МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1984

О РЕЗОНАНСНЫХ ДВИЖЕНИЯХ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

ЕРОПКИНА Т. А.

Анализ устойчивости резонансных стационарных вращений твердого тела в магнитном поле для случаев динамически симметричного тела и произвольного тела был проведен в [1, 2]. В публикуемой работе рассматриваются резонансные вращения твердого тела с произвольным эллипсоидом инерции, когда его угловая скорость близка к скорости вращения поля. Построены осредненные уравнения, описывающие поведение медленных переменных задачи с учетом резонансных эффектов.

1. Рассмотрим твердое тело, имеющее неподвижную точку O, совпадающую с центром масс тела.

Введем правые ортогональные трехгранники $\xi_1\xi_2\xi_3$, $\eta_1\eta_2\eta_3$ и $x_1x_2x_3$ с началом в точке O. Оси ξ_i неизменно ориентированы в пространстве, оси η_i связаны с вращающимся магнитным полем, оси x_i — главные центральные оси инерции тела. Пусть ось $\xi_3(\eta_3)$ совпадают с осью вращения поля, а ось η_1 направлена так, что вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ лежит в плоскости $\eta_1\eta_3$. Пусть $H=\text{const}$ — модуль вектора напряженности, ω — угловая скорость вращения поля вокруг оси ξ_3, β — угол между вектором $\mathbf{H}$ и осью вращения поля, t — время, тогда

$$\mathbf{H}=\|H\sin\beta\cos\omega t,\quad H\sin\beta\sin\omega t,\quad H\cos\beta\|^*$$

здесь звездочка означает транспонирование.

Предположим, что рассматриваемое тело имеет область, занятую проводящим материалом и обладающую сферической симметрией. Кроме того, предположим, что «глубина проникновения» магнитного поля в проводящий материал много больше размеров тела. Используя результаты [3, 4], запишем выражение для момента сил M, действующих на проводящее твердое тело в однородном магнитном поле

$$\mathbf{M}_\xi=k_f(\mathbf{H}_\xi\times(\mathbf{H}_\xi\times\mathbf{\Omega}_\xi+\mathbf{H}_\xi^{\boldsymbol\cdot})) \tag{1.1}$$

Здесь нижний индекс означает, что соответствующий вектор записан в проекциях на оси ξ_i, $\mathbf{\Omega}_\xi$ — вектор угловой скорости тела, k_f — коэффициент пропорциональности, определяемый физическими характеристиками проводящей области тела и ее размерами.

Для матричной записи векторного произведения вектору $\mathbf{a}=\|a_1, a_2, a_3\|^*$ ставится в соответствие кососимметричная матрица

$$a^+=\begin{Vmatrix} -0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Перейдем в (1.1) к матричной форме записи

$$\mathbf{M}_\xi=M_0B^*h^+h^+(B\mathbf{\Omega}_\xi-\omega\xi_3),\qquad M_0=k_fH^2 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{h} = \begin{Vmatrix} \sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{Vmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{h}=\mathbf{H}_\eta H^{-1}$, ξ_3 — единичный вектор оси ξ_3, B — матрица ориентации трехгранника η относительно трехгранника ξ.

Из теоремы об изменении вектора кинетического момента твердого тела относительно центра масс имеем

$$\mathbf{L}_\xi^{\boldsymbol{\cdot}}=M_0B^*h^+h^+(B\Omega_\xi-\omega\xi_3) \tag{1.3}$$

Обозначим через A матрицу ориентации подвижного трехгранника x относительно неподвижного ξ ($\xi=Ax$) и запишем вторую группу уравнений движения

$$A^{\boldsymbol{\cdot}}=A\Omega_x^+ \tag{1.4}$$

Система уравнений (1.3), (1.4) образует замкнутую систему уравнений, однако нахождение точного решения не представляется возможным из-за нелинейности и громоздкости правых частей уравнений.

Для приближенного анализа уравнений используем наличие в задаче движений, имеющих различный временной масштаб. При раскрутке тела магнитным полем вектор кинетического момента мало меняется за период вращения поля и время раскрутки тела существенно больше времени, за которое поле совершает оборот вокруг оси ξ_3. Это позволяет разделить переменные на «быстрые» и «медленные», ввести малый параметр и использовать асимптотические методы.

Для нормализации уравнений перейдем к безразмерным переменным и параметрам с помощью соотношений

$$\mathbf{L}=L_0\mathbf{l}, \qquad t=T_0\tau, \qquad \mathbf{z}=\boldsymbol{\Omega}_xT_0, \qquad I_k=I_1i_k \qquad (k=1.2.3) \tag{1.5}$$

Здесь L_0 — характерное значение кинетического момента, выбираемое так, чтобы в рассматриваемом движении модуль вектора $\mathbf{l}$ был порядка единицы (примем $L_0=I_1\omega$, так как величиной порядка $I_1\omega$ определяется кинетический момент по окончании раскрутки тела); $I_1<I_2<I_3$ — главные центральные моменты инерции тела, $i_1=1$, i_2, i_3 — безразмерные моменты инерции, τ — безразмерное время, $\mathbf{z}$ — безразмерный вектор угловой скорости. В качестве T_0 возьмем величину, обратную угловой скорости вращения магнитного поля $T_0=\omega^{-1}$.

После подстановки (1.5) в (1.3) и (1.4) получим

$$l_\xi'=\varepsilon B^*h^+h^+(BAz-\xi_3), \qquad A'=Az^+ \tag{1.6}$$

Здесь $\varepsilon=M_0L_0^{-1}$, а штрихом обозначено дифференцирование по τ. Параметр ε можно рассматривать как отношение времени одного оборота магнитного поля к времени раскрутки тела. В реальных системах параметр ε имеет порядок 10^{-4}—10^{-6}, поэтому ε можно принять за малый параметр.

2. Непосредственное применение общей схемы осреднения к уравнениям (1.6) встречает затруднение. Поэтому введем оскулирующие переменные l, ρ, σ, ν, φ, ψ.

Для записи уравнений в оскулирующих элементах [5] введем трехгранник ζ с осью ζ_3, направленной по вектору кинетического момента тела. Трехгранник ζ получается из трехгранника ξ двумя последовательными поворотами: на угол σ вокруг оси ξ_3 и на угол ρ вокруг второй оси промежуточного трехгранника $\xi=C\zeta$:

$$C = \begin{Vmatrix} \cos\sigma\cos\rho & -\sin\sigma & \cos\sigma\sin\rho \\ \sin\sigma\cos\rho & \cos\sigma & \sin\sigma\sin\rho \\ -\sin\rho & 0 & \cos\rho \end{Vmatrix}$$

Положение тела относительно трехгранника ζ определяется обычными углами Эйлера: углом процессии ψ, углом нутации ν и углом собственного вращения φ. Переменная l является безразмерным модулем кинетического момента, $\mathbf{l}_\zeta=\|0, 0, l\|^*$.

Уравнения для оскулирующих переменных имеют вид [5]:

$$l\rho'=\varepsilon m_{\zeta_1}, \quad l\sin\rho\sigma'=\varepsilon m_{\zeta_2}, \quad l'=\varepsilon m_{\zeta_3} \tag{2.1}$$

$$\psi'=l\left(\frac{\sin^2\varphi}{i_1}+\frac{\cos^2\varphi}{i_2}\right)-\frac{\varepsilon}{l}(m_{\zeta_1}\cos\psi+m_{\zeta_2}\sin\psi)\operatorname{ctg}\nu-\frac{\varepsilon}{l}m_{\zeta_3}\operatorname{ctg}\rho$$

$$\nu'=l\left(\frac{1}{i_1}-\frac{1}{i_2}\right)\sin\nu\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\varepsilon}{l}(m_{\zeta_2}\cos\psi-m_{\zeta_1}\sin\psi)$$

$$\varphi'=l\left(\frac{1}{i_3}-\frac{\sin^2\varphi}{i_1}-\frac{\cos^2\varphi}{i_2}\right)\cos\nu+\frac{\varepsilon}{l\sin\nu}(m_{\zeta_1}\cos\psi+m_{\zeta_2}\sin\psi)$$

Перепроектируем вектор момента (1.2) в трехгранник ζ:

$$\mathbf{m}_\zeta=C^*\mathbf{m}_\xi=C^*B^*h^+h^+(BA\mathbf{z}-\xi_3), \quad \mathbf{m}_\xi=\mathbf{M}_\xi M_0^{-1} \tag{2.2}$$

Выразим z через l_ζ и, подставляя в (2.2), получим

$$\mathbf{m}_\zeta=C^*B^*h^+h^+(BC\Gamma I^{-1}\Gamma^*\mathbf{l}_\zeta-\xi_3) \tag{2.3}$$

где $I=\operatorname{diag}(i_1, i_2, i_3)$, Γ — матрица ориентации трехгранника x относительно ζ $(C\Gamma=A,\ \zeta=\Gamma x)$:

$$\Gamma=\left\|\begin{matrix}\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi\cos\nu & -\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi\cos\nu & \sin\psi\sin\nu\\ \sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi\cos\nu & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi\cos\nu & -\cos\psi\sin\nu\\ \sin\varphi\sin\nu & \cos\varphi\sin\nu & \cos\nu\end{matrix}\right\|$$

Система уравнений (2.1), (2.3) описывает рассматриваемое движение твердого тела. Переменные l, ρ, σ при этом являются медленными, а переменные φ, ψ, ν — быстрыми.

Согласно общей схеме, осредним правые части уравнений (2.1) для медленных переменных l, ρ, σ по траекториям быстрых переменных φ, ψ, ν [6].

При $\varepsilon=0$ невозмущенное движение относительно центра масс представляет собой движение Эйлера—Пуансо [7].

Если выполняется условие $2Ti_1\leqslant l^2\leqslant 2Ti_2$, то l, ρ, σ—const:

$$\cos\nu=\frac{1}{l}\left[\frac{(l^2-2Ti_1)i_3}{i_3-i_1}\right]^{1/2}\operatorname{cn}u, \quad \cos\varphi\sin\nu=\frac{1}{l}\left[\frac{(l^2-2Ti_1)i_2}{i_2-i_1}\right]^{1/2}\operatorname{sn}u$$

$$\sin\varphi\sin\nu=\frac{1}{l}\left[\frac{(2Ti_3-l^2)i_1}{i_3-i_1}\right]^{1/2}\operatorname{dn}u, \quad u=\left[\frac{(2Ti_3-l^2)(i_2-i_1)}{i_1i_2i_3}\right]^{1/2}(\tau-\tau_0) \tag{2.4}$$

Здесь $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{dn}u$ — эллиптические функции с периодом $4K(k)$, $4K(k)$, $2K(k)$ соответственно, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, k — модуль эллиптических функций

$$k^2=(i_3-i_2)(l^2-2Ti_1)/(i_2-i_1)(2Ti_3-l^2) \tag{2.5}$$

Величина T является кинетической энергией тела. При $\varepsilon=0$ T — константа, а при $\varepsilon\neq0$ T становится еще одной медленной переменной $T={}^1/_2l^2[(\sin^2\varphi/i_1+\cos^2\varphi/i_2)\sin^2\nu+\cos^2\nu/i_3]$.

Уравнение для переменной T можно получить непосредственным дифференцированием по τ его выражения через l, φ, ν, учитывая уравнения (2.1) или подсчитывая среднее значение мощности момента (2.3) на движении (2.4):

$$T'=\varepsilon\mathbf{l}_\zeta^*\Gamma I^{-1}\Gamma^*C^*B^*h^+h^+(BC\Gamma I^{-1}\Gamma^*\mathbf{l}_\zeta-\xi_3) \tag{2.6}$$

Решение (2.4) выписано для случая, когда траектория вектора кинетического момента охватывает ось x_1. В случае, когда выполнено условие

$2Ti_2 \leqslant l^2 \leqslant 2Ti_3$ и траектория вектора кинетического момента охватывает ось x_3, при $\varepsilon=0$ имеем l, ρ, σ, T—const:

$$\cos\nu = \frac{1}{l}\left[\frac{(l^2-2Ti_1)\,i_3}{i_3-i_1}\right]^{1/2}\operatorname{dn} u, \qquad \cos\varphi\sin\nu = \frac{1}{l}\left[\frac{(2Ti_3-l^2)\,i_2}{i_3-i_2}\right]^{1/2}\operatorname{sn} u$$

$$\sin\varphi\sin\nu = \frac{1}{l}\left[\frac{(2Ti_3-l^2)\,i_1}{i_3-i_1}\right]^{1/2}\operatorname{cn} u, \qquad u=\left[\frac{(l^2-2Ti_1)\,(i_3-i_2)}{i_1i_2i_3}\right]^{1/2}(\tau-\tau_0) \tag{2.7}$$

$$k^2=(i_2-i_1)\,(2Ti_3-l^2)\,(i_3-i_2)^{-1}(l^2-2Ti_1)^{-1}$$

Переменная $\psi(\tau)$ выражается в квадратурах и имеет структуру

$$\psi(\tau)=\omega_\psi\tau+\chi(\tau) \tag{2.8}$$

в которой ω_ψ — константа, а $\chi(\tau)$ — периодическая функция с периодом $4K(k)$. Выражение для ω_ψ можно получить осреднением эллиптических функций вдоль решений (2.4) или (2.7).

3. Нерезонансный случай данной задачи рассмотрен в работе [2]. Представляет интерес исследовать случай резонанса. Невозмущенное угловое движение твердого тела зависит от двух частот: ω_ψ и ω_ν, где $\omega_\nu=(2Ti_3-l^2)^{1/2}(i_2-i_1)^{1/2}(i_1i_2i_3)^{-1/2}$ или $\omega_\nu=(l^2-2Ti_1)^{1/2}(i_3-i_2)^{1/2}(i_1i_2i_3)^{-1/2}$, причем частоты ω_ψ и ω_ν не являются соизмеримыми [7]. Таким образом, резонанс может возникать лишь тогда, когда частота вращения магнитного поля (в силу нормализации она равна единице) и частота ω_ψ становятся близки, т. е.

$$\omega_\psi\approx 1 \tag{3.1}$$

Следуя схеме осреднения в резонансном случае [6], введем новую переменную α — фазовую расстройку, описывающую отклонение движения от чисто резонансного вращения

$$\alpha=\psi-\tau \tag{3.2}$$

В окрестности резонанса (3.1) переменная α является медленной, а уравнение для α определяется из (3.2) и (2.1):

$$\alpha'=l\left(\frac{\sin^2\varphi}{i_1}+\frac{\cos^2\varphi}{i_2}\right)-1-\frac{\varepsilon}{l}(m_{\zeta_1}\cos\psi+m_{\zeta_2}\sin\psi)\operatorname{ctg}\nu-\frac{\varepsilon}{l}m_{\zeta_2}\operatorname{ctg}\rho \tag{3.3}$$

Исключим одну быструю переменную, заменив ее через α по формуле: $\psi=\alpha+\tau$, и проведем осреднение правых частей уравнений для медленных переменных l, ρ, σ, α, T по явно входящему времени τ.

Проведя два этапа осреднения (сначала по линейным функциям времени, а потом по нелинейным [6]) правых частей уравнений (2.6), (3.3) и первых трех уравнений системы (2.1), получим систему приближенных дифференциальных уравнений для переменных l, ρ, σ, T и $\delta=\alpha+\sigma$. Так как решение порождающей системы зависит от соотношений между l и T, то второй этап осреднения, проводимый по нелинейным функциям, зависит от выполнения условий $2Ti_1\leqslant l^2\leqslant 2Ti_2$ или $2Ti_2\leqslant l^2\leqslant 2Ti_3$, т. е. осреднение проводится вдоль решений (2.4) или (2.7), соответственно, и решения (2.8).

В случае, когда $2Ti_1\leqslant l^2\leqslant 2Ti_2$, система осредненных уравнений имеет вид

$$l\rho'=\varepsilon[(1-3\cos^2\beta)\cos\rho Tl^{-1}-\sin^2\beta]\sin\rho, \quad \sigma'=0 \tag{3.4}$$

$$l'=\varepsilon\{-[1+\cos^2\beta+(1-3\cos^2\beta)\cos^2\rho]Tl^{-1}+\sin^2\beta\cos\rho\}$$

$$T'=\varepsilon\{-{}^1/_4[2(1+\cos^2\beta)+(1-3\cos^2\beta)\sin^2\rho]\langle z^2\rangle+2\sin^2\beta\cos\rho Tl^{-1}+$$
$$+(1-3\cos^2\beta)(1-3\cos^2\rho)T^2l^{-2}+{}^1/_8l^2(1+\cos\rho)^2\sin^2\beta\langle P^2-Q^2\rangle\cos 2\delta\}$$

$$\delta'=\omega_\psi-1-{}^1/_2\varepsilon\sin 2\beta[(\cos 2\rho+\cos\rho)Tl^{-1}-{}^1/_2(1+\cos\rho)]l^{-1}\cos\delta$$

$$\langle z^2\rangle=\frac{l^2}{i_0}\left\{\frac{i_2-i_1}{i_3}k^2+\frac{(i_3-i_2)(i_3+i_2-i_1)}{i_2 i_3}+\frac{(i_2-i_1)(i_3-i_2)(i_3-i_1)E(k)}{i_1 i_2 i_3 K(k)}\right\}$$

$$\langle P^2-Q^2\rangle=\frac{(i_3-i_1)(i_3-i_2)}{i_0 i_1 i_2 i_3}\left[\frac{(i_3-i_2)(i_3-i_1)i_1 i_2}{i_0 i_3}+\frac{(i_3-i_1)i_1}{i_3}+(i_2-i_1)\frac{E(k)}{K(k)}-\right.$$

$$\left.-2\frac{i_2(i_3-i_1)\Pi(\pi/2,k^2a^2,k)}{i_3 K(k)}\right],\qquad a^2=\frac{i_3(i_2-i_1)}{i_1(i_3-i_2)}$$

$$\omega_\psi=\frac{l}{i_3}\left[1+\frac{(i_3-i_1)\Pi(\pi/2,k^2a^2,k)}{i_1 K(k)}\right],\qquad i_0=i_1(i_3-i_2)+k^2 i_3(i_2-i_1)$$

где $K(k)$, $E(k)$, $\Pi(\pi/2,k^2a^2,k)$ — полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода соответственно.

Полученная система осредненных уравнений близка к аналогичной системе, полученной для нерезонансного случая в [2]. Первые три уравнения в (3.4) совпадают полностью, а четвертое имеет дополнительное слагаемое. Последнее уравнение имеет смысл только тогда, когда выполняется резонансное соотношение (3.1). Если же условие (3.1) не выполняется, переменные α и δ становятся быстрыми, функция $\cos 2\delta$ осредняется с нулевым средним значением и при этом система (3.4) полностью совпадает с аналогичной системой в [2].

Система осредненных уравнений (3.4) не является замкнутой так как величины $\langle z^2\rangle$, $\langle P^2-Q^2\rangle$ и ω_ψ зависят от модуля эллиптических функций k. Поэтому для замыкания системы надо выписать дифференциальное уравнение для переменной k. Дифференцируя по τ (2.5) и используя (3.4), получим

$$(k^2)'=-\varepsilon[2(1+\cos^2\beta)+(1-3\cos^2\beta)\sin^2\rho]\left\{(1+\varkappa)(1-k^2)-\right.$$
$$\left.-[1+\varkappa+(1-\varkappa)k^2]\frac{E(k)}{K(k)}\right\}\frac{i_3-i_1}{4i_1i_3}- \tag{3.5}$$
$$-\frac{\varepsilon i_0^2}{4(i_2-i_1)(i_3-i_1)(i_3-i_2)}(1-\cos\rho)^2\sin^2\beta\langle P^2-Q^2\rangle\cos 2\delta$$
$$\varkappa=\frac{2i_1i_3-i_1i_2-i_2i_3}{i_2(i_3-i_1)}$$

Если в системе (3.4) уравнение относительно T заменить на (3.5), а переменную T выразить как функцию k^2, то получим замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию медленных переменных l, ρ, σ, k, δ рассматриваемой задачи о движении твердого тела в магнитном поле при условии, что траектории вектора кинетического момента охватывают ось x_1

$$l\rho'=\varepsilon[(1-3\cos^2\beta)\cos\rho Tl^{-1}-\sin^2\beta)\sin\rho,\quad \sigma'=0 \tag{3.6}$$
$$l'=-\varepsilon[1+\cos^2\beta+(1-3\cos^2\beta)\cos^2\rho]Tl^{-1}+\varepsilon\sin^2\beta\cos\rho$$
$$(k^2)'=-\varepsilon[2(1+\cos^2\beta)+(1-3\cos^2\beta)\sin^2\rho]\left\{(1+\varkappa)(1-k^2)-\right.$$
$$\left.-[1+\varkappa+(1-\varkappa)k^2]\frac{E(k)}{K(k)}\right\}\frac{i_3-i_1}{4i_1i_3}-\frac{\varepsilon i_0^2}{4(i_2-i_1)(i_3-i_1)(i_3-i_2)}\times$$
$$\times(1+\cos\rho)^2\sin^2\beta\langle P^2-Q^2\rangle\cos 2\delta$$
$$\delta'=\omega_\psi-1-{}^1/_2\varepsilon\sin 2\beta[(\cos 2\rho+\cos\rho)Tl^{-1}-{}^1/_2(1+\cos\rho)]l^{-1}\cos\delta$$
$$T={}^1/_2l^2[i_3-i_2+k^2(i_2-i_1)]i_0^{-1}$$

Из системы (3.6) следуют некоторые особенности движения: так как $\sigma=\mathrm{const}$, то во все время движения вектор кинетического момента остается в плоскости, проходящей через ось вращения поля ξ_3 и начальное положение вектора кинетического момента. Из первого уравнения (3.6) можно определить, что вектор кинетического момента стремится к положению, при котором он параллелен оси ξ_3 (т. е. $\rho\to 0$).

Для случая, когда кинетический момент находится в окрестности оси x_3 ($2Ti_2\leqslant l^2\leqslant 2Ti_3$), проведем осреднение правых частей уравнений (2.1), (2.6), (3.3) вдоль решения (2.7), (2.8). Заменим уравнение относительно переменной T на уравнение относительно k^2 и получим замкнутую систему осредненных уравнений

$$l\rho'=\varepsilon[(1-3\cos^2\beta)\cos\rho Tl^{-1}-\sin^2\beta+{}^1/_4 l\langle Q\rangle(1+2\cos\rho)\sin 2\beta\sin\delta]\sin\rho \tag{3.7}$$

$$l'=\varepsilon\{-[1+\cos^2\beta+(1-3\cos^2\beta)\cos^2\rho]Tl^{-1}+\sin^2\beta\cos\rho-$$
$$-{}^1/_4 l\langle Q\rangle(\cos 2\rho+\cos\rho)\sin 2\beta\sin\delta\},\quad \sigma'={}^1/_4\varepsilon\langle Q\rangle\sin 2\beta\cos\delta$$

$$(k^2)'=\varepsilon[2(1+\cos^2\beta)+(1-3\cos^2\beta)\sin^2\rho]\left\{(1-\varkappa)(1-k^2)-\right.$$
$$\left.-[1-\varkappa+(1+\varkappa)k^2]\frac{E(k)}{K(k)}\right\}\frac{i_3-i_1}{4i_1i_3}+\frac{\varepsilon i_0^2}{4(i_3-i_2)(i_2-i_1)(i_3-i_1)}\times$$
$$\times\{(1+\cos\rho)^2\sin^2\beta\langle P^2-Q^2\rangle\cos 2\delta-$$
$$-2\langle Q\rangle\sin 2\beta[2(\cos 2\rho+\cos\rho)Tl^{-1}-(1+\cos\rho)]l^{-1}\sin\delta\}$$

$$\delta'=\omega_\psi-1+{}^1/_8\varepsilon\{\sin^2\beta(1+\cos\rho)^2\langle Q\rangle\sin 2\delta+2\sin 2\beta(1-\cos\rho)\langle Q\rangle\cos\delta-$$
$$-2\sin 2\beta[2(\cos 2\rho+\cos\rho)Tl^{-1}-(1+\cos\rho)]\cos\delta l^{-1}\}$$

$$T={}^1/_2 l^2[i_2-i_1+k^2(i_3-i_2)]i_0^{-1},\quad i_0=i_3(i_2-i_1)+k^2i_1(i_3-i_2)$$

$$\langle P^2-Q^2\rangle=\frac{(i_3-i_2)(i_3-i_1)}{i_3i_0}\left\{\frac{i_2-i_1}{i_1i_2}\left[\frac{E(k)}{K(k)}-1\right]+\frac{i_3-i_1}{i_1i_3}\left[1-2\frac{\Pi(\pi/2,a^2,k)}{K(k)}\right]k^2+\right.$$
$$\left.+\frac{(i_3-i_2)(i_3-i_1)}{i_0i_3}k^4\right\}$$

$$\langle Q\rangle=k\frac{i_3-i_2}{i_0}\left[\frac{(i_2-i_1)(i_3-i_1)}{i_2i_3}\right]^{1/2}\frac{K(a(1+a^2)^{-1/2})}{K(k)},$$

$$\omega_\psi=l\left[\frac{1}{i_3}+\frac{(i_3-i_1)\Pi(\pi/2,a^2,k)}{i_1i_3K(k)}\right]$$

Отметим, что если резонансное соотношение (3.1) не выполняется, то переменная δ становится быстрой и после осреднения по δ система (3.7) совпадает с аналогичной системой из [2].

4. Исследуем полученные системы осредненных уравнений (3.6) и (3.7). Система (3.6) имеет частное решение

$$\rho_*=0,\quad l_*=i_1,\quad k_*=0,\quad \delta=\delta_*,\quad \sigma=\sigma_* \tag{4.1}$$

Это решение соответствует вращению тела вокруг оси наименьшего момента инерции x_1, и при этом $T_*={}^1/_2 l_*$, $\omega_{\psi_*}=1$, $\langle P^2-Q^2\rangle_*=0$.

Исследуем устойчивость решения (4.1). Для этого выпишем систему в вариациях

$$(\Delta\rho)'=-{}^1/_2\varepsilon(1+\cos^2\beta)i_1^{-1}\Delta\rho,\quad (\Delta\sigma)'=0 \tag{4.2}$$

$$(\Delta l)'=-\frac{\varepsilon}{i_1}\sin^2\beta\Delta l+\varepsilon\sin^2\beta\frac{(i_2-i_1)(i_3-i_1)}{i_1(i_3-i_2)}k^2$$

$$(k^2)'={}^1/_2\varepsilon\{[(i_3-i_1)i_2+(i_2-i_1)i_3](1+\cos^2\beta)+$$
$$+i_1(i_3-i_2)\sin^2\beta\cos 2\delta_*\}(i_1i_2i_3)^{-1}k^2$$

$$(\Delta\delta)' = \frac{1}{i_1} - \frac{\varepsilon}{2i_1^2}\sin 2\beta\cos\delta_*\Delta l - \frac{(i_2-i_1)(i_3-i_1)}{2(i_3-i_2)i_1^2}(i_1-\varepsilon\sin 2\beta\cos\delta_*)k^2$$

Характеристическое уравнение для системы (4.2) имеет вид

$$p^2\left(p+\varepsilon\frac{1+\cos^2\beta}{2i_1}\right)\left(p+\varepsilon\frac{\sin^2\beta}{i_1}\right)\left[p-\varepsilon\frac{(i_3-i_1)i_2+(i_2-i_1)i_3}{2i_1i_2i_3}(1+\cos^2\beta)-\right.$$
$$\left.-\varepsilon\frac{i_3-i_2}{2i_2i_3}\sin^2\beta\cos 2\delta_*\right]=0 \qquad (4.3)$$

Корни характеристического уравнения (4.3) легко определяются

$$p_{1,2}=0, \quad p_3=-{}^1/_2\varepsilon(1+\cos^2\beta)i_1^{-1}, \quad p_4=-\varepsilon\sin^2\beta i_1^{-1}$$

$$p_5={}^1/_2\varepsilon\{[(i_3-i_1)i_2+(i_2-i_1)i_3](1+\cos^2\beta)+i_1(i_3-i_2)\sin^2\beta\cos 2\delta_*\}(i_1i_2i_3)^{-1}$$

При выполнении условия $i_3>i_2>i_1=1$ можно показать, что для любых β и δ корень p_5 будет положителен. Следовательно, тривиальное решение системы в вариациях (4.2) и частное решение (4.1) будут неустойчивыми. Другими словами, вращение твердого тела в магнитном поле вокруг оси наименьшего момента инерции в резонансном случае является неустойчивым, так же как и в нерезонансном случае [2].

Системы (3.6) и (3.7) имеют одно и то же частное решение

$$\rho_*=0, \quad l_*=i_2, \quad \delta=\delta_*, \quad \sigma=\sigma_*, \quad k_*=1 \qquad (4.4)$$

Этому решению соответствует вращение твердого тела вокруг средней оси инерции x_2, которое является неустойчивым для невозмущенного движения Эйлера — Пуансо. Дополнительный момент магнитного поля, приложенный к телу, величина которого имеет порядок ε, сделать устойчивым это вращение не может. Поэтому исследование устойчивости решения (4.4) здесь не приводится.

В системе (3.7) других частных решений найти не удается. В нерезонансном случае система осредненных уравнений, аналогичная (3.7), имеет частное решение

$$\rho_*=0, \quad l_*=i_3, \quad k_*=0, \quad \sigma=\sigma_* \qquad (4.5)$$

которому соответствует вращение тела вокруг оси наибольшего момента инерции x_3, параллельной оси вращения поля ξ_3 и вектору кинетического момента $\mathbf{l}$ (так как $\rho_*=0$ и $k_*=0$, следовательно, $\nu_*=0$).

При подстановке частного решения (4.5) в систему осредненных уравнений (3.7) получим, что правые части первых четырех уравнений (3.7) обращаются в нуль, а правая часть последнего уравнения для расстройки δ имеет вид

$$\delta'=\omega_\psi-1, \quad \omega_\psi=1+\frac{i_3-i_1}{i_1(1+a^2)^{1/2}}\neq 1, \quad \Pi(\pi/2, a^2, 0)=\frac{{}^1/_2\pi}{(1+a^2)^{1/2}}, \quad K(0)=\frac{\pi}{2}$$

Таким образом, при вращении тела вокруг оси x_3 резонансное условие (3.1) не выполняется, переменная δ является быстрой, все дополнительные резонансные члены в (3.7) осредняются с нулевыми средними значениями. При этом получается нерезонансный случай, исследованный в [2], где получено, что вращение тела вокруг оси наибольшего момента инерции асимптотически устойчиво.

Для динамически симметричного тела возможен резонанс на двойной частоте [1], когда тело представляет собой пластину бесконечно малой толщины, однако в рассматриваемой задаче в силу неравенства

$$\omega_\psi\leqslant 1+\frac{i_3-i_1}{i_1(1+a^2)^{1/2}}=1+\left[\frac{(i_3-i_1)(i_3-i_2)}{i_1i_2}\right]^{1/2}<2$$

резонанса $\omega_\psi\approx 2$ быть не может. Следовательно, кроме резонанса (3.1), других резонансов нет. Итак, резонансные вращения вокруг наименьшей и средней осей эллипсоида инерции являются неустойчивыми, т. е. «застревания» на резонансах не происходит, следовательно, тело стремится к единственному устойчивому стационарному движению — вращению вокруг оси наибольшего момента инерции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартыненко Ю. Г.* Раскрутка гироскопа с неконтактным подвесом ротора.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5, с. 35—40.
2. *Мартыненко Ю. Г.* Об устойчивости стационарных вращений твердого тела в магнитном поле.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 29—33.
3. *Голубков В. В.* Момент сил в магнитном поле.— Космич. исследования, 1972, т. 10, вып. 1, с. 20—39.
4. *Мартыненко Ю. Г.* Движение проводящего твердого тела около неподвижной точки в магнитном поле.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 4, с. 36—45.
5. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
6. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Краткий курс теоретической физики. Механика. М.: Наука, 1969. 271 с.

Владимир

Поступила в редакцию 5.VII.1983