УДК 539.214;539.374

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЯХ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

РОМАНОВ А. В.

Течение пластического материала, выдавливаемого цилиндрической втулкой, шероховатой вдоль образующей, рассмотрено в [1]. Решение задачи, соответствующее сдавливанию пластического материала расширяющейся шероховатой цилиндрической трубой, предложено в [2]. В этой же работе путем наложения указанных решений получено решение задачи о течении материала между двумя сближающимися шероховатыми цилиндрическими поверхностями. В этих случаях касательные напряжения действуют по образующей цилиндров. В пределе указанные решения переходят в известное решение [3] о сжатии пластического слоя параллельными шероховатыми плитами.

В [4, 5] найдены частные решения теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах, обобщающие, в частности, результаты работы [2].

В публикуемой работе исследуются частные решения теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах, не сводящиеся в пределе к решению Л. Прандтля [3]. Рассмотрены случаи сдавливания пластического материала сжимающейся и расширяющейся трубами аналогично [1, 2], когда касательные напряжения являются тангенциальными или закручивающими по торцевой поверхности.

1. Рассмотрим цилиндрическую систему координат ρ, θ, z. В случае осесимметричного состояния предполагается, что компоненты напряженного и деформированного состояния зависят от координат ρ, z и не зависят от θ.

Рассмотрим два случая:

$$\tau_{\rho\theta}\neq0,\quad \tau_{\rho z}=\tau_{\theta z}=0 \tag{1.1}$$

$$\tau_{\theta z}\neq0,\quad \tau_{\rho\theta}=\tau_{\rho z}=0 \tag{1.2}$$

В случае (1.1) уравнения равновесия примут вид

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho}+\frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho}=0,\qquad \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0 \tag{1.3}$$

Обозначим компоненты скорости перемещений вдоль осей ρ, θ, z соответственно u, v, w. Тогда компоненты скорости деформации будут иметь вид

$$\begin{gathered}\varepsilon_\rho=\partial u/\partial\rho,\quad \varepsilon_\theta=u/\rho,\quad \varepsilon_z=\partial w/\partial z\\ \varepsilon_{\rho\theta}=\frac{1}{2}\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{v}{\rho}\right)\right],\qquad \varepsilon_{\theta z}=\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z},\qquad \varepsilon_{\rho z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)\end{gathered} \tag{1.4}$$

Условие пластичности Мизеса запишем в виде

$$(\sigma_\rho-\sigma_\theta)^2+(\sigma_\theta-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_\rho)^2+6\tau_{\rho\theta}=6 \tag{1.5}$$

Здесь и далее все компоненты напряжений отнесены к пределу текучести k. Соотношения ассоциированного закона пластического течения представим в форме

$$\begin{gathered}\varepsilon_\rho-\varepsilon_\theta=\lambda(\sigma_\rho-\sigma_\theta),\quad \varepsilon_\theta-\varepsilon_z=\lambda(\sigma_\theta-\sigma_z)\\ \varepsilon_z-\varepsilon_\rho=\lambda(\sigma_z-\sigma_\rho),\quad \varepsilon_{\rho\theta}=\lambda\tau_{\rho\theta},\quad \varepsilon_{\rho z}=\varepsilon_{\theta z}=0\end{gathered} \tag{1.6}$$

Предположим, что $\tau_{\rho\theta}=\tau_{\rho\theta}(\rho)$, тогда из (1.3) найдем

$$\tau_{\rho\theta}=C_1/\rho^2,\quad \sigma_z=\sigma_z(\rho)\quad (C_1=\mathrm{const}) \tag{1.7}$$

Из (1.6) и (1.4) имеем

$$\partial u/\partial\rho+u/\rho+\partial w/\partial z=0,\quad \partial u/\partial z+\partial w/\partial\rho=0,\quad \partial v/\partial z=0 \tag{1.8}$$

Положим $u=u(\rho)$, $v=v(\rho)$, $w=-C_2z$, $C_2=\mathrm{const}$. Тогда из (1.8) определим

$$u={}^1/_2C_2\rho+C_3/\rho\quad (C_3=\mathrm{const}) \tag{1.9}$$

Таким образом, согласно (1.9), (1.4), будем иметь

$$\varepsilon_\rho=\frac{C_2}{2}-\frac{C_3}{\rho^2},\qquad \varepsilon_\theta=\frac{C_2}{2}+\frac{C_3}{\rho^2},\qquad \varepsilon_z=-C_2,\qquad \varepsilon_{\theta z}=\varepsilon_{\rho z}=0 \tag{1.10}$$

Неизвестной является компонента скорости перемещения $v=v(\rho)$. Из (1.6) получим $\lambda=\varepsilon_{\rho\theta}/\tau_{\rho\theta}$. Определив величину λ, можно получить, согласно (1.4), искомое выражение для определения v:

$$v=2\rho\int\frac{\lambda\tau_{\rho\theta}}{\rho}\,d\rho+C \qquad (C=\mathrm{const}) \tag{1.11}$$

Величину λ найдем согласно (1.6), (1.5), (1.7) и (1.10), откуда

$$\lambda=[(\varepsilon_\rho-\varepsilon_\theta)^2+(\varepsilon_\theta-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_\rho)^2]^{1/2}/\sqrt{6(1-\tau_{\rho\theta}^2)} \tag{1.12}$$

Таким образом, все компоненты деформированного состояния определены. Согласно (1.6) и (1.3), найдем

$$\sigma_\rho=-\int\frac{\varepsilon_\rho-\varepsilon_\theta}{\rho\lambda}\,d\rho+C_4 \qquad (C_4=\mathrm{const}) \tag{1.13}$$

Далее из (1.13), (1.6) определяются компоненты напряжения

$$\sigma_\theta=\sigma_\rho-(\varepsilon_\rho-\varepsilon_\theta)/\lambda, \quad \sigma_z=\sigma_\rho-(\varepsilon_\rho-\varepsilon_z)/\lambda \tag{1.14}$$

Рассмотрим частные случаи полученного решения. Пусть $C_2=-1$, $C_3=0$, $C_1=1$, тогда из (1.10) будем иметь

$$\varepsilon_\rho=\varepsilon_\theta=-{}^1/_2, \quad \varepsilon_z=1, \quad \varepsilon_{\theta z}=\varepsilon_{\rho z}=0 \tag{1.15}$$

Величина λ, согласно (1.12), примет вид

$$\lambda={}^1/_2\sqrt{3}\,\rho^2/\sqrt{\rho^4-1} \tag{1.16}$$

Компоненты перемещений определятся по формулам (1.9) и (1.11)

$$u=-{}^1/_2\rho, \quad v={}^1/_2\sqrt{3}\rho\arccos 1/\rho^2+B_1, \quad w=z \quad (B_1=\mathrm{const}) \tag{1.17}$$

а компоненты напряжений – по (1.13) и (1.14)

$$\sigma_\rho=C_4, \quad \sigma_\theta=C_4, \quad \sigma_z=\sqrt{3}\sqrt{\rho^4-1}/\rho^2+C_4, \quad \tau_{\rho\theta}=1/\rho^2 \tag{1.18}$$

Напряженное и деформированное состояние, определяемое формулами (1.15) – (1.18), соответствует сдавливанию и закручиванию пластического материала, находящегося в цилиндрической втулке радиуса $r>1$, шероховатой по тангенциальному направлению. По образующей цилиндрической поверхности распределена равномерная нормальная нагрузка C_4 и крутящее усилие $1/r^2$.

Другой частный случай полученного решения возникает, если положить $C_1=C_3=1$, $C_2=0$. Тогда выражения для компонент скоростей деформации примут вид

$$\varepsilon_\rho=-1/\rho^2, \quad \varepsilon_\theta=1/\rho^2, \quad \varepsilon_z=\varepsilon_{\theta z}=\varepsilon_{\rho z}=0 \tag{1.19}$$

В этом случае величина $\lambda=(\rho^4-1)^{-1/2}$, а компоненты перемещений равны

$$u=1/\rho^2, \quad v=\sqrt{\rho^4-1}/\rho+B_2, \quad w=0 \quad (B_2=\mathrm{const}) \tag{1.20}$$

Согласно (1.13) и (1.14), компоненты нормальных напряжений запишутся в виде

$$\sigma_\rho=\frac{\sqrt{\rho^4-1}}{\rho^2}+\ln(\rho^2+\sqrt{\rho^4-1})+B_3, \qquad \sigma_\theta=\frac{3\sqrt{\rho^4-1}}{\rho^2}+\ln(\rho^2+\sqrt{\rho^4-1})+B_3$$

$$\sigma_z=\frac{2\sqrt{\rho^4-1}}{\rho^2}+\ln(\rho^2+\sqrt{\rho^4-1})+B_3, \qquad \tau_{\rho\theta}=\frac{1}{\rho^2} \qquad (B_3=\mathrm{const}) \tag{1.21}$$

Так как согласно (1.19) и (1.20) $w=0$, $\varepsilon_z=0$, то формулы (1.19) – (1.21) определяют плоскую деформацию пластического пространства с цилиндрической полостью радиуса $r>1$, по поверхности которой приложена равномерная нагрузка и закручивающее тангенциальное усилие.

2. В случае (1.2) уравнения равновесия примут вид

$$\partial\sigma_\rho/\partial\rho+(\sigma_\rho-\sigma_\theta)/\rho=0, \quad p\tau_{\theta z}/\partial z=0, \quad \partial\sigma_z/\partial z=0 \tag{2.1}$$

откуда $\sigma_z=\sigma_z(\rho)$, $\tau_{\theta z}=\tau_{\theta z}(\rho)$.

Компоненты деформированного состояния (1.4) сохраняют свой вид; система уравнений, аналогичная (1.8), запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{u}{\rho}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial\rho}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{v}{\rho}\right)=0 \tag{2.2}$$

В дальнейшем положим $v=C_5\rho z$, $\varepsilon_{\theta z}=C_5\rho$, $C_5=\mathrm{const}$. В соотношениях, аналогичных (1.6), получим $\lambda=C_5\rho/\tau_{\theta z}$. Отметим, что в первом случае в выражение для λ входила неизвестная компонента скорости деформации, а в данном случае – компонента касательного напряжения $\tau_{\theta z}$. Полагая $w=-C_2 z$, из (2.2) получим выражение для компоненты u в виде (1.9). Выражения для компонент скорости деформации будут совпадать с (1.10), за исключением $\varepsilon_{\theta z}=C_5\rho$, $\varepsilon_{\rho\theta}=\varepsilon_{\rho z}=0$. Для определения величины λ получим выражение вида

$$\lambda=[(\varepsilon_\rho-\varepsilon_\theta)^2+(\varepsilon_\theta-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_\rho)^2+6\varepsilon_{\theta z}^2]^{1/2}/\sqrt{6} \tag{2.3}$$

После того как будет определена величина λ, из соотношения ассоциированного закона течения $\varepsilon_{\theta z}=\lambda\tau_{\theta z}$ можно получить выражение для нахождения компоненты касательного напряжения $\tau_{\theta z}$. По формулам (1.13) и (1.14) определим компоненты напряженного состояния.

Рассмотрим частные случаи полученного решения. Положим $C_2=-1$, $C_3=0$, $C_5=1$. Тогда выражения для компонент скоростей деформации и величина λ примут вид

$$\varepsilon_\rho=-{}^1/_2,\quad \varepsilon_\theta=-{}^1/_2,\quad \varepsilon_z=1,\quad \varepsilon_{\theta z}=\rho,\quad \varepsilon_{\rho\theta}=\varepsilon_{\rho z}=0,\quad \lambda={}^1/_2\sqrt{3+4\rho^2} \tag{2.4}$$

Из соотношений ассоциированного закона пластического течения определим $\tau_{\theta z}=2\rho/(3+4\rho^2)^{1/2}$. Тогда нормальные компоненты напряженного состояния примут вид

$$\sigma_\rho=C_4,\quad \sigma_\theta=C_4,\quad \sigma_z=C_4+3/(3+4\rho^2)^{1/2} \tag{2.5}$$

Полученные формулы (2.4) и (2.6) определяют напряженное и деформированное состояние пластического материала в гладкой цилиндрической втулке под действием постоянного усилия, распределенного по образующей цилиндрической поверхности и закручивающего усилия на торцах пластического материала.

Второй частный случай получим, если положить $C_2=0$, $C_3=C_5=1$. Тогда для компонент скоростей деформации имеем

$$\varepsilon_\rho=-1/\rho^2,\quad \varepsilon_\theta=1/\rho^2,\quad \varepsilon_z=0,\quad \varepsilon_{\theta z}=\rho,\quad \varepsilon_{\rho\theta}=\varepsilon_{\rho z}=0 \tag{2.6}$$

Величина $\lambda=\sqrt{1+\rho^6}/\rho^2$, а компонента касательного напряжения $\tau_{\theta z}=\rho^3/(1+\rho^6)^{1/2}$. Компоненты нормальных напряжений найдем из формул (1.13) и (1.14):

$$\sigma_\rho=\frac{2}{3}\ln\frac{1+\sqrt{1+\rho^6}}{\rho^3}+B_3,\qquad \sigma_\theta=\frac{2}{3}\ln\frac{1+\sqrt{1+\rho^6}}{\rho^3}+\frac{2}{\sqrt{1+\rho^6}}+B_3$$

$$\sigma_z=\frac{2}{3}\ln\frac{1+\sqrt{1+\rho^6}}{\rho^3}+\frac{1}{\sqrt{1+\rho^6}}+B_3\quad (B_3=\text{const}) \tag{2.7}$$

Формулы (2.6) и (2.7) определяют плоскую деформацию пластического пространства с цилиндрической полостью, на поверхности которой приложена равномерная нормальная нагрузка, а также закручивающее усилие на торцевой поверхности материала.

Автор признателен М. А. Задояну за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 407 с.
2. *Ивлев Д. Д.* Некоторые частные решения уравнений осесимметричной задачи теории идеальной пластичности и обобщение решения Прандтля о сжатии пластического слоя двумя шероховатыми плитами.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 5, с. 673–678.
3. *Прандтль Л.* Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел.— В кн.: Теория пластичности. М.: Изд-во иностр. лит., 1948, с. 102—113.
4. *Задоян М. А.* Об одном частном решении уравнений теории идеальной пластичности.— Докл. АН АрмССР, 1964, т. 39, № 5, с. 265—269.
5. *Задоян М. А.* Частное решение уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах.— Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 7, с. 73–75.

Чебоксары

Поступила в редакцию 6.II.1984