_3 — параллельно осям кожухов гироскопов вверх. Кватернионное уравнение движения гирорамы относительно системы координат Z, ось OZ_3 которой направлена вверх по геоцентрической вертикали, имеет вид (3.1). Это уравнение необходимо дополнить скалярными уравнениями для H и Ω_2. Считая, что кожухи гироскопов кинематически связаны между собой так, что повороты осей роторов гироскопов относительно гирорамы происходят в разные стороны на одинаковые углы, имеем [4, 6, 10, 11]:

$$H^{\cdot}=lma_1+M_2, \qquad H=2B\cos\varepsilon, \qquad \Omega_2=-N/2B\sin\varepsilon \tag{4.1}$$

где 2ε — угол между осями роторов гироскопов, B — собственный кинетический момент гироскопа (гироскопы полагаются идентичными), N — разность сумм моментов заданных сил относительно осей кожухов гироскопов.

С учетом первого из уравнений (4.1) уравнения движения (3.1), (4.1) гирорамы можно записать в виде

$$2\varkappa^{\cdot}+\omega_z{}^\circ\circ\varkappa-\varkappa\circ\Omega_y=0, \qquad H^{\cdot}=lma_1+M_2, \qquad H=2B\cos\varepsilon \tag{4.2}$$

$$\Omega_1=\frac{M_3}{H}, \quad \Omega_2=-\frac{N}{2B\sin\varepsilon}, \quad \Omega_3=\frac{1}{H}(lma_2-M_1)$$

Для пространственного гирогоризонткомпаса

$$\Omega_2=H/lmR, \qquad M_k=0 \tag{4.3}$$

Поэтому его уравнения движения имеют вид уравнений (4.2), (4.3) или уравнений (3.3), (3.4), ((3.8), (3.9)), рассмотренных в п. 3.

В случае отсутствия у гирорамы маятниковости ее уравнения движения получаются из (3.1), (4.1) или (4.2) при $l=0$. Получаемые при этом уравнения являются кватернионными уравнениями движения корректируемого гирогоризонткомпаса [6]. Представляется целесообразным использовать эти уравнения для синтеза корректирующих моментов, придающих астатической гирораме свойства гирогоризонткомпаса [6]. Задача синтеза корректирующих моментов в такой постановке относится к классу кинематических задач ориентации во вращающихся системах координат [2], однако эта задача сложнее задач, рассмотренных в [2].

В заключение отметим, что полученные кватернионные уравнения могут оказаться удобными для решения некоторых задач идентификации и фильтрации ошибок гиросистем и других задач, связанных с решением на ЭВМ уравнений ошибок гиросистем, поскольку они, в отличие от уравнений в углах Эйлера — Крылова, не содержат тригонометрических функций, снижающих эффективность использования ЭВМ, и имеют симметричную и близкую в ряде случаев к линейной структуру.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
2. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
3. *Челноков Ю. Н.* Об одной форме уравнений инерциальной навигации.– Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 20–28.
4. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
5. *Ишлинский А. Ю.* К теории гироскопического маятника.– ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
6. *Ройтенберг Я. Н.* Гироскопы. М.: Наука, 1966. 400 с.
7. *Сайдов П. И., Слив Э. И., Чертков Р. И.* Вопросы прикладной теории гироскопов. Л.: Судпромгиз, 1961. 427 с.
8. *Челноков Ю. Н.* К теории гироскопического маятника.– ПММ, 1980, т. 44, вып. 6, с. 986–993.
9. *Кошляков В. Н.* О применении параметров Родрига – Гамильтона и Кейли – Клейна в прикладной теории гироскопов.– ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, с. 729–733.
10. *Ишлинский А. Ю.* К теории гирогоризонткомпаса.– ПММ, 1956, т. 20, вып. 4, с. 487–499.
11. *Кошляков В. Н.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1972. 344 с.

Саратов

Поступила в редакцию
20.IV.1983