УДК 539.374

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА СВЯЗИ НАПРЯЖЕНИЙ С ДЕФОРМАЦИЯМИ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

МУРАВЛЕВ А. В.

Двучленная форма закона связи напряжений с деформациями для произвольного процесса нагружения в пятимерном пространстве деформаций записывается в сферических координатах. Сравниваются соотношения для упругих и идеально пластических деформаций.

Напряженно-деформированное состояние (σ_{ij}, ε_{ij}) окрестности точки тела описывается шаровыми тензорами — $p=\sigma_{kk}/3$, $\theta=\varepsilon_{kk}$ и девиаторами s_{ij}, e_{ij}, которым ставятся в соответствие пятимерные векторы напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и деформации $\mathbf{e}$ в евклидовых пространствах Σ_5 и e_5 соответственно [1]. В процессе деформирования окрестности точки тела конец вектора $\mathbf{e}(t)$ описывает в e_5 определенную пятимерную кривую, называемую траекторией деформации, с длиной дуги $s(t)$: $(ds/dt)^2=(de_{ij}/dt)(de_{ij}/dt)$. Предполагается, что в каждой точке траектории деформации существует ортонормированный репер Френе:

$$\mathbf{p}_1=\frac{d\mathbf{e}}{ds}\equiv\mathbf{e}',\quad \mathbf{p}_2=\frac{\mathbf{e}''}{\sqrt{e_{22}}},\quad \mathbf{p}_3=\frac{1}{\sqrt{e_{22}\Delta_3}}\left(e_{22}{}^2\mathbf{e}'-\frac{1}{2}e_{22}{}'\mathbf{e}''+e_{22}\mathbf{e}'''\right),\ldots,\mathbf{p}_5$$

$$e_{22}=(\mathbf{e}''\cdot\mathbf{e}''),\quad e_{33}=(\mathbf{e}'''\cdot\mathbf{e}'''),\quad \Delta_3=e_{22}e_{33}-e_{22}{}^3-{}^1/_4(e_{22}{}')^2$$

Тогда для него выполняются обобщенные формулы Френе [1]:

$$\mathbf{p}_n'=-\varkappa_{n-1}\mathbf{p}_{n-1}+\varkappa_n\mathbf{p}_{n+1},\quad \varkappa_0=\varkappa_5=0\quad(n=1,\ldots,5)$$
$$\varkappa_1=\sqrt{e_{22}},\quad \varkappa_2=\sqrt{\Delta_3}/e_{22},\ldots \tag{1}$$

где $\varkappa_n(s)$ $(n=1,\ldots,4)$ — параметры кривизны и кручения траектории деформации.

Вектор $\boldsymbol{\sigma}(s)$ можно разложить в репере $\mathbf{p}_n(s)$:

$$\boldsymbol{\sigma}=\sigma\cos\vartheta_n\mathbf{p}_n,\quad \vartheta_n=\arccos(\boldsymbol{\sigma}_0\cdot\mathbf{p}_n),\quad \boldsymbol{\sigma}_0=\boldsymbol{\sigma}/\sigma,\quad \cos\vartheta_n\cos\vartheta_n=1\ _{(n=1,\ldots,5)} \tag{2}$$

где $\sigma=\sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ — модуль $\boldsymbol{\sigma}$, причем на основании постулата изотропии [1, 2] σ, ϑ_n являются функционалами параметров кривизны и кручения $\varkappa_k(s)$, температуры $T(s)$, давления $p(s)$ и закона движения точки $s(t)$ (в случае реономных свойств).

Исходя из гипотезы локальной определенности показано [3, 4], что возможной формой закона связи между $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{e}$ при произвольном процессе деформирования является двучленное соотношение: $\mathbf{e}'=L\boldsymbol{\sigma}+(E)\boldsymbol{\sigma}'$, где L, (E) — функционалы процесса. Аналогично функциям N, P, которые введены в [2] для процессов деформирования в виде прямолинейных двузвенных ломаных, при произвольном процессе деформирования можно ввести в рассмотрение функционалы процесса N, P, которые выражаются через функционалы L, (E), и записать двучленное соотношение в виде

$$\boldsymbol{\sigma}'=N\mathbf{e}'-(N-P)(\boldsymbol{\sigma}_0\cdot\mathbf{e}')\boldsymbol{\sigma}_0 \tag{3}$$

В [5] при определенных ограничениях на параметр кручения $\varkappa_2$ траектории деформации из закона связи между $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{e}$ (3) получено следующее уравнение для $\vartheta_1\equiv\vartheta$ и σ:

$$\vartheta'+\varkappa=-(N/\sigma)\sin\vartheta \tag{4}$$

причем в теориях упругости и идеальной пластичности $N=2G$.

Ограничения, принятые в [5] для плоского напряженного состояния, могут быть сняты, и связь между ϑ_n', ϑ_n, $\varkappa_k$, вытекающая из (3), — дана в другой форме. Для этого вместо угловых координат ϑ_n вводятся обобщенные сферические координаты φ_k $(k=1,\ldots,4)$, которые связаны с ϑ_n следующим образом:

$$\vartheta_1\equiv\varphi_1,\quad \cos\vartheta_n=\cos\vartheta_{n-1}\operatorname{tg}\varphi_{n-1}\cos\varphi_n,\quad \varphi_5\equiv0\quad(n=2,\ldots,5) \tag{5}$$

Подставляя в (3) выражение для $\boldsymbol{\sigma}$ из (2), где $\cos\vartheta_n$ считаются выраженными через φ_k по формулам (5), и используя формулы Френе (1), получим пять соотношений:

$$A_m\sigma'+(B_{mk}\varphi_k'+C_{mk}\varkappa_k)\sigma=D_m-A_m(N-P)\cos\varphi_1\quad(m=1,\ldots,5;\ k=1,\ldots,4)$$
$$A_m=\cos\vartheta_m,\quad B_{mk}=F_{mk}A_m\operatorname{ctg}\varphi_k,\quad D_1=N,\quad D_n=0\quad(n\neq1) \tag{6}$$

где F_{mk} и C_{mk} определяются из таблицы.

m	F_{m1}	F_{m2}	F_{m3}	F_{m4}	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}	C_{m4}
1	$-\operatorname{tg}^2\varphi_1$	0	0	0	$-A_2$	0	0	0
2	1	$-\operatorname{tg}^2\varphi_2$	0	0	A_1	$-A_3$	0	0
3	1	1	$-\operatorname{tg}^2\varphi_3$	0	0	A_2	$-A_4$	0
4	1	1	1	$-\operatorname{tg}^2\varphi_4$	0	0	A_3	$-A_5$
5	1	1	1	1	0	0	0	A_4

Исключая в (6) производную σ', получим четыре соотношения:

$$\sin\varphi_{k-1}(\varphi_k'+\varkappa_k\cos\varphi_{k+1})=\varkappa_{k-1}\sin\varphi_k\cos\varphi_{k-1},\quad \varphi_5\equiv 0\quad (k=2,\ 3,\ 4) \tag{7}$$

$$\varphi_1'+\varkappa_1\cos\varphi_2=-(N/\sigma)\sin\varphi_1 \tag{8}$$

Для σ' имеем уравнение $\sigma'=P\cos\varphi_1$.

В механике сплошной среды имеют большое значение соотношения, сохраняющие свой вид для различных материалов. В соотношения (7) не входят явно функционалы N, P, следовательно, вид этих соотношений одинаков для всех материалов, векторные свойства которых описываются компланарностью трех векторов, входящих в (3). В частности, они справедливы в упругой и пластической областях деформаций. В соотношение (8) явно входит только функционал N, причем в случаях упругого и идеально пластического тела $N=2G$. Исходя из этого можно обобщить гипотезу из [5] в виде утверждения о применимости соотношения (8), в котором положено $N=2G$, также и для упрочняющихся материалов.

В общем случае плоского напряженного состояния и в других случаях, когда изображающее пространство является трехмерным, полагая в (7), (8) $\varphi_1\equiv\vartheta$, $\varphi_2\equiv\varphi$, $\varphi_3\equiv\varphi_4\equiv 0$, $\varkappa_1\equiv\varkappa$, $\varkappa_2\equiv\tau$, $\varkappa_3\equiv\varkappa_4\equiv 0$, получаем соотношения

$$\sigma'=P\cos\vartheta,\quad \vartheta'+\varkappa\cos\varphi=-(N/\sigma)\sin\vartheta,\quad \sin\vartheta(\varphi'+\tau)=\varkappa\sin\varphi\cos\vartheta \tag{9}$$

Следовательно, при известном N известна и функциональная связь между углом сближения ϑ, углом депланации φ, параметрами кривизны $\varkappa$, кручения τ и модулем σ.

Если, начиная с некоторой точки s_0, траектория деформации становится прямолинейной, т. е. $\mathbf{e}'(s)=\mathbf{e}'(s_0)$, $\varkappa(s)=0$, $\tau(s)$ — произвольная функция s, $s\geqslant s_0$, то из (9) следует $\varphi'=-\tau$ при $s\geqslant s_0$. Это означает, что изменение угла φ происходит только в результате вращения репера Френе вокруг $\mathbf{e}'(s)$, а вектор $\boldsymbol{\sigma}(s)$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{\sigma}(s_0)$ и $\mathbf{e}'(s_0)$, что согласуется с гипотезой локальной определенности [4].

Автор приносит благодарность А. А. Ильюшину и В. С. Ленскому за руководство работой и сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. *Ильюшин А. А.* Вопросы общей теории пластичности.— ПММ, 1960, т. 24, вып. 3, с. 399—411.
3. *Ленский В. С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций.— В кн.: Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 58—82.
4. *Ленский В. С.* Гипотеза локальной определенности в теории пластичности.— Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1962, № 5, с. 154—158.
5. *Васин Р. А., Ильюшин А. А.* Об одном представлении законов упругости и пластичности в плоских задачах.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 114—118.

Москва

Поступила в редакцию 4.X.1983

УДК 539.3

ТОНКОЕ УПРУГОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ В УСЛОВИЯХ СДВИГА

СИЛОВАНЮК В. П., СТАДНИК М. М.

В рамках теории упругости на основе приближенного подхода получены интегральные уравнения для включения, ограниченного сплющенной гладкой поверхностью. Для случая эллипсоидальной поверхности получено замкнутое решение