МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1984

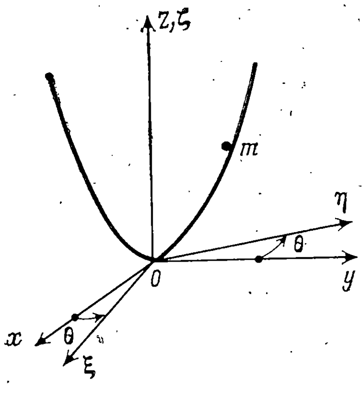
УДК 531.32

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПАРАБОЛОИДЕ

АГАФОНОВ С. А.

Рассматривается движение точечной массы во вращающемся эллиптическом параболоиде под действием сил тяжести. Система может рассматриваться как модель жесткого вала, вращающегося в упругих подшипниках. Найдено многообразие стационарных движений точечной массы. Для исследования устойчивости стационарных движений применяется теорема Рауса [1], а в области выполнения необходимых условий устойчивости – теорема об устойчивости равновесия гамильтоновой системы с двумя степенями свободы [2].

1. Рассмотрим движение точечной массы m во вращающемся с угловой скоростью $\theta^{\cdot}$ относительно неподвижной системы координат xyz эллиптическом параболоиде (фигура). С параболоидом жестко связана система координат $\xi\eta\zeta$, в которой поверхность параболоида задается уравнением $2\zeta=k_1\xi^2+k_2\eta^2$. Без уменьшения общности будем считать, что $k_1>k_2$.



Функция Лагранжа системы имеет вид

$$L={}^1/_2m[(\xi^{\cdot}-\theta^{\cdot}\eta)^2+(\eta^{\cdot}+\theta^{\cdot}\xi)^2+ +(k_1\xi\xi^{\cdot}+k_2\eta\eta^{\cdot})^2]- -{}^1/_2mg(k_1\xi^2+k_2\eta^2)+{}^1/_2I\theta^{\cdot 2} \tag{1.1}$$

Здесь g – ускорение сил тяготения, I – момент инерции параболоида относительно оси ζ. Координате θ соответствует циклический интеграл (s – постоянная интегрирования):

$$(I+m\xi^2+m\eta^2)\theta^{\cdot}+m(\xi\eta^{\cdot}-\xi^{\cdot}\eta)=s \tag{1.2}$$

После исключения циклической координаты θ функция Рауса

$$R=R_2+R_1-W \tag{1.3}$$

где R_2, R_1 – соответственно квадратичная и линейная формы относительно позиционных скоростей, W – приведенная потенциальная энергия системы.

Не выписывая выражения для R_2 и R_1, приведем лишь выражение для W:

$$W={}^1/_2mg(k_1\xi^2+k_2\eta^2)+{}^1/_2s^2/(I+m\xi^2+m\eta^2) \tag{1.4}$$

Значения позиционных координат при стационарном движении находятся из уравнений

$$\partial W/\partial\xi=0,\quad \partial W/\partial\eta=0 \tag{1.5}$$

которые имеют решение

$$\xi=\eta=0 \tag{1.6}$$

а при выполнении неравенства $s>I(gk_1)^{1/2}$ — решения

$$\xi=\pm[s/(m(gk_1)^{1/2})-I/m]^{1/2}, \quad \eta=0 \tag{1.7}$$

$$\xi=0, \quad \eta=\pm[s/(m(gk_2)^{1/2})-I/m]^{1/2} \tag{1.8}$$

Применяя теорему Рауса [1], нетрудно показать, что стационарное движение (1.7) неустойчиво, а (1.8) условно устойчиво. Согласно замечанию, сделанному в [3], стационарное движение (1.8) устойчиво при всяких возмущениях, так как функция W имеет минимум не только при данном значении циклической постоянной s, но также при всяком достаточно близком к данному $s_1=s+\Delta s$, а значения переменных (1.8), обращающие W в минимум, являются непрерывными функциями s. Стационарное движение (1.6) при выполнении неравенства

$$s^2<k_2I^2g \tag{1.9}$$

устойчиво, а при выполнении неравенств

$$k_2I^2g<s^2<k_1I^2g \tag{1.10}$$

неустойчиво. При выполнении неравенства

$$s^2>k_1I^2g \tag{1.11}$$

степень неустойчивости четна и возможна гироскопическая стабилизация [1]. При выполнении неравенства (1.11) характеристическое уравнение линеаризованных уравнений возмущенного движения имеет две пары чисто мнимых корней и, следовательно, условие (1.11) является необходимым условием устойчивости стационарного движения (1.6).

2. Исследуем устойчивость стационарного движения (1.6) в области выполнения необходимого условия устойчивости (1.11). Вводя канонические переменные q_i, p_i $(i=1,2)$ и «безразмерное время» τ по формулам

$$q_1=k_1\xi, \quad q_2=k_1\eta, \quad p_1=\frac{\partial R/\partial\dot\xi}{m(g/k_1)^{1/2}}, \quad p_2=\frac{\partial R/\partial\dot\eta}{m(g/k_1)^{1/2}}, \quad \tau=(gk_1)^{1/2}t \tag{2.1}$$

и разлагая функцию Гамильтона в окрестности решения

$$q_1=q_2=0, \quad p_1=p_2=0 \tag{2.2}$$

соответствующего стационарному движению (1.6), в ряд по степеням q_i, p_i, получим

$$H=H_2+H_4+\ldots \tag{2.3}$$

где H_m — однородная функция степени m относительно q_i, p_i $(i=1,2)$. Выражения для H_2 и H_4 имеют вид

$$H_2={}^1/_2(p_1^2+p_2^2)+r(p_1q_2-p_2q_1)+{}^1/_2q_1^2+{}^1/_2(1-\mu)q_2^2 \tag{2.4}$$

$$H_4=-r(\delta+\mu)q_1^2q_2p_1+r(\delta-\mu+\mu^2)q_1q_2^2p_2-$$
$$-\delta rq_2^3p_1+\delta rq_1^3p_2-{}^1/_2q_1^2p_1^2-{}^1/_2(1-\mu)^2q_2^2p_2^2-$$
$$-(1-\mu)q_1q_2p_1p_2-{}^1/_2r\delta q_1^4-{}^1/_2r\delta q_2^4-r^2({}^1/_2\mu^2+\delta)q_1^2q_2^2$$

Здесь $\mu=1-k_2/k_1$, $r=s/(I(gk_1)^{1/2})$, $\delta=m/(Ik_1^2)$.

В новых обозначениях необходимое условие устойчивости (1.11) примет вид $r^2>1$. При выполнении этого условия H_2 индефинитна, но решение (2.2) линейной системы уравнений возмущенного движения устойчиво. В этом случае вопрос об устойчивости решения (2.2) решается при помощи теоремы [2]: если функция Гамильтона (2.3) такова, что между частотами линейной системы $\omega_1>\omega_2>0$ не существует резонансных соотношений

$$\omega_1=2\omega_2,\quad \omega_1=3\omega_2 \tag{2.5}$$

$$D\equiv\lambda_{20}\omega_2^2+\lambda_{11}\omega_1\omega_2+\lambda_{02}\omega_1^2\neq 0 \tag{2.6}$$

то решение (2.2) устойчиво по Ляпунову. В теореме [2] предполагается, что функция Гамильтона (2.3) приведена к виду

$$H=\omega_1 r_1-\omega_2 r_2+\lambda_{20}r_1^2+\lambda_{11}r_1 r_2+\lambda_{02}r_2^2+\ldots$$
$$2r_i=q_{i0}^2+p_{i0}^2 \quad (i=1,\,2) \tag{2.7}$$

Многоточие означает совокупность членов не ниже пятого порядка относительно канонических переменных q_{i0}, p_{i0}. С помощью линейного канонического преобразования

$$\begin{aligned}
q_1&=-\frac{2r\omega_1^{1/2}}{\Delta_1^{1/2}}p_{11}+\frac{2r\omega_2^{1/2}}{\Delta_2^{1/2}}p_{21}\\
q_2&=\frac{\omega_1^2+r^2-1}{(\Delta_1\omega_1)^{1/2}}q_{11}+\frac{\omega_2^2+r^2-1}{(\Delta_2\omega_2)^{1/2}}q_{21}\\
p_1&=-\frac{r(r^2-1-\omega_1^2)}{(\Delta_1\omega_1)^{1/2}}q_{11}-\frac{r(r^2-1-\omega_2^2)}{(\Delta_2\omega_2)^{1/2}}q_{21}\\
p_2&=\frac{(\omega_1^2-r^2-1)\,\omega_1^{1/2}}{\Delta_1^{1/2}}p_{11}+\frac{(r^2+1-\omega_2^2)\,\omega_2^{1/2}}{\Delta_2^{1/2}}p_{21}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

функция H_2 приводится к виду

$$H_2={}^1/_2\omega_1(p_{11}^2+q_{11}^2)-{}^1/_2\omega_2(p_{21}^2+q_{21}^2) \tag{2.9}$$

В выражении (2.8) введены обозначения

$$\Delta_1=(4r^2-\mu)\,\omega_1^2-(r^2-1)\,(4r^2+\mu)$$
$$\Delta_2=(r^2-1)\,(4r^2+\mu)-(4r^2-\mu)\,\omega_2^2$$

а частоты $\omega_{1,2}$ $(\omega_1>\omega_2>0)$ удовлетворяют уравнению

$$\omega^4-(2r^2+2-\mu)\,\omega^2+(r^2-1)\,(r^2-1+\mu)=0$$

После преобразования (2.8) функция Гамильтона (2.3) будет иметь вид

$$H={}^1/_2\omega_1(p_{11}^2+q_{11}^2)-{}^1/_2\omega_2(p_{21}^2+q_{21}^2)+H_4(q_{i1},\,p_{i1})+\ldots \tag{2.10}$$

Если не выполняется второе из соотношений (2.5), то при помощи канонической замены переменных q_{i1}, $p_{i1}\to q_{i0}$, p_{i0} $(i=1,\,2)$, задаваемой формулами

$$q_{i0}=q_{i1}+\partial S_4/\partial p_{i0},\qquad p_{i1}=p_{i0}+\partial S_4/\partial q_{i1} \tag{2.11}$$

где S_4 — однородная форма переменных q_{i1}, p_{i0} $(i=1,\,2)$, можно избавиться в H_4 от всех членов четвертого порядка, кроме тех, которые фигурируют в (2.7). После последовательно сделанных замен переменных (2.8) и (2.11) функция Гамильтона (2.3) будет иметь вид (2.7). Инварианты канонических преобразований λ_{20}, λ_{11}, λ_{02} зависят от трех безразмерных параметров μ, δ, r, первые два из которых определяются исключительно параметрами механической системы. Параметр r зависит от циклической постоянной s, и значения его удовлетворяют неравенству $r^2>1$. Для исследования выражения (2.6) будем считать параметр r комплексным числом, лежащим вне единичного круга $|r|=1$. Далее, вместо параметра r введем параметр $\rho=1/r$, множество значений которого лежит внутри единичного круга. Бесконечно удаленной точке комплексной плоскости r соответствует точка $\rho=0$. Рассмотрим выражение (2.6) как функцию комплексной переменной p в области ($\varkappa$ — сколь угодно малое положительное число):

$$\varkappa<|p|<1 \tag{2.12}$$

Опуская громоздкие, но достаточно простые вычисления, выпишем лорановское разложение функции (2.6) в области (2.12):

$$D(p)=-3D_1(p)/(16(2-\mu)p^2)$$
$$D_1(p)=4(\mu^2+2\delta)/p^2+23\delta/p+R(p) \tag{2.13}$$

Здесь $R(p)$ — правильная часть лорановского разложения функции $D_1(p)$, сходящаяся в области (2.12). Из выражения (2.13) видно, что нули функции $D(p)$ совпадают с нулями функции $D_1(p)$ и $D(p)\neq0$ при достаточно малом $|p|$. На основании теоремы единственности теории аналитических функций [4] аналитическая в области (2.12) функция $D_1(p)$ имеет в этой области конечное число нулей. Возвращаясь к исходной переменной r, можно утверждать, что в конечной области $1<|r|<K$ (K — достаточно большое число) выражение (2.6) может обращаться в нуль только для конечного набора значений параметра r при фиксированных значениях параметров μ, δ. Геометрически это означает, что в трехмерном пространстве параметров μ, δ, r прямая, параллельная оси r, если и пересекается с поверхностью $D=0$, то конечное число раз. Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. Если не выполняются резонансные соотношения (2.5), то при достаточно большом $|r|>1$ решение (2.2) устойчиво по Ляпунову.

Устойчивость стационарного движения (2.2) при достаточно большом $|r|$ показана при условии, что циклическая постоянная s не возмущается. Если s получает малое приращение Δs, то новое возмущенное движение системы можно рассматривать как возмущенное движение для некоторого другого стационарного движения при фиксированном значении $s+\Delta s$ [5]. Согласно [6], стационарное движение (2.2) является безусловно устойчивым.

Вывод об устойчивости в теореме [2] делается исходя из анализа форм не более четвертого порядка в разложении функции Гамильтона (2.3). Поэтому полученные результаты переносятся на случай, когда поверхность, в которой находится точечная масса, не является эллиптическим параболоидом, а несколько деформирована относительно параболоида и деформации описываются формами выше четвертого порядка.

Частоты $\omega_{1,2}$ зависят только от двух параметров μ и r. Устремим k_1 и k_2 к нулю. Чтобы частоты не менялись, достаточно потребовать, чтобы $k_2/k_1=\text{const}$ и $l^2k_1=\text{const}$, и тогда $\delta\to\infty$. В этом предельном случае рассмотренная система представляет собой модель неравножесткого вала, вращающегося в упругих подшипниках.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 208 с.
2. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике.— Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 6, с. 91–192.
3. *Ляпунов А. М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Собр. соч. Т. 1. Изд-во АН СССР, 1954. с. 276–319.
4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений.— ПММ, 1966, т. 30, вып. 5, с. 922–933.
6. *Савченко А. Я.* Устойчивость стационарных движений механических систем. Киев: Наук. думка, 1977. 160 с.

Москва

Поступила в редакцию 29.III.1982