m	F_{m1}	F_{m2}	F_{m3}	F_{m4}	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}	C_{m4}
1	$-\mathrm{tg}^2\varphi_1$	0	0	0	$-A_2$	0	0	0
2	1	$-\mathrm{tg}^2\varphi_2$	0	0	A_1	$-A_3$	0	0
3	1	1	$-\mathrm{tg}^2\varphi_3$	0	0	A_2	$-A_4$	0
4	1	1	1	$-\mathrm{tg}^2\varphi_4$	0	0	A_3	$-A_5$
5	1	1	1	1	0	0	0	A_4

Исключая в (6) производную σ', получим четыре соотношения:

$$\sin\varphi_{k-1}(\varphi_k'+\varkappa_k\cos\varphi_{k+1})=\varkappa_{k-1}\sin\varphi_k\cos\varphi_{k-1},\quad \varphi_5\equiv 0\quad (k=2,\ 3,\ 4) \tag{7}$$

$$\varphi_1'+\varkappa_1\cos\varphi_2=-(N/\sigma)\sin\varphi_1 \tag{8}$$

Для σ' имеем уравнение $\sigma'=P\cos\varphi_1$.

В механике сплошной среды имеют большое значение соотношения, сохраняющие свой вид для различных материалов. В соотношения (7) не входят явно функционалы N, P, следовательно, вид этих соотношений одинаков для всех материалов, векторные свойства которых описываются компланарностью трех векторов, входящих в (3). В частности, они справедливы в упругой и пластической областях деформаций. В соотношение (8) явно входит только функционал N, причем в случаях упругого и идеально пластического тела $N=2G$. Исходя из этого можно обобщить гипотезу из [5] в виде утверждения о применимости соотношения (8), в котором положено $N=2G$, также и для упрочняющихся материалов.

В общем случае плоского напряженного состояния и в других случаях, когда изображающее пространство является трехмерным, полагая в (7), (8) $\varphi_1\equiv\vartheta$, $\varphi_2\equiv\varphi$, $\varphi_3\equiv\varphi_4\equiv 0$, $\varkappa_1\equiv\varkappa$, $\varkappa_2\equiv\tau$, $\varkappa_3\equiv\varkappa_4\equiv 0$, получаем соотношения

$$\sigma'=P\cos\vartheta,\qquad \vartheta'+\varkappa\cos\varphi=-(N/\sigma)\sin\vartheta,\qquad \sin\vartheta(\varphi'+\tau)=\varkappa\sin\varphi\cos\vartheta \tag{9}$$

Следовательно, при известном N известна и функциональная связь между углом сближения ϑ, углом депланации φ, параметрами кривизны $\varkappa$, кручения τ и модулем σ.

Если, начиная с некоторой точки s_0, траектория деформации становится прямолинейной, т. е. $\mathbf{e}'(s)=\mathbf{e}'(s_0)$, $\varkappa(s)=0$, $\tau(s)$ — произвольная функция s, $s\geqslant s_0$, то из (9) следует $\varphi'=-\tau$ при $s\geqslant s_0$. Это означает, что изменение угла φ происходит только в результате вращения репера Френе вокруг $\mathbf{e}'(s)$, а вектор $\boldsymbol{\sigma}(s)$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{\sigma}(s_0)$ и $\mathbf{e}'(s_0)$, что согласуется с гипотезой локальной определенности [4].

Автор приносит благодарность А. А. Ильюшину и В. С. Ленскому за руководство работой и сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. *Ильюшин А. А.* Вопросы общей теории пластичности.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 3, с. 399–411.
3. *Ленский В. С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций.— В кн.: Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 58–82.
4. *Ленский В. С.* Гипотеза локальной определенности в теории пластичности.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 5, с. 154–158.
5. *Васин Р. А., Ильюшин А. А.* Об одном представлении законов упругости и пластичности в плоских задачах.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 114–118.

Москва

Поступила в редакцию 4.X.1983

УДК 539.3

ТОНКОЕ УПРУГОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ В УСЛОВИЯХ СДВИГА

СИЛОВАНЮК В. П., СТАДНИК М. М.

В рамках теории упругости на основе приближенного подхода получены интегральные уравнения для включения, ограниченного сплющенной гладкой поверхностью. Для случая эллипсоидальной поверхности получено замкнутое решение

уравнений. В явном виде приведены выражения для напряжений во включении, а также его окрестности.

1. Рассматривается неограниченное изотропное пространство, содержащее тонкое упругое включение, ограниченное гладкой поверхностью V. Предполагается, что между материалами пространства и включения вдоль всей поверхности контакта имеет место жесткое сцепление. Свяжем с включением систему прямоугольных декартовых координат x, y, z так, чтобы плоскость $z=0$ совпадала с плоскостью срединной области S поверхности V.

К пространству приложены сдвигающие усилия, параллельные плоскости включения и вызывающие в случае однородного пространства в области S касательные напряжения σ_{xz}°, σ_{yz}°. Задача состоит в определении напряжений во включении, а также его окрестности.

Предполагая материал включения более податливым, чем матрицы, воспользуемся моделью тонкого упругого включения, предложенной в [1, 2]. Включение представляется полостью, к поверхности которой приложены напряжения

$$\sigma_{xz}^*(x,y)=\frac{[u_x^*(x,y)]}{2h(x,y)}\mu_*,\qquad \sigma_{yz}^*(x,y)=\frac{[u_y^*(x,y)]}{2h(x,y)}\mu_* \tag{1.1}$$

где квадратной скобкой обозначена разность функции на верхней и нижней относительно плоскости $z=0$ частях поверхности включения; μ_* – модуль сдвига материала включения, u_x^*, u_y^* – функции смещений поверхности V, за которые принимается следующая сумма: $u_x^*\approx u_x^{\circ}+u_x$, $u_y^*\approx u_y^{\circ}+u_y$, u_x°, u_y° – смещения поверхности V в случае однородного тела при заданых внешних усилиях, u_x, u_y – смещения берегов математического разреза вдоль области S, к берегам которого приложены усилия $\sigma_{xz}=\sigma_{xz}^*-\sigma_{xz}^{\circ}$, $\sigma_{yz}=\sigma_{yz}^*-\sigma_{xz}^{\circ}$, $2h(x, y)$ – толщина включения.

Напряженное состояние в окрестности концевой части тонкой полости может быть представлено через коэффициенты интенсивности напряжений для эквивалентно нагруженного математического разреза вдоль срединной области полости [3, 4]:

$$\sigma_{xz}=\frac{K_{\rm II}\cos\theta^*-K_{\rm III}\sin\theta}{\sqrt{\pi\rho}}+\sigma_{xz}^{\circ},\qquad \sigma_{yz}=\frac{K_{\rm II}\sin\theta+K_{\rm III}\cos\theta}{\sqrt{\pi\rho}}+\sigma_{yz}^{\circ} \tag{1.2}$$

где ρ – радиус кривизны концевой части полости, θ – угол между осью x и внешней нормалью к контуру математического разреза S.

Таким образом, определение напряжений в окрестности и внутри эллипсоидального включения сведено к решению соответствующего эквивалента задачи теории трещин, что в свою очередь составляет следующую задачу теории упругости для полупространства $z\geqslant 0$:

$$\begin{gathered}\sigma_{zz}=0\quad (x,y)\in S+\bar S\\ \sigma_{xz}=\sigma_{xz}^*-\sigma_{xz}^{\circ},\quad \sigma_{yz}=\sigma_{yz}^*-\sigma_{yz}^{\circ}\quad (x,y)\in S\\ u_x=u_y=0\quad (x,y)\in\bar S\end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\bar S$ – внешность области S.

2. Как известно [5], в кососимметричной задаче поле напряжений и смещений описывается двумя гармоническими функциями Папковича – Нейбера.

Выбирая их в виде интегральных разложений Фурье

$$\Phi_1(x,y,z)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}A_1(\xi,\eta)\exp[-z\sqrt{\xi^2+\eta^2}+i(x\xi+y\eta)]\frac{d\xi\,d\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

$$\Phi_2(x,y,z)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}A_2(\xi,\eta)\exp[-z\sqrt{\xi^2+\eta^2}+i(x\xi+y\eta)]\frac{d\xi\,d\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

краевая задача (1.3) может быть приведена к следующим парным уравнениям:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[i(x\xi+y\eta)]}{\xi^2+\eta^2}A_1(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\nu\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[i(x\xi+y\eta)]}{\xi^2+\eta^2}A_2(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=\sigma_{xz}^*(x,y)-\sigma_{xz}^{\circ}(x,y)\qquad (x,y)\in S$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[i(x\xi+y\eta)]}{\xi^2+\eta^2}A_2(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+$$

$$+\nu\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[i(x\xi+y\eta)]}{\xi^2+\eta^2}A_1(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=\sigma_{yz}^*(x,y)-\sigma_{yz}^\circ(x,y)\qquad(x,y)\in S \tag{2.1}$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[i(x\xi+y\eta)]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}A_1(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=0\qquad(x,y)\in\bar S$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[i(x\xi+y\eta)]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}A_2(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=0\qquad(x,y)\in\bar S$$

где ν – коэффициент Пуассона материала матрицы.

Введем обозначения (μ – модуль сдвига основного материала):

$$\frac{(1-\nu)}{\mu}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[i(x\xi+y\eta)]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}A_1(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=\begin{cases}u_x(x,y) & (x,y)\in S\\ 0 & (x,y)\in\bar S\end{cases}$$

$$\frac{(1-\nu)}{\mu}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[i(x\xi+y\eta)]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}A_2(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=\begin{cases}u_y(x,y) & (x,y)\in S\\ 0 & (x,y)\in\bar S\end{cases}$$

Используя обратные преобразования Фурье, получим

$$A_1(\xi,\eta)=\frac{\mu}{1-\nu}\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{4\pi^2}\iint_S u_x(x,y)\exp[-i(x\xi+y\eta)]\,dx\,dy$$

$$A_2(\xi,\eta)=\frac{\mu}{1-\nu}\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{4\pi^2}\iint_S u_y(x,y)\exp[-i(x\xi-y\eta)]\,dx\,dy \tag{2.2}$$

Подставляя выражения (2.2) в первые два уравнения (2.1) и учитывая соотношения (1.1), получим следующую систему двумерных интегральных уравнений ($\varepsilon=\mu_*/\mu$):

$$\frac{2\pi(1-\nu)\varepsilon}{h(x,y)}u_x(x,y)-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint_S\frac{u_x(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}-$$

$$-\nu\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\iint_S\frac{u_y(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}=\frac{2(1-\nu)\pi}{\mu}\left(\sigma_{xz}^\circ(x,y)-\frac{[u_x^\circ(x,y)]}{2h(x,y)}\mu_*\right)$$

$$\frac{2\pi(1-\nu)\varepsilon}{h(x,y)}u_y(x,y)-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\iint_S\frac{u_y(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}- \tag{2.3}$$

$$-\nu\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\iint_S\frac{u_x(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}=\frac{2\pi(1-\nu)}{\mu}\left(\sigma_{yz}^\circ(x,y)-\frac{[u_y^\circ(x,y)]}{2h(x,y)}\mu_*\right)$$

После решения системы уравнений (2.3) напряжения во включении, а также окрестности определяются соотношением (1.1), (1.2). При этом коэффициенты интенсивности напряжений находятся по известным смещениям берегов разреза.

3. Пусть поверхность включения V является трехосным эллипсоидом $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ ($a\geqslant b\gg c$).

Приложение на бесконечности к однородному пространству сдвигающей нагрузки τ порождает поле смещений вида $u_x=z\tau\cos\alpha/\mu$, $u_y=z\tau\sin\alpha/\mu$, $u_z=0$, где α – угол между направлением напряжений сдвига и большей осью эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2-1=0$.

Исходя из этого, смещения точек поверхности $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2-1=0$ в однородном пространстве при сдвиге запишутся в виде

$$u_x^\circ(x,\ y)=\tau\cos\alpha c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}/\mu$$
$$u_y^\circ(x,\ y)=\tau\sin\alpha c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}/\mu \tag{3.1}$$

Точное решение системы уравнений (2.3) будет следующим:

$$u_x(x,y)=\frac{\tau(1-\nu)(1-\varepsilon)cbk^2\cos\alpha}{\mu(cE(k)(k^2-\nu)+c\nu k'^2K(k)+bk^2(1-\nu)\varepsilon)}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$
$$u_y(x,y)=\frac{\tau(1-\nu)(1-\varepsilon)cbk^2\sin\alpha}{\mu(cE(k)(k^2+\nu k'^2)-c\nu k'^2K(k)+(1-\nu)bk^2\varepsilon)}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \tag{3.2}$$

где $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно, $k^2=(a^2-b^2)/a^2$, $k'=b/a$.

Для определения смещений точек поверхности включения имеем

$$u_x^*(x,y)=\frac{\tau c((1-\nu)bk^2+cE(k)(k^2-\nu)+c\nu k'^2K(k))\cos\alpha}{\mu(cE(k)(k^2-\nu)+c\nu k'^2K(k)+bk^2(1-\nu)\varepsilon)}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$
$$u_y^*(x,y)=\frac{\tau c((1-\nu)bk^2+cE(k)(k^2+\nu k'^2)-c\nu k'^2K(k))\sin\alpha}{\mu(cE(k)(k^2+\nu k'^2)-c\nu k'^2K(k)+(1-\nu)bk^2\varepsilon)}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \tag{3.3}$$

Напряжения, возникающие во включении, находим из соотношений

$$\sigma_{xz}^*(x,y)=\frac{\tau\varepsilon((1-\nu)bk^2+cE(k)(k^2-\nu)+c\nu k'^2K(k))\cos\alpha}{cE(k)(k^2-\nu)+c\nu k'^2K(k)+bk^2(1-\nu)\varepsilon}$$
$$\sigma_{yz}^*(x,y)=\frac{\tau\varepsilon((1-\nu)bk^2+cE(k)(k^2+\nu k'^2)-c\nu k'^2K(k))\sin\alpha}{cE(k)(k^2+\nu k'^2)-c\nu k'^2K(k)+(1-\nu)bk^2\varepsilon} \tag{3.4}$$

Для определения внешнего поля напряжений вблизи эллипсоидального включения необходимо совершить переход от системы ортогональных координат x, y, z с началом в геометрическом центре эллипсоида к подвижной системе таких же координат t, n, z на контуре срединной области S:

$$x=a\cos\varphi-t\sin\theta+n\cos\theta \quad y=b\sin\varphi+t\cos\theta+n\sin\theta, \quad z=z$$

где θ — угол между осью x и внешней нормалью к границе эллипса, φ — угол, определяющий параметрические координаты точки на эллипсе $x^2/a^2+y^2/b^2-1=0$, n, t — координаты, направленные соответственно по нормали и касательной к контуру S.

Угол θ связан с параметрическими уравнениями эллипса следующими зависимостями:

$$\cos\theta=b\cos\varphi/\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}$$
$$\sin\theta=a\sin\varphi/\sqrt{a^2\sin\varphi+b^2\cos^2\varphi}$$

Исходя из приведенных соотношений перехода к новым осям координат, асимптотические выражения для смещений в окрестности границы эллипса запишутся в виде

$$u_x|_{n\to-0}=\frac{\sqrt{2}\tau(1-\nu)(1-\varepsilon)cbk^2(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{1/4}\cos\alpha}{\mu(cE(k)(k^2-\nu)+c\nu k'^2K(k)+bk^2(1-\nu)\varepsilon)\sqrt{ab}}\sqrt{-n}+O(n)$$
$$u_y|_{n\to-0}=\frac{\sqrt{2}\tau(1-\nu)(1-\varepsilon)cbk^2(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{1/4}\sin\alpha}{\mu(cE(k)(k^2+\nu k'^2)-c\nu k'^2K(k)+bk^2(1-\nu)\varepsilon)\sqrt{ab}}\sqrt{-n}+O(n)$$

где пренебрегается членами порядка $O(n)$.

Формулы перехода от компонент перемещений u_x, u_y к u_t, u_n имеют вид $u_t=-u_x\sin\theta+u_y\cos\theta$, $u_n=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta$ и, следовательно

$$u_t|_{n\to-0}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}\tau(1-\nu)(1-\varepsilon)cbk^2(ab)^{-1/2}}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{1/4}}\left(-\frac{a\cos\alpha\sin\varphi}{\mu(cE(k)(k^2-\nu)+c\nu k'^2K(k)+bk^2(1-\nu)\varepsilon)}+\right.$$

$$+\frac{b\sin\alpha\cos\varphi}{\mu(cE(k)(k^2+\nu k'^2)-c\nu k'^2K(k)+bk^2(1-\nu)\varepsilon)}\Bigg)\sqrt{-n}+O(n)$$

$$u_n|_{n\to-0}= \tag{3.5}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,\tau(1-\nu)(1-\varepsilon)cbk^2(ab)^{-1/2}}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{1/4}}\Bigg(\frac{b\cos\alpha\cos\varphi}{\mu(cE(k)(k^2-\nu)+c\nu k'^2K(k)+bk^2(1-\nu)\varepsilon)}+$$

$$+\frac{a\sin\alpha\sin\varphi}{\mu(cE(k)(k^2+\nu k'^2)-c\nu k'^2K(k)+(1-\nu)\varepsilon bk^2}\Bigg)\sqrt{-n}+O(n)$$

Воспользовавшись известными соотношениями теории трещин (см., например, [6]):

$$K_{\mathrm{II}}=\lim_{n\to-0}\sqrt{\pi/(-2n)}\,\mu u_n/(1-\nu)+O(n)\qquad K_{\mathrm{III}}=\lim_{n\to-0}\sqrt{\pi/(-2n)}\,\mu u_t+O(n)$$

и формулами (1.2), (3.5), находим величину касательных напряжений в окрестности эллипсоидального включения

$$\sigma_{xz}=\tau\cos\alpha+\frac{\tau bk^2(1-\varepsilon)c}{\sqrt{ab}\rho(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{3/4}}\times$$

$$\times\Bigg(\frac{(b^2\cos^2\varphi+(1-\nu)a^2\sin^2\varphi)\cos\alpha}{cE(k)(k^2-\nu)+c\nu k'^2K(k)+bk^2(1-\nu)\varepsilon}+$$

$$+\frac{\nu ab\sin\varphi\cos\varphi\sin\alpha}{cE(k)(k^2+\nu k'^2)-c\nu k'^2K(k)+bk^2(1-\nu)\varepsilon}\Bigg)$$

$$\sigma_{yz}=\tau\sin\alpha+\frac{\tau bk^2(1-\varepsilon)c}{\sqrt{ab}\rho(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{3/4}}\times \tag{3.6}$$

$$\times\Bigg(\frac{\nu ab\sin\varphi\cos\varphi\cos\alpha}{cE(k)(k^2-\nu)+c\nu k'^2K(k)+bk^2\varepsilon(1-\nu)}+$$

$$+\frac{(a^2\sin^2\varphi+(1-\nu)b^2\cos^2\varphi)\sin\alpha}{cE(k)(k^2+\nu k'^2)-c\nu k'^2K(k)+bk^2\varepsilon(1-\nu)}\Bigg)$$

$$\rho=\frac{c^2[((b^4-a^4)\cos^2\varphi+a^4)^2-(b^2-a^2)(a^4\sin^2\varphi+b^4\cos^2\varphi)]\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{((b^4-a^4)\cos^2\varphi+a^4)((b^2-a^2)\cos^2\varphi+a^2)\sqrt{a^4b^2\sin^2\varphi+b^4a^2\cos^2\varphi}}$$

Для случая сфероидального включения ($a=b$) эти выражения значительно упрощаются и приобретают вид

$$\sigma_{xz}=\tau\cos\alpha+\frac{4\tau a(1-\varepsilon)(\cos^2\varphi+(1-\nu)\sin^2\varphi)\cos\alpha}{c\pi(2-\nu)+4a\varepsilon(1-\nu)}+$$

$$+\frac{4\tau a\nu(1-\varepsilon)\sin\varphi\cos\varphi\sin\alpha}{c\pi(2-\nu)+4a\varepsilon(1-\nu)}$$

$$\sigma_{yz}=\tau\sin\alpha+\frac{4\tau a\nu(1-\varepsilon)\sin\varphi\cos\varphi\cos\alpha}{c\pi(2-\nu)+4a\varepsilon(1-\nu)}+\frac{4\tau a(1-\varepsilon)(\sin^2\varphi+(1-\nu)\cos^2\varphi)\sin\alpha}{c\pi(2-\nu)+4a\varepsilon(1-\nu)}$$

В случае, когда направление напряжения сдвига совпадает с большей осью эллипса $x^2/a^2-y^2/b^2-1=0$, при $\varphi=0$ будем иметь

$$\sigma_{xz}=\tau+\frac{\tau bk^2(1-\varepsilon)}{cE(k)(k^2-\nu)+c\nu k'^2K(k)+bk^2\varepsilon(1-\nu)},\qquad \sigma_{yz}=0$$

С другой стороны, при $\varphi=\pi/2$:

$$\sigma_{xz}=\tau+\frac{\tau bk^2(1-\varepsilon)(1-\nu)}{cE(k)(k^2-\nu)+c\nu k'^2K(k)+bk^2\varepsilon(1-\nu)},\qquad \sigma_{yz}=0$$

Из полученных результатов, в частности из формул (3.4), следует, что напряжения во включении постоянны. Это соответствует известной теореме [7] о полиномиальной консервативности поля напряжений (деформаций) для эллипсоида.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соткилава О. В., Черепанов Г. П.* Некоторые задачи неоднородной теории упругости.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 3, с. 539—550.
2. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Стадник М. М.* Упругое равновесие неограниченного тела с тонким включением.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 7, с. 636—639.
3. *Irwin G. R.* Fracture mechanics.— In: Structural Mechanics. Oxford: Pergm on Press, 1960, p. 557—591.
4. *Paris P. C., Sih G. C.* Stress analysis of craks.— In: Fracture toughness testing and its applications. Philadelphia: ASTM, 1965, p. 30—81.
5. *Андрейкив А. Е.* Разрушение квазихрупких тел с трещинами при сложном напряженном состоянии. Киев: Наук. думка, 1979. 141 с.
6. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
7. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.

Львов

Поступила в редакцию 28.XII.1983