

**ПЕРЕНОСНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ
В БЕЗГРАНИЧНОМ ИЛИ ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ ЖИДКОСТИ**

ПЛАТОНОВ Э. Г., ФЕДОРОВИЧ Т. К.

В статье на основе общей методологии рассматривается задача взаимодействия жидкости с твердым телом в безграничном или ограниченном объеме. На примере цилиндрического тела исследуется общий механизм его переносного движения в результате взаимодействия с полем прямых и отраженных от его поверхности волн давления, первоначальным источником которых может быть либо заданное движение стенок резервуара, либо волна давления, заданная на произвольной поверхности жидкого объема.

Решение получено в виде интегральной свертки от параметров движения границы жидкого объема и переходной функции, характеризующей процесс взаимодействия жидкости и тела во времени. Приводится сравнение с известными точными решениями.

1. Плоская модель переносного движения полностью или полупогруженного в жидкость цилиндра. Рассматриваются малые колебания системы двух соосных бесконечно длинных цилиндров с жидким заполнителем между ними. Внутренний абсолютно жесткий цилиндр полностью или полупогружен в идеальную сжимаемую жидкость, не терпящую кавитационных разрывов. Поверхность внешнего цилиндра может быть деформируемым контуром цилиндрического резервуара или фиктивной границей жидкого цилиндра в безграничной среде. В первом случае задается радиальная скорость движения стенок резервуара, во втором — радиальная скорость частиц жидкости на фронте волны давления. Геометрия задачи представлена на фиг. 1.

Математически задача сводится к решению системы уравнений, описывающих совместное движение жидкости и тела

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$$MW'' = \int_{\Sigma} P(R_1, \theta, t) \cos \theta \, d\Sigma, \quad P = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

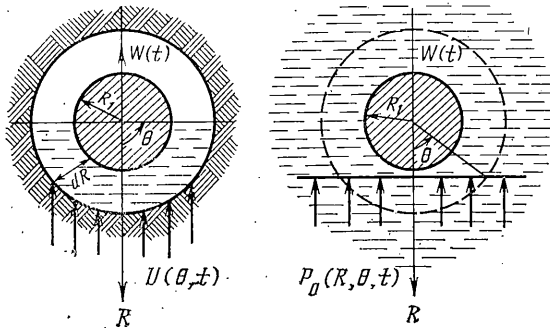
при нулевых начальных и следующих граничных условиях:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \text{ при } \theta = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial R} = -dW/dt \cos \theta \text{ при } R = R_1 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 \text{ (} \theta = \pi/m \text{), } \quad \frac{\partial \Phi}{\partial R} = -\partial U(\theta, t)/\partial t \cos \theta \text{ (} R = R_1 + \Delta R \text{)}$$

$$U(\theta, t) = \frac{1}{\cos \theta} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial P_0(R_1 + \Delta R, \theta, t)}{\partial R} dt^2$$

Здесь R, θ, t — цилиндрические координаты и время, отсчитываемое с момента прихода первых возмущений к границе внешнего цилиндра, $W(t)$ — перемещения внутреннего цилиндра в вертикальном направлении, $U(\theta, t)$ — вертикальные перемещения цилиндрического резервуара в случае ограниченного объема жидкости или



Фиг. 1

частиц жидкости в волне давления в случае безграничной среды, $P_0(R, \theta, t)$ — заданный закон распределения давления в волне, $\Phi(R, \theta, t)$ — потенциал скорости частиц жидкости, $R_1, \Delta R$ — радиус внутреннего цилиндра и ширина кольцевого зазора соответственно, Σ — граница смоченной поверхности внутреннего цилиндра, m — трассер ($m=1$ относится к полностью погруженному в жидкость цилиндру, $m=2$ — к полупогруженному цилиндру), $P(R, \theta, t)$ — давление в произвольной точке жидкого объема, ρ_0, c_0 — массовая плотность и скорость звука в воде, M — масса внутреннего цилиндра.

Граничные условия (1.2) отражают симметрию вертикального движения и отсутствие давления на свободной поверхности воды в случае полупогруженного цилиндра, непроницаемость поверхности внутреннего цилиндра и условия контакта на поверхности внешнего цилиндра. Решение поставленной задачи строится при помощи методов неполного разделения переменных [1], интегрального преобразования Лапласа [2] и аппроксимации лапласовых изображений переходной функции процесса асимптотически эквивалентными функциями [3].

После введения безразмерных параметров система уравнений (1.1) и граничные условия (1.2) примут вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \quad (1.3)$$

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} = -\frac{2m}{\pi} \int_0^{\pi/m} \frac{\partial \varphi(1, \theta, \tau)}{\partial \tau} \cos \theta d\theta$$

$$\partial \varphi / \partial \theta = 0 \text{ при } \theta = 0, \quad \partial \varphi / \partial r = -dw/d\tau \cos \theta \text{ при } r = 1$$

$$\partial^{2-m} \varphi / \partial \theta^{2-m} = 0 \quad (\theta = \pi/m), \quad \partial \varphi / \partial r = -du(\theta, \tau) / \partial \tau \cos \theta \quad (r = \alpha)$$

$$r = \frac{R}{R_1}, \quad w = \frac{W}{R_1}, \quad u = \frac{U}{R_1}, \quad \tau = \frac{tc_0}{R_1}, \quad \varphi = \frac{\Phi}{c_0 R_1}, \quad p = \frac{P}{\rho_0 c_0^2},$$

$$\alpha = \frac{R_1 + \Delta R}{R_1}$$

Общее решение волнового уравнения для потенциала скорости частиц жидкости $\varphi(r, \theta, \tau)$ ищется в форме ряда $\varphi(r, \theta, \tau) = \sum \varphi_n(r, \tau) \cos n\theta$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Но поскольку рассматривается только переносное движение тела, то в этом ряду удерживается один член $\varphi(r, \theta, \tau) = \varphi_1(r, \tau) \cos \theta$.

Применяя к системе уравнений (1.3) интегральное преобразование Лапласа по времени τ и используя представление для потенциала φ в форме $\varphi(r, \theta, \tau) = \varphi_1(r, \tau) \cos \theta$, нетрудно получить изображение потенциала φ^L на границе $r=1$:

$$\varphi_1^L(1, s) = \frac{w^L(s)}{D(\alpha, s)} [I_1'(\alpha s) K_1(s) - K_1'(\alpha s) I_1(s)] - \frac{u_1^L(s)}{s D(\alpha, s)} \quad (1.4)$$

$$D(\alpha, s) = I_1'(s) K_1'(\alpha s) - I_1'(\alpha s) K_1'(s), \quad u_1^L(s) = \frac{2m}{\pi} \int_0^{\pi/m} u^L(\theta, s) \cos^2 \theta d\theta$$

Значком L здесь обозначены трансформанты преобразования Лапласа, I, K — модифицированные функции Бесселя. Подстановкой выражения (1.4) во второе уравнение системы (1.3) находится искомая функция

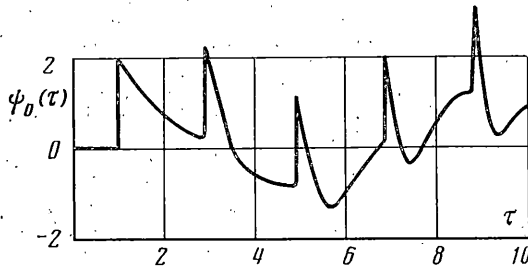
$$w^{**L}(s) = u_1^{**L}(s) \psi^L(s), \quad \psi^L(s) = \frac{1}{s^2} [K_1'(\alpha s) I_2(s) + I_1'(\alpha s) K_2(s)]^{-1} \quad (1.5)$$

Если оригинал переходной функции $\psi(\tau)$ известен, то ускорения цилиндра выражаются через интегральную свертку

$$w^{**}(\tau) = \int_0^{\tau} u_1^{**}(\xi) \psi(\tau - \xi) d\xi \quad (1.6)$$

Интегрированием выражения (1.6) определяются остальные кинематические параметры движения внутреннего цилиндра.

2. Переходная функция процесса $\psi(\tau)$. Найти оригинал для $\psi^L(s)$ аналитическими средствами затруднительно. Однако всегда существует принципиальная возможность его численного обращения, например методом [4]. Тем не менее в прикладных задачах предпочтительнее иметь хотя и приближенное, но аналитическое



Фиг. 2

представление искомой функции. С этой целью можно воспользоваться методом аппроксимации лапласова изображения асимптотически эквивалентными функциями [3]. Удовлетворяя требованиям указанного метода, трансформанту сравнительно просто можно аппроксимировать следующей функцией:

$$\psi_0^L(s) = \sqrt{\alpha} / [s \operatorname{sh}(\alpha-1)s + \sqrt{\alpha} \operatorname{ch}(\alpha-1)s] \quad (2.1)$$

Ее оригинал после несложных преобразований находится в виде

$$\begin{aligned} \psi_0(\tau) = 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-\sqrt{\alpha}[\tau - (\alpha-1)(2n+1)]\} L_n\{2\sqrt{\alpha}[\tau - (\alpha-1)(2n+1)]\} \times \\ \times \sigma_0[\tau - (\alpha-1)(2n+1)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

где L_n — полиномы Лагерра, σ_0 — функция Хевисайда.

Структура переходной функции (2.2), а также ее графическое изображение на фиг. 2 свидетельствуют о сложной суперпозиции волн в слое жидкости при взаимодействии цилиндра и резервуара. Она сдвинута относительно границы взаимодействия $\tau=0$ на время $\tau=\Delta t$, физически соответствующему времени пробега волной давления ширины кольцевого зазора. В последующем через каждый интервал времени $\tau=2\Delta t$ функция $\psi_0(\tau)$ претерпевает разрыв непрерывности конечной величины, равный $2\alpha^{1/2}$. За скачком наблюдается плавный, типа экспоненциального, спад давления.

Отмеченный характер изменения переходной функции соответствует наложению отраженных от стенок резервуара волн давления и влиянию волн разрежения, обусловленных движением цилиндра. С увеличением временного интервала зафронтальная область скачков сужается и характер изменения функции $\psi_0(\tau)$ все больше соответствует установившемуся движению системы плавающее тело — резервуар, характерной особенностью которого является уже гармонический закон изменения функции $\psi_0(\tau)$ во времени.

В связи с этим отметим, что установившееся движение указанной системы обычно рассматривают на основе не волнового уравнения, а уравнения Гельмгольца. Окончательный результат представляется в виде ряда из гармонических функций. В данном случае сумма этого ряда определяется асимптотическим переходом в изображении (2.1) при $s \rightarrow 0$. Обращаясь вновь к структуре выражения (2.2), нетрудно заметить, что функция $\psi_0(\tau)$ до момента прихода первого отражения от стенки резервуара описывает процесс движения тела в условиях безграничной жидкости. Временной интервал, соответствующий этому моменту, равен $\tau=3(\alpha-1)$. Если теперь отсчет времени вести с момента соприкосновения волны давления с поверхностью цилиндра, как это принято в литературе, посвященной указанному вопросу, то из (2.2) следует

$$\psi_0(\tau) = 2\sqrt{\alpha} \exp(-\sqrt{\alpha}\tau) \quad (0 \leq \tau \leq 2(\alpha-1)) \quad (2.3)$$

Если же на плавающий цилиндр будет действовать не цилиндрическая, а плоская волна давления $P_0(r, \theta, \tau) = \sigma_0(\tau - \alpha + r \cos \theta)$, то временной интервал, в котором справедливо представление переходной функции (2.2), сужается до $0 \leq \tau \leq \alpha$.

Таким образом, установлением аналитического представления переходной функции $\psi_0(\tau)$ в форме (2.2) и (2.3) заканчивается этап формального построения решения задачи.

3. Анализ результатов. Представляет интерес сравнение полученного решения в виде интегральной свертки (1.6) с известными точными решениями. С этой целью рассматривается задача об ускорениях цилиндра, полностью погруженного в безграничную жидкость и подверженного действию подводной ударной волны [5]. В этом

случае решение (1.6) принимает следующий вид:

$$w^{**}(\tau) = \frac{4\sqrt{\alpha}}{\pi} \left\{ \arccos \left(1 - \frac{\tau}{\alpha} \right) - \int_0^{\tau} \exp(-\sqrt{\alpha}(\tau-\xi)) \times \right. \\ \left. \times \left[\sqrt{\alpha} \arccos \left(1 - \frac{\xi}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \sqrt{\xi(2\alpha-\xi)} \right] d\xi \right\} \sigma_0(\alpha-\tau) \quad (3.1)$$

Результаты вычислений по формуле (3.1) с погрешностью менее 2% совпали с известным численным решением [5] в интервале $0 \leq \tau \leq 4$. Однако с расширением интервала $\tau > 4$ возрастает погрешность формулы (3.1). Это обстоятельство связано с принципом аппроксимации переходной функции процесса (2.1). Если интересоваться интервалом $\tau > 4$, то лапласову трансформанту (2.1) можно аппроксимировать более точно функцией

$$\psi_0^L(s) = 2\sqrt{\alpha}(s+a) / [(s+a)^2 + a^2] \quad (3.2)$$

где неизвестный параметр находится из условия $\lim_{s \rightarrow 0} \psi^L(s) = 2$ при $s \rightarrow 0$. Он будет в этом случае равен $a = 1/2\alpha^{1/2}$. Оригинал изображения (3.2) соответствует функции

$$\psi_0(\tau) = 2\sqrt{\alpha} \exp(-\sqrt{\alpha}\tau/2) \cos(\sqrt{\alpha}\tau/2) \quad (3.3)$$

Если теперь в выражении (3.2) положить $s \gg a = 1/2\alpha^{1/2}$, то нетрудно получить

$$\psi_0^L(s) = 2\sqrt{\alpha} \frac{s + \sqrt{\alpha}/2}{s^2 + \sqrt{\alpha}s + \alpha/2} \approx \frac{2\sqrt{\alpha}}{s + \sqrt{\alpha}} \Rightarrow 2\sqrt{\alpha} \exp(-\sqrt{\alpha}\tau) \quad (3.4)$$

т. е. оригинал (2.3). Отсюда видно, что с увеличением параметра α интервал, в котором справедливо представление (2.3), сокращается.

Таким образом, проведенное сравнение показывает, что предложенное решение (1.6) с достаточной для практики точностью описывает нестационарный процесс взаимодействия твердого цилиндрического тела с жидкостью в условиях как ограниченного, так и неограниченного водоемов. Оно позволяет получать аналитическую форму решения при различных способах возбуждения волновых возмущений в жидком объеме и с единых методологических позиций раскрывает физическую природу формирования сложного поля давления в жидкости при наличии в ней свободно перемещающегося твердого тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
3. Лобысев В. Л., Яковлев Ю. С. Метод асимптотически эквивалентных функций и его приложение к решению некоторых задач механики сплошных сред. — В кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Л.: Судостроение, 1970, с. 239—250.
4. Dubner H., Abate J. Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite fourier cosine transforms. — J. Assoc. Comput. Mach., 1968, v. 15, No. 1, p. 115—123.
5. Мнев Е. Н., Перцев А. К. Гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 1970. 206 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
22.II.1983