МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1984

УДК 531.384

О СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ

КРЕМЕНТУЛО В. В.

В рамках аналитической теории управления [1, 2] дано решение задачи об оптимальной (в определенном смысле) стабилизации перманентного вращения тяжелого твердого тела, установленного на вибрирующем основании. Стабилизация осуществляется при помощи уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе, управляемого тремя моментами. Полученные в явном виде управляющие моменты обеспечивают асимптотическую устойчивость рассматриваемого вращательного движения тела по всем его фазовым координатам и минимум некоторого функционала интегрального типа.

1. Пусть тяжелое твердое тело вращается вокруг точки O, закрепленной на горизонтальном стенде, который совершает вертикальные колебания по закону $\xi=\xi_0 \sin \beta t$.

Введем две системы координат: $OX_1X_2X_3$, связанную со стендом, причем оси OX_1, OX_2 лежат в плоскости стенда, а ось OX_3 направлена по вертикали; $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с телом и направленную по его главным осям инерции.

Предположим, что на теле установлен уравновешенный гироскоп в кардановом подвесе таким образом, что ось его внешнего кольца направлена по главной оси инерции тела Ox_3, а точка подвеса совпадает с точкой подвеса тела O. Гироскоп управляется при помощи трех двигателей, создающих моменты относительно осей внешнего и внутреннего колец и оси ротора.

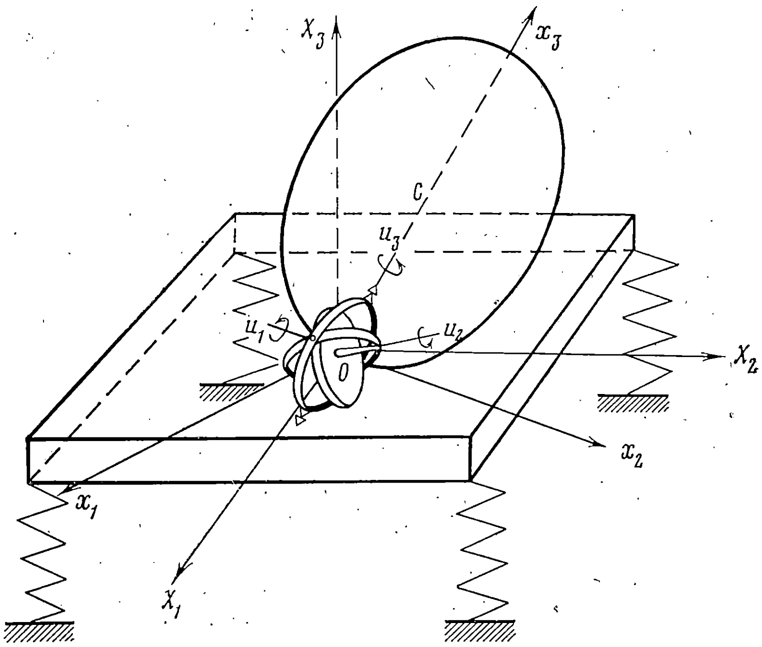
Введем следующие обозначения: A_1, A_2, A_3 — моменты инерции тела относительно осей $Ox_1x_2x_3$, P — вес тела, $OC=x_C$ — расстояние от точки O до центра масс тела, p_1, p_2, p_3 — проекции мгновенной угловой скорости тела на оси $Ox_1x_2x_3$, α_{ik} $(i, k - 1, 2, 3)$ — направляющие косинусы углов между осями $OX_1X_2X_3$ и $Ox_1x_2x_3$, u_1, u_2, u_3 — управляющие моменты, создаваемые двигателями, α, δ — углы поворота, соответственно, внешнего и внутреннего колец относительно тела.

Исходные уравнения движения рассматриваемой механической системы после соответствующих преобразований [3] можно привести к виду

$$A_1p_1^{\bullet}=(A_2-A_3)p_2p_3+(P-Pg^{-1}\xi_0\beta^2 \sin \beta t)x_C\alpha_{32}-$$
$$-u_1 \cos \alpha \sec \delta-u_2 \sin \alpha+u_3 \cos \alpha \operatorname{tg} \delta \tag{1.1}$$
$$A_2p_2^{\bullet}=(A_3-A_1)p_3p_1-(P-Pg^{-1}\xi_0\beta^2 \sin \beta t)x_C\alpha_{31}+$$
$$+u_1 \sin \alpha \sec \delta-u_2 \cos \alpha-u_3 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta$$
$$A_3p_3^{\bullet}=(A_1-A_2)p_1p_2-u_3$$

$$\alpha_{i1}^{\bullet}=p_3\alpha_{i2}-p_2\alpha_{i3} \quad {\scriptstyle (i=1,\,2,\,3)}. \quad (1\,2\,3) \tag{1.2}$$

$$\alpha^{\bullet}=F_\alpha(p_1, p_2, p_3; \alpha, \delta), \quad \delta^{\bullet}=F_\delta(p_1, p_2, p_3; \alpha, \delta) \tag{1.3}$$



Уравнения (1.3), представляющие собой уравнения относительного движения оси ротора гироскопа (точные или приближенные), явно не выписаны, так как в дальнейших исследованиях не играют существенной роли.

Ограничиваясь случаем симметричного твердого тела ($A_1=A_2=A$), перейдем [3] от переменных p_i, α_{ik}, α, δ к переменным q_i, β_{ik}, α', δ', связанным с полуподвижными осями $Ox_1'x_2'x_3'$, не участвующими в собственном вращении тела вокруг оси Ox_3 по углу φ. Тогда вместо системы уравнений (1.1)—(1.3) получим

$$
\begin{gathered}
Aq_1^{\cdot}=(A-A_3)q_2q_3-A_3\varphi^{\cdot}q_2+(P-Pg^{-1}\xi_0\beta^2\sin\beta t)x_C\beta_{32}-\\
-u_1\cos\alpha'\sec\delta'-u_2\sin\alpha'+u_3\cos\alpha'\operatorname{tg}\delta'\\
Aq_2^{\cdot}=(A_3-A)q_1q_3+A_3\varphi^{\cdot}q_1-(P-Pg^{-1}\xi_0\beta^2\sin\beta t)x_C\beta_{31}+\\
+u_1\sin\alpha'\sec\delta'-u_2\cos\alpha'-u_3\sin\alpha'\operatorname{tg}\delta'
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

$$
A_3q_3^{\cdot}=-u_3,\quad \beta_{i1}^{\cdot}=q_3\beta_{i2}-q_2\beta_{i3}\quad {\scriptstyle(i=1,\,2,\,3)}\quad (1\;2\;3) \tag{1.5}
$$

$$
\alpha^{\cdot\prime}=F_{\alpha'}(q_1,\,q_2,\,q_3;\,\alpha',\,\delta'),\quad \delta^{\cdot\prime}=F_{\delta'}(q_1,\,q_2,\,q_3;\,\alpha',\,\delta')\quad (\alpha'=\alpha-\varphi,\ \delta'=\delta) \tag{1.6}
$$

Уравнения (1.4)—(1.6) допускают частное решение

$$
\varphi^{\cdot}=\omega,\quad q_i=0,\quad \beta_{ik}=1\ {\scriptstyle(i=k)},\quad \beta_{ik}=0\ {\scriptstyle(i\neq k)}\ {\scriptstyle(i,\,k=1,\,2,\,3)},\quad \alpha'=\delta'=0 \tag{1.7}
$$

Примем движение (1.7) в качестве невозмущенного и составим на основании (1.4)—(1.6) уравнения возмущенного движения, сохраняя за возмущениями обозначения исходных переменных.

Эти уравнения имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
q_1^{\cdot}=-\omega'q_2+(a-b\sin\beta t)\beta_{32}+w_1+Q_1\\
q_2^{\cdot}=\omega'q_1-(a-b\sin\beta t)\beta_{31}+w_2+Q_2,\quad q_3^{\cdot}=w_3\\
\beta_{ii}^{\cdot}=B_{ii},\quad \beta_{31}^{\cdot}=-q_2+B_{31},\quad \beta_{32}^{\cdot}=q_1+B_{32}\quad (1\;2\;3)\\
\alpha^{\cdot\prime}=\Phi_{\alpha'}(q_1,\,q_2,\,q_3;\,\alpha',\,\delta'),\quad \delta^{\cdot\prime}=\Phi_{\delta'}(q_1,\,q_2,\,q_3;\,\alpha',\,\delta')
\end{gathered}
\tag{1.8}
$$

Здесь Q_1, Q_2 означают члены порядка малости, не ниже второго относительно q_i, u_i, α', δ', обращающиеся в нуль при $q_i=0$, $\beta_{ik}=0$ $(i, k=1, 2, 3)$; w_i — новые управляющие моменты

$$A_i w_i = -u_i \quad {\scriptstyle (i=1,2,3)} \tag{1.9}$$

Введены обозначения

$$\omega'=A_3A^{-1}\omega, \quad a=Px_cA^{-1}, \quad b=Pg^{-1}\xi_0\beta^2x_cA^{-1}$$
$$B_{i1}=q_3\beta_{i2}-q_2\beta_{i3} \quad {\scriptstyle (i=1,2,3)} \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.10}$$

Поставим следующую задачу: определить управления w_i в виде функций фазовых координат тела q_i, β_{ik}, таких, чтобы нулевое решение системы уравнений (1.8)

$$q_i=0, \quad \beta_{ik}=0, \quad \alpha'=\delta'=0 \quad {\scriptstyle (i, k=1,2,3)} \tag{1.11}$$

было асимптотически устойчивым по всем q_i, β_{ik} и при этом выполнялось условие минимума функционала

$$\int_0^\infty \Omega(q_1, q_2, q_3; \beta_{11}, \ldots, \beta_{33}; w_1, w_2, w_3; \alpha', \delta')\, dt \tag{1.12}$$

где Ω — некоторая определенно-положительная по q_i, β_{ik} функция, которая будет найдена в процессе решения задачи.

2. Для решения поставленной задачи рассмотрим сначала приближенную систему уравнений по переменным q_i, β_{ik}:

$$q_1^{\bullet}=-\omega' q_2+(a-b\sin\beta t)\beta_{32}+w_1$$
$$q_2^{\bullet}=\omega' q_1-(a-b\sin\beta t)\beta_{31}+w_2, \quad q_3^{\bullet}=w_3$$
$$\beta_{ii}^{\bullet}=B_{ii}, \quad \beta_{31}^{\bullet}=-q_2+B_{31}, \quad \beta_{32}^{\bullet}=q_1+B_{32} \quad {\scriptstyle (i=1,2,3)} \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.1}$$

и изучим возможность оптимальной стабилизации нулевого решения уравнений (2.1):

$$q_i=0, \quad \beta_{ik}=0 \quad {\scriptstyle (i, k=1,2,3)} \tag{2.2}$$

Подынтегральная функция Ω_1 разыскивается в виде [3]

$$\Omega_1=F_1(q_1, q_2, q_3, t)+F_2(\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots \beta_{33}, t)+\sum n_i w_i^2+\Lambda$$
$$F_1(q_1, q_2, q_3, t)=\sum e_{ik}(t)\, q_i q_k \tag{2.3}$$

Здесь F_1 — определенно-положительная квадратичная форма скоростей q_i с периодическими коэффициентами, F_2 — определенно-положительная квадратичная форма β_{ik} с периодическими коэффициентами; через Λ обозначены члены выше второго порядка малости.

Рассматривая постоянные $k_i>0$, $m_i>0$, $n_i>0$ $(i=1, 2, 3)$ в качестве исходных параметров, возьмем оптимальную функцию Ляпунова в виде

$$2V^\circ=\sum k_l(\beta_{l1}^2+\beta_{l2}^2+\beta_{l3}^2)+\sum m_i q_i^2+2q_1\sum a_{ik}(t)\beta_{ik}+$$
$$+2q_2\sum b_{ik}(t)\beta_{ik}+2q_3\sum c_{ik}(t)\beta_{ik} \tag{2.4}$$

На основании [1] приходим к уравнению в частных производных для V°:

$$\frac{\partial V^\circ}{\partial t}-\sum\frac{1}{4n_i}\left(\frac{\partial V^\circ}{\partial q_i}\right)^2+\frac{\partial V^\circ}{\partial q_1}[-\omega' q_2+(a-b\sin\beta t)\beta_{32}]+$$

$$+\frac{\partial V^\circ}{\partial q_2}[\omega' q_1-(a-b\sin\beta t)\beta_{31}]+ \tag{2.5}$$

$$+\left(\frac{\partial V^\circ}{\partial\beta_{32}}-\frac{\partial V^\circ}{\partial\beta_{23}}\right)q_1+\left(\frac{\partial V^\circ}{\partial\beta_{13}}-\frac{\partial V^\circ}{\partial\beta_{31}}\right)q_2+\left(\frac{\partial V^\circ}{\partial\beta_{21}}-\frac{\partial V^\circ}{\partial\beta_{12}}\right)q_3+$$

$$+\sum\frac{\partial V^\circ}{\partial\beta_{ik}}B_{ik}+F_1(q_1, q_2, q_3, t)+F_2(\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{33}, t)+\Lambda=0$$

Неизвестные коэффициенты a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} — периодические функции времени или постоянные — являются решениями систем линейных дифференциальных уравнений, аналогичных ранее изученным [3]. После несложных вычислений имеем

$$\begin{gathered}
a_{ii}=b_{ii}=c_{ii}=0 \quad (i=1,2,3)\\
a_{12}=b_{12}=a_{21}=b_{21}=0,\quad c_{12}=-k_1 d_3^{-1}\\
c_{21}=k_2 d_3^{-1},\quad a_{13}=\mu_1 k_1\omega',\quad b_{13}=\mu_1 k_1 d_1\\
a_{23}=-\mu_1 k_2 d_2,\quad b_{23}=\mu_1 k_2\omega',\quad c_{13}=c_{23}=c_{31}=c_{32}=0\\
(\mu_1=1/(d_1 d_2+\omega'^2),\quad d_i=m_i/2n_i)
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Функции a_{3j}, b_{3j} $(j=1,2)$ получаются в виде

$$\begin{gathered}
a_{3j}=K_{3j}\cos\beta t+L_{3j}\sin\beta t+a_{3j}^*\\
b_{3j}=M_{3j}\cos\beta t+N_{3j}\sin\beta t+b_{3j}^* \quad (j=1,2)
\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}
a_{31}^*=-\mu_1(m_2 a+k_3)\omega',\quad b_{31}^*=-\mu_1(m_2 a+k_3)d_1\\
a_{32}^*=\mu_1(m_1 a+k_3)d_2,\quad b_{32}^*=-\mu_1(m_1 a+k_3)\omega'\\
K_{31}=\mu m_2 b\beta\omega'(d_1+d_2)\\
L_{31}=\mu m_2 b\omega'(d_1 d_2+\omega'^2-\beta^2)\\
M_{31}=\mu m_2 b\beta(d_1^2-\omega'^2+\beta^2)\\
N_{31}=\mu m_2 b(d_1^2 d_2+d_1\omega'^2+d_2\beta^2)\\
K_{32}=-\mu m_1 b\beta(d_2^2-\omega'^2+\beta^2)\\
L_{32}=-\mu m_1 b(d_1 d_2^2+d_1\beta^2+d_2\omega'^2)\\
M_{32}=\mu m_1 b\beta\omega'(d_1+d_2)\\
N_{32}=\mu m_1 b\omega'(d_1 d_2+\omega'^2-\beta^2),\quad \mu=\Delta^{-1}\\
\Delta=\begin{vmatrix}-d_1 & \beta & \omega' & 0\\ -\beta & -d_1 & 0 & \omega'\\ -\omega' & 0 & -d_2 & \beta\\ 0 & -\omega' & -\beta & -d_2\end{vmatrix}
\end{gathered} \tag{2.8}$$

Для коэффициентов квадратичной формы F_1 (2.3) имеем

$$\begin{gathered}
e_{11}=d_1^2 n_1+a_{23}-a_{32},\quad e_{22}=d_2^2 n_2+b_{31}-b_{13}\\
e_{33}=d_3^2 n_3+c_{12}-c_{21}\\
2e_{12}=(m_1-m_2)\omega'+b_{23}-b_{32}+a_{31}-a_{13}\\
2e_{13}=c_{23}-c_{32}+a_{12}-a_{21}\\
2e_{23}=c_{31}-c_{13}+b_{12}-b_{21}
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Из полученных решений (2.6)—(2.9) видно, что при достаточно больших d_i функции V° (2.4) и F_1 (2.3) являются определенно-положительными, при этом функция V° допускает бесконечно малый высший предел. Форму F_2 из (2.3) следует взять в виде

$$F_2(\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{33}, t) = \frac{1}{4n_1}\left(\sum a_{ik}\beta_{ik}\right)^2 + \frac{1}{4n_2}\left(\sum b_{ik}\beta_{ik}\right)^2 + \\ + \frac{1}{4n_3}\left(\sum c_{ik}\beta_{ik}\right)^2 - (a-b\sin\beta t)\beta_{32}\left(\sum a_{ik}\beta_{ik}\right) + \\ + (a-b\sin\beta t)\beta_{31}\left(\sum b_{ik}\beta_{ik}\right) \tag{2.10}$$

Для выяснения условий знакоопределенности формы (2.10) положим для простоты

$$k_i = k, \quad m_i = m, \quad n_i = n, \quad d_i = d \quad (i=1,2,3) \tag{2.11}$$

тогда при достаточно большом d коэффициенты a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} примут вид

$$c_{12} = -kd^{-1}, \quad c_{21} = kd^{-1}, \quad b_{13} = kd^{-1} + \ldots, \quad a_{23} = -kd^{-1} + \ldots \\ b_{31} = -kd^{-1} - 2n(a-b\sin\beta t) + \ldots \\ a_{32} = kd^{-1} + 2n(a-b\sin\beta t) + \ldots \tag{2.12}$$

Многоточие означает члены, содержащие в знаменателях d в степени не ниже второй. Остальные коэффициенты либо равны нулю, либо начинаются с членов второго порядка малости. В силу (2.12) функция (2.10) примет вид

$$F_2 = n[l^2(\beta_{32}-\beta_{23})^2 - (a-b\sin\beta t)^2\beta_{32}^2] + \\ + n[l^2(\beta_{13}-\beta_{31})^2 - (a-b\sin\beta t)^2\beta_{31}^2] + nl^2(\beta_{21}-\beta_{12})^2 + \ldots \quad (l = km^{-1}) \tag{2.13}$$

Переходя от зависимых переменных β_{ik} $(i, k=1, 2, 3)$ к независимым переменным — углам Крылова θ, ψ [3, 4], получим

$$F_2 = n[4l^2 - (a-b\sin\beta t)^2](\theta^2+\psi^2) + \ldots \tag{2.14}$$

Функция (2.14) является определенно-положительной при выполнении неравенства

$$2l > |a+b| \tag{2.15}$$

которое, таким образом, представляет собой достаточное условие стабилизации движения (2.2) при помощи построенных управляющих моментов $w_i = -(2n_i)^{-1}(\partial V^\circ/\partial q_i)$ $(i=1, 2, 3)$, что дает следующие выражения:

$$w_1 = -[dq_1 + l(\beta_{32}-\beta_{23}) + (a-b\sin\beta t)\beta_{32}] + \ldots \\ w_2 = -[dq_2 + l(\beta_{13}-\beta_{31}) - (a-b\sin\beta t)\beta_{31}] + \ldots \\ w_3 = -[dq_3 + l(\beta_{21}-\beta_{12})] \tag{2.16}$$

Для исходных управлений в силу (1.9) получим

$$u_1 = A[dq_1 + l(\beta_{32}-\beta_{23}) + (a-b\sin\beta t)\beta_{32}] + \ldots \\ u_2 = A[dq_2 + l(\beta_{13}-\beta_{31}) - (a-b\sin\beta t)\beta_{31}] + \ldots \\ u_3 = A_3[dq_3 + l(\beta_{21}-\beta_{12})] \tag{2.17}$$

Управление (2.16) обеспечивает стабилизацию движения (2.2) и минимум функционала (1.12) с подынтегральной функцией

$$\Omega_1=(d^2n-2kd^{-1})(q_1^2+q_2^2+q_3^2)-2n(a-b\sin\beta t)(q_1^2+q_2^2)+$$
$$+nl^2[(\beta_{32}-\beta_{23})^2+(\beta_{13}-\beta_{31})^2+(\beta_{21}-\beta_{12})^2]- \tag{2.18}$$
$$-n(a-b\sin\beta t)^2(\beta_{31}^2+\beta_{32}^2)+n\sum w_i^2+\ldots$$

Найденные управления (2.16), (2.17) содержат два основных коэффициента d и l, которые должны быть выбраны надлежащим образом. Нижняя грань коэффициента d определяется из условий знакоопределенности функций V° (2.4) и F_1 (2.3). Нижняя грань коэффициента l назначается неравенством (2.15) на основе численных значений параметров a, характеризующего опрокидывающий момент силы тяжести стабилизируемого тела, и b, отражающего вибрационные характеристики точки O подвеса тела (1.10).

По аналогии с предыдущими исследованиями [3] нетрудно показать, что оптимальная функция Ляпунова (2.4) и оптимальные управления (2.16) решают поставленную задачу стабилизации перманентного вращения тела (1.11) в силу полных уравнений (1.8), если при этом добавить к подынтегральной функции (2.18) соответствующие члены более высокого порядка малости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений.– В кн.: *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. Доп. 4. М.: Наука, 1966, с. 475–514.
2. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем.– ПММ, 1970, т. 34, вып. 3, с. 440–456.
3. *Крементуло В. В.* Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс. М.: Наука 1977. 263 с.
4. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

Москва

Поступила в редакцию 28.X.1983