МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1984

УДК 531.35

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ВРЕМЕНИ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИСТЕМЫ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛ

ШЕВЧЕНКО К. Н.

В публикуемой статье исследуется оптимальное по времени движение и управление движением точки – спуск и подъем – под раздельным и совместным действием системы двух центральных сил – силы притяжения Ньютона и силы отталкивания. Оптимальными по величине траекториями этих движений являются брахистохроны. Расширение семейства брахистохрон представляет теоретический и практический интерес. Известно, что для центральной силы брахистохрона существует, однако уравнение ее в общем случае представляется в квадратуре, что затрудняет исследование и применение ее в теории оптимального управления. Для одной силы это затруднение можно обойти специальным выбором в законе сохранения энергии константы. Для системы сил определение константы осуществляется приближенно – с использованием предельных значений квадратур.

Получение брахистохроны для одной силы в аналитической форме и приближенное выражение экстремали для системы сил позволяют исследовать необходимые и достаточные условия существования минимума временного функционала. Установлена вариационная взаимосвязь сил системы. Результаты иллюстрируются примерами.

1. В ньютоновском поле выражение для относительной силы, действующей на единичную массу, имеет вид

$$F=-1/\rho^2 \tag{1.1}$$

Здесь сила Ньютона отнесена к величине a/r_0^2, где $a=gR^2$, $\rho=r/r_0$, R – радиус земной поверхности, $r_0=R+h$ (h – расстояние точки до поверхности земли).

С целью получения брахистохроны в аналитической форме примем начальную скорость точки равной второй космической. В этом случае закон сохранения энергии примет вид

$$v^2/2-1/\rho=0 \tag{1.2}$$

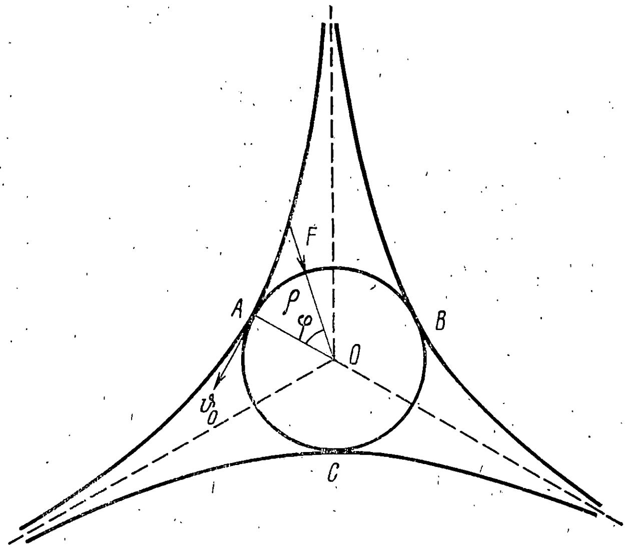
где v – безразмерная скорость, отнесенная к величине первой космической скорости $\sqrt{a/r_0}$. Временной функционал запишем в форме

$$T=\int_A^B \frac{ds}{v} \tag{1.3}$$

Ставится задача нахождения минимума функционала (1.3), при значении v, заданном (1.2). Функционал (1.3) в полярных координатах примет вид

$$T=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi,\quad \rho'=d\rho/d\varphi \tag{1.4}$$

Первый интеграл уравнения Эйлера для функционала (1.4) равен $\rho^2\sqrt{\rho}/\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=c_1$ (c_1 – произвольная константа). Разрешая это уравнение



относительно ρ' и интегрируя, получим $\rho = c_1[\cos {}^3/_2(\varphi + c_2)]^{-2/3}$. Без нарушения общности решения задачи положим $c_2 = 0$. Константу c_1 определим из краевого условия $\rho = 1$ при $\varphi = 0$. Окончательно экстремаль примет вид

$$\rho = (\cos {}^3/_2\varphi)^{-2/3} \tag{1.5}$$

Вид кривой изображен на фиг. 1. Кривая (1.5) состоит из трех симметричных относительно центра ветвей, каждая из которых расположена в угле раствора $^2/_3\pi$.

Постулируем, что кривая (1.5) является брахистохроной силы (1.1). Теорему о достаточном условии существования минимума функционала (1.4) докажем ниже. Для сокращения вычислений введем обозначение $^3/_2\varphi = \psi$. Кривизна кривой (1.5) равна $k = {}^1/_2 \cos^{5/3}\psi$.

Движение точки по брахистохроне является несвободным. Найдем выражение нормальной реакции N брахистохроны на точку согласно теореме Эйлера [1, с. 396]. Теорема формулируется следующим образом. При движении точки по брахистохроне нормальная реакция направлена по главной нормали, равна по модулю и противоположна по направлению удвоенной нормальной составляющей действующей силы

$$N = -2F_n \tag{1.6}$$

Уравнение движения точки в естественных координатах по кривой с кривизной $k = {}^1/_2 \cos^{5/3}\psi$ имеет вид

$$N + F_n = kv^2 \tag{1.7}$$

Легко показать, что направление касательной к кривой (1.5) по отношению к радиус-вектору точки определяется углом $\beta = {}^1/_2\pi - \psi$ ($\beta = \operatorname{arctg} \rho/\rho'$). Тогда направление главной нормали определяется углом ψ. Проекция ньютоновской силы (1.1) на главную нормаль равна

$$F_n = -\rho^{-2}\cos\psi = -\cos^{7/3}\psi \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8), кривизну k и v^2 (1.2) в (1.7), получим $N = 2\cos^{7/3}\psi = -2F_n$. Реакция N обеспечивает нахождение точки на траектории быстродействия — брахистохроне.

Найдем формулу для подсчета минимального времени скатывания точки по брахистохроне (1.5).

Безразмерное время движения от точки ψ_0 до точки ψ_1, полученное отношением реального времени к единице измерения, определяется согласно (1.3) интегралом $t=\int ds/v$. В подынтегральном выражении ds вычисляется согласно (1.5), а v — согласно (1.2). Окончательно получим

$$t=\sqrt{2}/3(\operatorname{tg}\psi_1-\operatorname{tg}\psi_0) \tag{1.9}$$

Управление спуском точки, находящейся в зоне ньютоновской силы притяжения, осуществляется следующим образом. Фиксируется расстояние до точки ρ_1, определяется угол ψ_1 согласно (1.5). Параметрами начальной корректировки управляемой точки являются угол β_1+v_1 и модуль скорости. Угол θ_1 образован начальным направлением скорости точки и радиус-вектором ρ_1. Модуль скорости корректируется в пределах от начального значения скорости до величины, определяемой из (1.2), (1.5). Время посадки точки подсчитывается согласно (1.9), где необходимо положить $\psi_0=0$. Точка посадки с координатами (1.0) определяется согласно $^3/_2\varphi=\psi$ углом φ_1. При этом скорость выхода точки на окружность равна второй космической. В дальнейшем требуется корректировка величины скорости до первой космической.

2. Определим центральную силу, при действии которой имеет место свободное движение точки по траектории (1.5). Для этого воспользуемся системой дифференциальных уравнений для центральной силы в полярных координатах

$$r^2\dot{\varphi}=c,\quad \frac{v_0^2}{\rho^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\right]=F,\quad c=R\sqrt{gR_0^2}\,v_0 \tag{2.1}$$

Здесь v_0 — безразмерная начальная скорость точки. После подстановки в (2.1) выражения ρ согласно (1.5) и v_0 согласно (1.2) получим значение центральной силы в безразмерной форме

$$F=F_0=1 \tag{2.2}$$

Сила (2.2) является потенциальной, центральной, постоянной по величине, положительной (отталкивающей). В природе силы F не наблюдается. Но ее можно смоделировать техническими средствами, например применяя реактивный двигатель. Для силы (2.2) поставим экстремальную задачу — найти минимум функционала (1.3) при законе сохранения энергии $^1/_2v^2-\rho=0$. Функционал будет иметь вид

$$T=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}{\sqrt{\rho}}\,d\varphi \tag{2.3}$$

первый интеграл уравнения Эйлера равен $\rho\sqrt{\rho}/\sqrt{\rho^2+\rho'^2}=c_1$, где c_1 — произвольная константа. Решая это уравнение относительно ρ' и интегрируя, получим $\rho=c_1/\cos^2{}^1/_2(\varphi+c_2)$. Как и в предыдущей задаче, положим $c_1=1$, $c_2=0$. Окончательно экстремаль примет вид параболы

$$\rho=\cos^{-2}{}^1/_2\varphi \tag{2.4}$$

Угол между касательной к траектории (2.4) и радиус-вектором равен $\beta=^1/_2(\pi-\varphi)$. Как и прежде, постулируем, что парабола (2.4) для силы (2.2) при законе сохранения $^1/_2v^2-\rho=0$ является брахистохроной.

Аналогично предыдущей задаче доказывается теорема Эйлера о нормальной реакции

$$N=2\cos{}^1/_2\varphi=-2F_n \tag{2.5}$$

Формула для подсчета минимального времени подъема точки по брахистохроне (2.4) имеет вид

$$t=\int_0^{\varphi}\frac{ds}{v} \tag{2.6}$$

После интегрирования получим $t=\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\varphi$.

Пример 1. Задача о выводе точки в заданное положение. Фиксируется расстояние до заданной точки ρ_1. По значению ρ_1 из формулы (2.4) находим φ_1. По φ_1 определяется точка запуска с координатами (1.0). По формуле $t=\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\varphi$ находим время движения до заданной точки.

Пример 2. Коррекция круговой орбиты. Требуется перевести точку с орбиты $\rho=1$ на орбиту $\rho_2>1$ за минимальное время. Согласно заданному ρ_2, по (2.4) находим φ_2. Далее по $t=\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,{}^1/_2\varphi$ находим время перехода. При этом требуется произвести две коррекции скорости. На исходной траектории – на вторую космическую, и при достижении ρ_2 произвести коррекцию направления скорости по касательной к окружности и величину скорости на первую космическую для окружности $\rho=\rho_2$.

Из полученных результатов следует, что для ньютоновской силы (1.1) брахистохроной является кривая (1.5), для получения которой при свободном движении точки требуется приложить центральную силу $F=F_0=1$, для которой брахистохроной является парабола (2.4). Для получения этой параболы при свободном движении точки требуется приложить ньютоновскую силу (1.3). Таким образом, система сил $F=-1/\rho^2$ и $F=F_0=1$ в процессе оптимизации является замкнутой системой и обладает свойством взаимности.

3. Приведем доказательство теоремы существования минимума функционала в задаче, рассмотренной в п. 2. Доказательство для задачи п. 1 аналогично. Требуется доказать, что время движения точки по параболе (2.4) по сравнению с близко лежащей экстремальной кривой минимально.

При доказательстве теоремы о минимуме функционала (2.3) используется метод вариационного исчисления [2]. Необходимым и достаточным условием существования минимума функционала являются следующие требования: получение из уравнения Эйлера семейства экстремалей; выполнение вдоль экстремали условия Лежандра $F_{y'y'}>0$; выполнение вдоль экстремали при $F_{y'y}>0$ условия Якоби, состоящего в построении однопараметрического семейства экстремалей, окружающих и не пересекающих основную экстремаль.

Первое требование выполнено. Экстремалью является парабола (2.5). Второе требование также удовлетворяется

$$F_{\rho'\rho'}=\rho\sqrt{\rho}/\sqrt{(\rho^2+\rho'^2)^3}>0 \tag{3.1}$$

Для выполнения третьего условия построим однопараметрическое поле экстремалей из (2.4), полагая $C_1=1$, $C_2=\alpha$ (α – малый параметр). Получим

$$\rho=1/\cos^2{}^1/_2(\varphi+\alpha) \qquad (\alpha\geqslant 0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi-\alpha) \tag{3.2}$$

Теорема о минимуме функционала (2.3) доказана. Таким образом кривые (1.5) и (2.5) являются брахистохронами, траекториями быстродействия.

4. Полученные в предыдущих пунктах аналитические решения оптимального спуска и подъема точки позволяют распространить этот метод на систему сил. Посадочная скорость точки под действием ньютоновской силы равна второй космической. Для уменьшения посадочной скорости требуется применить силу торможения, в качестве которой можно использовать постоянную по величине центральную силу отталкивания (2.2). При подъеме точки под действием центральной силы отталкивания требуется учесть влияние тормозящей ньютоновской силы. Решение задач строим без учета влияния атмосферы; краевые условия задаются на поверхности земли.

Сумма ньютоновской и отталкивающей сил также будет потенциальной силой. Следовательно, для этой системы существует траектория быстродействия – брахистохрона. Но получение брахистохроны в аналитической форме не представляется возможным. В общем случае экстремаль выражается в квадратуре.

Закон сохранения энергии системы записывается в форме

$${}^1/_2v^2-1/\rho-\alpha\rho=E \tag{4.1}$$

где E — константа, определяемая из начальных условий для скорости, α — параметр ($\alpha \geqslant 1$). Рассмотрим задачи спуска и подъема точки.

1. В случае спуска точки на земную поверхность с нулевой скоростью следует в законе сохранения (4.1) положить $\alpha=1$. Для определения константы E подставим в (4.1) скорость приземления, равную нулю. Окончательно закон сохранения для этой задачи примет вид

$$^1/_2 v^2 - 1/\rho - \rho = -2 \tag{4.2}$$

Временной функционал запишется в виде

$$T = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\sqrt{\rho}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\, d\varphi}{(\rho-1)} \tag{4.3}$$

Первый интеграл уравнения Эйлера функционала (4.3) равен (C_1 — произвольная константа):

$$\rho^2\sqrt{\rho}/[(\rho-1)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}] = C_1 \tag{4.4}$$

Разрешая уравнение (4.4) относительно ρ' интегрируя, получим квадратуру экстремали

$$C_1 \int \frac{(\rho-1)\, d\rho}{\rho\sqrt{\rho^3 - C_1^2(\rho-1)^2}} = \varphi + C_2 \tag{4.5}$$

Константы C_1, C_2 определяются из краевых условий экстремали. В аналитической форме экстремаль (4.5) не представима.

Значения констант найдем из рассмотрения двух приближенных предельных случаев квадратуры (4.5): при ρ, стремящемся к бесконечности и близком к единице. Разделим числитель и знаменатель подынтегрального выражения (4.5) на ρ. При достаточно большом ρ ($\rho \gg 1$) приближенное значение интеграла имеет аналитическую форму, известную из задачи п. 2; приближенно экстремаль примет вид параболы и, следовательно, константу C_1 согласно (2.5) можно принять равной единице. Для определения константы C_2 рассмотрим предельный случай, когда ρ близко к единице. В этом случае в подкоренном выражении (4.5) можно пренебречь членом $(\rho-1)^2$ по сравнению с ρ^3. Приближенное значение (4.5) примет вид

$$\int \frac{(\rho-1)\, d\rho}{\rho^{5/2}} = \varphi + C_2$$

После интегрирования получим $2\rho^{-1/2}[1-(3\rho)^{-1}] = C_2 - \varphi$. Из краевого условия при $\varphi=0$, $\rho=1$ находим $C_2 = {}^4/_3$ и приближенное уравнение экстремали при ρ, близком единице, примет вид

$$2\rho^{-1/2}[1-(3\rho)^{-1}] = {}^4/_3 - \varphi \tag{4.6}$$

Полученное значение траектории (4.6) достаточно точно решает задачу спуска для значения ρ в пределах $1 \leqslant \rho < 2$. Задача управления спуском по оптимальной траектории (4.6) со скоростью

$$v = \sqrt{2/\rho}\,(\rho-1) \tag{4.7}$$

имеет два подслучая.

Свободная точка, подлежащая управлению, опускается под действием ньютоновской силы (1.1). Начальная скорость ее определяется согласно (1.2).

Точка, подлежащая управлению, находится на космической круговой орбите $\rho_1 = 1+\mu$, $1 \leqslant \mu < 0{,}7$. Начальная скорость точки равна $v_1 = (\sqrt{1+\mu_1})^{-1}$.

2. Рассмотрим задачу оптимального по времени подъема точки с начальной нулевой скоростью. Для отрыва точки от поверхности земли сила отталкивания должна превышать ньютоновское притяжение. Следовательно, параметр α в (4.1) должен быть больше единицы. В этой задаче различаются также два подслучая.

В первом имеет место простой подъем точки. На параметр α накладывается одно условие $\alpha>1$. Для определенности положим $\alpha=2$. Тогда закон сохранения (4.1) с учетом задания нулевой начальной скорости можно записать так:

$$^1/_2 v^r - 1/\rho - 2\rho = -3 \tag{4.8}$$

Временной функционал (1.3) примет вид

$$T=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\sqrt{\rho}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi}{\sqrt{2\rho^2-3\rho+1}} \tag{4.9}$$

Первый интеграл уравнения Эйлера функционала (4.9) равен (C_1 – произвольная константа): $\rho^2\sqrt{\rho}/(\sqrt{2\rho^2-3\rho+1}\sqrt{\rho^2+\rho'^2})=C_1$.

Разрешая уравнение первого интеграла относительно ρ' и интегрируя, получим квадратуру экстремали (C_2 – произвольная константа):

$$C_1\int \frac{\sqrt{2\rho^2-3\rho+1}\,d\rho}{\rho\sqrt{\rho^3-C_1^2(2\rho^2-3\rho+1)}}=\varphi+C_2 \tag{4.10}$$

Константы C_1 и C_2 определим, как и в предыдущей задаче, на предельных участках экстремали при $\rho\gg1$ и при ρ, близком к единице. При $\rho\gg1$, деля числитель и знаменатель на ρ и пренебрегая членами $3/\rho$ и $1/\rho^2$ по сравнению с 2, получим приближенное значение экстремали (4.10) в виде

$$C_1\int \frac{\sqrt{2}\,d\rho}{\rho\sqrt{\rho-2C_1^2}}=\varphi+C_2$$

Левая часть полученного уравнения интегрируется в аналитической форме. Приближенная форма экстремали будет парабола (2.4), известная из решения задачи второго параграфа. Это дает основание положить $C_1^2=$ $=^1/_2$. Тогда квадратура экстремали примет вид

$$\int \frac{\sqrt{\rho^2-^3/_2\rho+^1/_2}\,d\rho}{\rho\sqrt{\rho^3-(\rho^2-^3/_2\rho+^1/_2)}}=\varphi+C_2 \tag{4.11}$$

Константу C_2 определим из краевого условия

$$\rho=1 \text{ при } \varphi=0 \tag{4.12}$$

Исследуем квадратуру (4.11) вблизи $\rho=1$. Положим $\rho=1+\mu$, подставим это значение в (4.11). Пренебрегая в подынтегральном выражении в числителе μ^2 по сравнению с $\mu/2$ и в знаменателе $\mu/2$ по сравнению с ρ^3, получим

$$\int \frac{\sqrt{\mu}\,d\mu}{\sqrt{2}(1+\mu)^{5/2}}=\varphi+C_2$$

Заменой переменной $\mu=\theta^2$ левая часть полученного уравнения интегрируется. В результате будем иметь $\sqrt{2}(\rho-1)^{3/2}\rho^{-3/2}/3=\varphi+C_2$. Из краевого условия (4.12) найдем $C_2=0$.

Решая полученное уравнение относительно ρ, определим экстремаль вблизи $\rho=1$ в виде $\rho=[1-\sigma\varphi^{2/3}]^{-1}$, $\sigma=(3\sqrt{2})^{2/3}$.

На среднем участке значений ρ экстремаль определяется квадратурой

$$\int \frac{\sqrt{\rho^2-{}^3/_2\rho+{}^1/_2}\,d\rho}{\rho\sqrt{\rho^3-(\rho^2-{}^3/_2\rho+{}^1/_2)}}=\varphi \tag{4.13}$$

Для построения приближенного аналитического выражения экстремали при средних значениях ρ необходимо воспользоваться численным интегрированием.

Во втором подслучае ставится задача выведения точки на заданную космическую окружность $\rho=1+\mu$ с первой космической скоростью, равной $v=(1+\mu)^{-1/2}$, $\mu=h/R$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960, 515 с.
2. *Лаврентьев М. Л., Люстерник Л. А.* Курс вариационного исчисления.–М.–Л.: Гостехтеоретиздат, 1938. 192 с.

Москва

Поступила в редакцию 1.IV.1983