МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1984

УДК 539.3:534.1

КОСОЙ УДАР ПО УПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

БУРЕНИН А. А., ШАРУДА В. А.

Построено приближенное решение динамической задачи нелинейной теории упругости о переходном процессе деформирования упругого полупространства при нагружении его граничной плоскости. Используется метод замены исходной нелинейной задачи последовательным интегрированием линейных неоднородных уравнений.

Решение задачи в случае ее автомодельности получено в [1]. Метод решения, близкий к использованному в публикуемой работе, применялся ранее в [2] только в случаях гладкого нагружения и при отсутствии сдвиговых деформаций. Эти ограничения необходимы для того, чтобы передний фронт возмущенной области распространялся с постоянной скоростью, иначе граничные условия задаются на движущихся поверхностях разрывов (ударных волнах), положение которых находится лишь в процессе решения задачи. Ниже процесс приближения построен так, чтобы положение поверхностей разрывов определялось на каждом шаге через предыдущие приближения. Отметим, что условия существования ударных волн в деформированной упругой среде и закономерности их распространения изучались в [3–5].

1. Пусть с момента времени $t=0$ на границе $x_1=0$ недеформированного упругого полупространства $x_1\geqslant 0$ действует нагрузка таким образом, что точки среды, расположенные на граничной плоскости, движутся по закону $x_1=g(t)$, $x_2=h(t)$, $(g(0)=h(0)=0,\ g(t)\geqslant 0,\ [g'(0)]^2+[h'(0)]^2>0)$. В переменных Эйлера уравнения движения упругой среды запишутся в виде [1, 6]:

$$u_{1,11}+2\varkappa_1 u_{1,1}u_{1,11}+2\varkappa_2 u_{2,1}u_{2,11}=(1/G_0^2)\,[\ddot{u}_1(1-2u_{1,1})+2\dot{u}_1\dot{u}_{1,1}]+\ldots$$

$$u_{2,11}(1-2u_{1,1})+\varkappa_3(u_{1,11}u_{2,1}+u_{1,1}u_{2,11})=$$
$$=(\beta^2/G_0^2)\,[\ddot{u}_2(1-3u_{1,1})+2\dot{u}_{2,1}\dot{u}_1+u_{2,1}\ddot{u}_1]+\ldots \qquad (1.1)$$

$$\varkappa_1=[3(l+m+n)-{}^9/_2(\lambda+2\mu)]/(\lambda+2\mu),\quad \varkappa_2=\gamma/(\lambda+2\mu)$$

$$\varkappa_3=2\gamma/\mu+1,\quad \gamma=3n/4+l/2-\lambda/2-2\mu$$

$$G_0^2=(\lambda+2\mu)/\rho_0,\quad \beta^2=(\lambda+2\mu)/\mu$$

Здесь учитывается, что компоненты вектора перемещений u_1, u_2 ($u_3=0$) зависят в рассматриваемом случае от одной только пространственной координаты x_1 и времени t; производная по времени обозначена точкой, производная по пространственной переменной — индексом после запятой; точками обозначены члены с $u_{1,1}$ или $u_{2,1}$ в третьей и более высоких степенях; λ, μ — параметры Ламе; ρ_0 — плотность среды в свободном состоянии; l, m, n — упругие модули третьего порядка [1, 3].

Решение этой задачи в случае линейной упругой среды имеет вид

$$u_1=g(r_1),\quad u_2=h(r_2),\quad r_1=t-x/G_0,\quad r_2=t-\beta x/G_0 \qquad (1.2)$$

Передним фронтом продольных деформаций является ударная волна постоянной интенсивности $\tau_0=[u_{1,1}]=u^+_{1,1}-u^-_{1,1}=-u^-_{1,1}=g'(0)/G_0$. Аналогично вычисляется интенсивность переднего фронта сдвиговых возмущений $\omega_0 = -u_{2,1}^{-} = h'(0)/(\beta G_0)$. Эти интенсивности, как и любые деформации, считаются малыми. В дальнейшем будем считать их малыми и проследим за качественными изменениями в процессе деформирования полупространства, вызванными учетом нелинейностей.

В нелинейной теории упругости скорости ударных волн не являются постоянными. Они зависят от деформированного состояния перед поверхностью разрывов и от их интенсивности. Поскольку $g(t) \geqslant 0$, передним фронтом объемных деформаций является ударная волна, распространяющаяся по недеформированной среде. В этом случае она является продольной [3, 4] и ее скорость вычисляется соотношением

$$G_1 = G_0(1 - \varkappa_1\tau/2 + \ldots), \quad \tau = -u_{1,1}^{-} \tag{1.3}$$

Если $u_{2,1}^{+} = 0$, то передний фронт сдвиговых деформаций не может быть чисто поперечной волной [3, 4]. Для скорости его распространения, используя методику отмеченных работ, можно найти

$$G_2 = (G_0/\beta)(1 + \beta u_1^{\cdot +}/G_0 + \varkappa_4 u_{1,1}^{-} + \ldots), \quad \varkappa_4 = \gamma/\mu + 1 \tag{1.4}$$

Таким образом, граничные условия задачи, представляющие собой оговоренные выше условия нагружения полупространства и условия непрерывности перемещений на поверхностях разрывов, имеют вид

$$\begin{gathered} u_1|_{x_1=g(t)} = g(t), \quad u_2|_{x_2=g(t)} = h(t) \\ u_1|_{x_1=R_1(t)} = 0, \quad u_2|_{x_2=R_2(t)} = 0, \quad [u_1]|_{x_1=R_2(t)} = 0 \\ [u_1] = u_1^{+} - u_1^{-}, \quad R_1(t) = \int_0^t G_1(\sigma)\,d\sigma, \quad R_2(t) = \int_0^t G_2(\sigma)\,d\sigma \end{gathered} \tag{1.5}$$

2. Запишем уравнения (1.1) и граничные условия (1.5) в безразмерной форме. Для этого введем переменные $u_1 = V_0^2 a^{-1} w$, $u_2 = V_0^2 a^{-1} s$, $x_1 = V_0^{3/2} G_0^{1/2} a^{-1} z$, $t = V_0 a^{-1}\theta$, где $V_0 = g'(0)$, $a = g''(0)$. Если $g'(0) = 0$, то в качестве V_0 можно принять $h'(0)$; было оговорено, что в начальный момент времени хотя бы одна из этих производных отлична от нуля. Если $g''(0) = 0$, то можно считать $a = h''(0)$. В случае, когда $h''(0) = g''(0) = 0$, задача является автомодельной и подробно исследована в [1]. В безразмерных переменных w, s, z, θ уравнения (1.1) и первые два граничных условия из (1.5) перепишутся в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2\varepsilon\left(\varkappa_1 \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \varkappa_2 \frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right) - \varepsilon^2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\left(1 - 2\varepsilon\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \right. \\ \left. + 2\varepsilon\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \theta}\right] + \ldots = 0 \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} + \varepsilon\left[\varkappa_3 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\frac{\partial s}{\partial z} + (\varkappa_3 - 2)\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\frac{\partial w}{\partial z}\right] - \beta^2\varepsilon^2\left[\frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2}\left(1 - 3\varepsilon\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \right. \\ \left. + 2\varepsilon\frac{\partial^2 s}{\partial z \partial \theta} + \varepsilon\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right] + \ldots = 0, \quad \varepsilon = \frac{V_0^{1/2}}{G_0^{1/2}} \\ w|_{z=\varepsilon g_1(\theta)} = g_1(\theta), \quad s|_{z=\varepsilon g_1(\theta)} = h_1(\theta) \\ g_1(\theta) = aV_0^{-2} g(V_0 a^{-1}\theta), \quad h_1(\theta) = aV_0^{-2} h(V_0 a^{-1}\theta) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Будем считать ε малой величиной и искать решение (2.1) в виде степенного ряда по ε. Обычная процедура последовательных приближений позволяет, согласно (2.1), (2.2), определить искомые функции с точностью до неопределенных функций $f_n(\theta)$ и $p_n(\theta)$ следующим образом:

$$w^e(z,\ \theta)=f_0(\theta)z+g_1(\theta)+\varepsilon[f_1(\theta)z-f_0(\theta)g_1(\theta)]+$$
$$+\varepsilon^2\{f_0''(\theta)z^3/6+g_1''(\theta)z^2/2+f_2(\theta)z-f_1(\theta)g_1(\theta)\}+\ldots$$
$$s^e(z,\ \theta)=p_0(\theta)z+h_1(\theta)+\varepsilon[p_1(\theta)z-p_0(\theta)g_1(\theta)]+$$
$$+\varepsilon^2\{\beta^2[p_0''(\theta)z^3/6+h_1''(\theta)z^2/2]+p_2(\theta)z-p_1(\theta)g_1(\theta)\}+\ldots \tag{2.3}$$

Функции $f_n(\theta)$ и $p_n(\theta)$ $(n=0, 1, 2\ldots)$ не могут быть определены из условий непрерывности перемещений на поверхностях разрыва (1.5), поскольку разложения (2.3) решения задачи справедливы только вблизи граничной плоскости деформируемого полупространства. Чтобы получить разложение решения вдали от граничной плоскости, введем новый масштаб пространственной переменной, положив $y=z\varepsilon$. Тогда уравнения (2.1) примут вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+2\varepsilon^2\left[\varkappa_1\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\varkappa_2\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial\theta}\right]+\ldots=0$$
$$\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}-\beta^2\frac{\partial^2 s}{\partial\theta^2}+\varepsilon^2\left[\varkappa_3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial s}{\partial y}+(\varkappa_3-2)\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial y}\right]+ \tag{2.4}$$
$$+\beta^2\varepsilon^2\left(3\frac{\partial^2 s}{\partial\theta^2}\frac{\partial w}{\partial y}-2\frac{\partial^2 s}{\partial y\,\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+\ldots=0$$

Всю деформированную область можно разделить на две области. В области A, заключенной между передним фронтом сдвиговых возмущений и граничной плоскостью, процесс деформирования упругой среды описывается системой уравнений (2.4). Условия непрерывности перемещений на поверхности разрыва запишем учитывая (1.3) и (1.4):

на переднем фронте объемных деформаций

$$w|_{y=T_1(\theta)}=0,\qquad T_1(\theta)=\int_0^\theta\left(1-\frac{1}{2}\varkappa_1\tau(\sigma)+\ldots\right)d\sigma \tag{2.5}$$
$$\tau(\theta)=-\varepsilon^2\frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_{y=T_1(\theta)}$$

на переднем фронте сдвиговых деформаций

$$s|_{y=T_2(\theta)}=0,\quad [w]|_{y=T_2(\theta)}=0 \tag{2.6}$$
$$T_2(\theta)=\frac{1}{\beta}\int_0^\theta\left[1+\varepsilon^2\left(\beta\frac{\partial w^+}{\partial\theta}+\varkappa_4\frac{\partial w^-}{\partial y}\right)+\ldots\right]\bigg|_{y=T_2(\theta)}d\theta$$

Область B заключена между плоскостями разрывов. В этой области сдвиговые деформации отсутствуют $(s=0)$. Процесс деформирования в этой области будет описываться первым уравнением из (2.4), если в нем положить $s=0$.

В уравнения (2.4) и граничные условия (2.5), (2.6) малый параметр ε входит только в четной степени, поэтому решение задачи будем искать в виде разложения по четным степеням ε. Сравнение членов с одинаковыми степенями ε приводит к необходимости интегрировать на каждом шаге линейные неоднородные волновые уравнения, правые части которых определяются предыдущими приближениями. Положение поверхностей разрывов в нулевом приближении совпадает с их положением в соответствующей линейной упругой среде, на каждом последующем шаге оно уточняется с помощью предыдущих приближений согласно соотношениям (2.5) и (2.6). Решение краевых задач, следующих из (2.4)—(2.6), для коэффициентов степенного ряда не содержит принципиальных трудностей, так что искомое решение может быть представлено разложениями

$$w^i(y,\theta)=F_0(y-\theta)+\varepsilon^2\Big\{-{}^1/_4\varkappa_1[F_0'(y-\theta)]^2(y+\theta)+F_2(y-\theta)-$$

$$-\frac{\varkappa_2\beta^3}{2(\beta-1)}\int\limits_0^{y-\theta}\Big\{\Big[\Phi_0'\Big(\frac{\beta+1}{2}\xi+\frac{\beta-1}{2}(y+\theta)\Big)\Big]^2-\Big[\Phi_0'\Big(\frac{\beta+1}{2}\xi\Big)\Big]^2d\xi\Big\}+\ldots$$

$$(2.7)$$

$$s^i(y,\theta)=\Phi_0(\beta y-\theta)+\varepsilon^2\Big\{-\Phi_0'(0)(\varkappa_4-\beta)\frac{\beta}{1-\beta}\times$$

$$\times F_0\Big(\frac{1-\beta}{2\beta}(\beta y+\theta)\Big)+\Phi_2(\beta y-\theta)+\frac{1}{2(1-\beta)}\times$$

$$\times\int\limits_0^{\beta y-\theta}\Big\{\Phi_0''(\xi)\Big[F_0\Big(\frac{1+\beta}{2\beta}\xi+\frac{1-\beta}{2\beta}(\beta y+\theta)\Big)-F_0\Big(\frac{1+\beta}{2\beta}\xi\Big)\Big]+$$

$$+\Phi_0'(\xi)\Big[F_0'\Big(\frac{1+\beta}{2\beta}\xi+\frac{1-\beta}{2\beta}(\beta y+\theta)\Big)-F_0'\Big(\frac{1+\beta}{2\beta}\xi\Big)\Big]\Big\}d\xi\Big\}+\ldots$$

$$w^j(y,\theta)=F_0(y-\theta)+\varepsilon^2\{-{}^1/_4\varkappa_1[F_0'(y-\theta)]^2(y+\theta)+F_2(y-\theta)-$$

$$-\frac{\varkappa_2\beta^3}{2(\beta-1)}\int\limits_0^{y-\theta}\Big\{\Big[\Phi_0'\frac{\beta+1}{2}(\xi-y+\theta)\Big)\Big]^2-\Big[\Phi_0'\Big(\frac{\beta+1}{2}\xi\Big)\Big]^2\Big\}d\xi\Big\}+\ldots$$

$$(2.8)$$

$$\tau=-\varepsilon^2\Big\{F_0'(0)+\frac{\varkappa_1}{2}\varepsilon^2[F_0'(0)]^2\theta\Big\}-\varepsilon^4\Big\{F_2'(0)-$$

$$-\frac{\varkappa_1}{4}[(F_0'(0))^2+4F_0'(0)F_0''(0)\theta]\Big\}-$$

$$-\frac{\varkappa_2\beta^3}{2(\beta-1)}\varepsilon^4\{[\Phi_0'(\beta-1)\theta)]^2-[\Phi_0'(0)]^2\}+\ldots$$

В (2.7) и (2.8) функции $F_n(\zeta)$, $\Phi_n(\zeta)$ неизвестны и должны быть определены сращиванием разложений (2.7) с разложениями (2.3); через $w^j(y,\theta)$ обозначено разложение решения задачи в зоне B. Сращивание проводилось по способу, предложенному Ван-Дайком [7], когда в (2.7) вводилась обратная замена переменной $y=\varepsilon z$ и функции $F_n(\zeta)$, $\Phi_n(\zeta)$ раскладывались в ряд по ε, после чего сравнивались члены в (2.7) и (2.3) с одинаковыми степенями ε. Отметим отличительную особенность данной задачи: так как разложения (2.3) являются полиномами по z, то отпадает необходимость проводить в них обратную замену $z=y/\varepsilon$, раскладывать функции в ряд по степеням ε. С другой стороны, это обстоятельство приводит к тому, что разложение вблизи границы полупространства совпадает с общей частью разложений. В других задачах нелинейной динамической теории упругости разложение вблизи границы среды существенно отличается от общей части разложений вблизи границы и вблизи поверхностей разрывов (например, в задаче о сферическом поршне в упругой среде).

Разложение (2.8) с подставленными в него функциями $F_n(\zeta)$, $\Phi_n(\zeta)$, найденными согласно условиям сращивания, описывают процесс деформирования в зоне B, разложения (2.7) — в зоне A. Вблизи границы среды решение описывается разложениями (2.3), в которых функции $f_n(\theta)$ и $p_n(\theta)$ определены при сращивании. Равномерно пригодное составное разложение [7], справедливое во всей зоне A, найдем сложив w^i с w^e, s^i с s^e и вычитая из этих сумм их общие части. Таким образом, возвращаясь к размерным переменным, найдем окончательно

$$u_1{}^A=g(r_1)-\frac{\varkappa_1}{2G_0{}^2}x[g'(r_1)]^2-\frac{\varkappa_2\beta^3}{2(1-\beta)}\frac{1}{G_0}\int_0^{r_1}\left\{\left[h'\left(\frac{1+\beta}{2}\xi+\frac{1-\beta}{2}r_3\right)\right]^2-\right.$$

$$\left.-\left[h'\left(\frac{1+\beta}{2}\xi+\frac{1-\beta}{2}r_1\right)\right]^2\right\}d\xi+O(\varepsilon^3) \qquad (2.9)$$

$$u_2{}^A=h(r_2)+(\beta-\varkappa_4)\frac{\beta}{\beta-1}\frac{V_0}{G_0}\left[g\left(\frac{\beta-1}{2\beta}r_4\right)-g\left(\frac{\beta-1}{2\beta}r_2\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2(1-\beta)}\frac{1}{G_0}\int_0^{r_2}\left\{\beta(1+\varkappa_3-2\beta)h''(\xi)\left[g\left(\frac{\beta+1}{2\beta}\xi+\frac{\beta-1}{2\beta}r_4\right)-\right.\right.$$

$$\left.-g\left(\frac{\beta+1}{2\beta}\xi+\frac{\beta-1}{2\beta}r_2\right)\right]+(\varkappa_2-\beta^2)h'(\xi)\times$$

$$\left.\times\left[g'\left(\frac{\beta+1}{2\beta}\xi+\frac{\beta-1}{2\beta}r_4\right)-g'\left(\frac{\beta+1}{2\beta}\xi+\frac{\beta-1}{2\beta}r_2\right)\right]\right\}d\xi+O(\varepsilon^3)$$

$$u_1{}^B=g(r_1)-\frac{\varkappa_1}{2G_0{}^2}x[g'(r_1)]^2-\frac{\varkappa_2\beta^3}{2(1-\beta)}\frac{1}{G_0}\int_0^{r_1}\left\{\left[h'\left(\frac{1+\beta}{2}(\xi+r_1)\right)\right]^2-\right.$$

$$\left.-\left[h'\left(\frac{1+\beta}{2}\xi+\frac{1-\beta}{2}r_1\right)\right]^2\right\}d\xi+O(\varepsilon^3),$$

$$u_2{}^B=0,\qquad r_3=t+\frac{x}{G_0},\qquad r_4=t+\frac{\beta x}{G_0}$$

$$\tau=-\frac{V_0}{G_0}-\frac{V_0{}^2}{G_0{}^2}\left\{\frac{\varkappa_1}{2}\left(1-\frac{at}{V_0}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\varkappa_2\beta^3}{2(1-\beta)}\frac{1}{V_0{}^2}[(h'((1-\beta)t))^2-(h'(0))^2]\right\}+O(\varepsilon^6)$$

Разложения (2.9) описывают процесс динамического деформирования с погрешностью $O(\varepsilon^3)$. Последующие приближения получаются аналогично вычисленным, но являются существенно более громоздкими, поэтому здесь не приводятся. Из (2.9) следует, что нулевое приближение (первые слагаемые в (2.9)) соответствует решению задачи в случае линейной упругой среды (1.2). Последующие члены разложения, связанные с учетом нелинейностей, указывают на то, что деформации изменения объема зависят от интенсивности производимого сдвига и отличны от нуля в сравнении с линейным случаем даже при $g(t)\equiv 0$. В частности, передним фронтом распространяющихся деформаций и при выполнении этого условия является продольная ударная волна ($\tau\neq 0$). Таким образом, сдвиговые деформации в сжимаемой упругой среде неотделимы от объемных. В свою очередь, объемные деформации влияют на распределение сдвиговых, но могут существовать отдельно от них при $h(t)\equiv 0$.

Полученные решения могут быть полезны в тех случаях, когда взаимное влияние объемных и сдвиговых деформаций существенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буренин А. А., Лапыгин В. В.* Автомодельная задача об ударном нагружении упругого полупространства.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 722—729.
2. *Нигул У. К.* Отклонение решения квазилинейного волнового уравнения от решения линейного уравнения в области непрерывных первых производных.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 3, с. 434—447.

3. *Буренин А. А., Чернышов А. Д.* Ударные волны в изотропном упругом пространстве.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 4, с. 711—717.
4. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Об ударных волнах, распространяющихся по напряженному состоянию в изотропных нелинейно-упругих средах.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 523—534.
5. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 5, с. 831—840.
6. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 536 с.
7. *Найфе А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
14.XI.1983