

УДК 533.6.013.42

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭХОСИГНАЛА ОТ ПРЕДЕЛЬНО ТОНКОЙ УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЖИДКОСТИ

ПОДДУВНЯК А. П.

Изучается структура эхосигнала от тонкой упругой сферической оболочки в акустической среде, на которую набегают плоская звуковая волна. Оболочка описывается по теории типа Тимошенко. Основное внимание уделяется выяснению условий резонансного возбуждения переизлученных волн в гармоническом и квазистационарном режимах. Для этой цели используется резонансная теория R -функций Вигнера — Айзенбуда и теория полюсов Редже, развитые в квантовой механике. Найдены и проанализированы приближенные аналитические соотношения для параметров спектральных линий парциальных волн, соответствующих резонансному рассеянию.

Анализ частотных характеристик эхосигнала от упругих сферических и цилиндрических оболочек в акустической среде показывает, что для безразмерных толщин оболочек h порядка до 0,03 радиуса срединной поверхности a теория гиперболического типа правильно описывает структуру переизлученных сигналов в широком диапазоне частот ($\omega \approx 15$, $\omega = ka$, k — волновое число в окружающей жидкости) и для большого числа возбужденных мод собственных колебаний (мультиполей). Поэтому в случае достаточно тонких оболочек ($h = 0,0001 - 0,001$) изучить наиболее информативную часть спектра переизлученного волнового поля можно при помощи теории, учитывающей поперечные сдвиги и инерцию вращения, несложной и достаточно точной [1].

В публикуемой работе на основе R -матричного подхода, разработанного в [2] применительно к теории ядерных реакций, а в последнее время перенесенного и в теорию рассеяния звуковых волн [3], изучается тонкая структура стационарных и квазистационарных эхосигналов, возникающих вследствие переизлучения упругой энергии предельно тонкой пустой сферической оболочкой, на которую набегают плоская звуковая волна. Аналогичная задача для цилиндрической оболочки бесконечной длины (в плоской постановке) изучалась на основе теории упругости другим методом в [4, 5], где, в частности, проанализирована резонансная ситуация.

1. Метод парциальных волн. Воспользуемся теорией парциального рассеяния Релея [6]. Тогда стационарное поле акустического давления в жидкой среде, содержащей сферическую оболочку, выразится формулой ($\tau = cta^{-1}$):

$$p(r, \theta, \omega, \tau) = [e^{i\omega z} + e^{i\omega r} f(\theta) / r] e^{-i\omega \tau} \quad (r \rightarrow \infty) \quad (1.1)$$

где первый член соответствует падающей плоской волне ($z = r \cos \theta$), а второй — рассеянной волне с амплитудой $f(\theta) = \sum f_l(\theta)$ ($l = 0, 1, 2, \dots, \infty$), t — время, c — скорость звука в жидкости.

Парциальные амплитуды рассеяния связаны с S -матрицей формулой (S_l — диагональные элементы S -матрицы):

$$f_l(\theta) = (2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos \theta) / (2i\omega) \quad (1.2)$$

причем в случае пустой оболочки

$$S_l(\omega) = \frac{F_l(\omega)h_l^{(2)'(\omega)} - \omega h_l^{(2)'(\omega)}}{F_l(\omega)h_l^{(1)'(\omega)} - \omega h_l^{(1)'(\omega)}} \equiv e^{2i\delta_l(\omega)} \quad (1.3)$$

$$F_l(\omega) = \xi \omega^2 \frac{A_{33}(l, \omega)}{D(l, \omega)}, \quad \xi = \frac{\rho}{\rho_s h \lambda_0^2}, \quad \lambda_0 = \frac{c_{10}}{c}$$

$$A_{33}(l, \omega) = \det \|a_{nj}\|_{(n, j=1, 2)}, \quad D(l, \omega) = \det \|a_{nj}\|_{(n, j=1, 2, 3)}$$

$$D(l, \omega) = a_{33}(l, \omega) A_{33}(l, \omega) + L D_1(l, \omega), \quad L = l(l+1)$$

Здесь r, θ — полярные координаты с началом отсчета в центре оболочки ($\theta = \pi$ соответствует направлению на источник падающего звука, $P_l(\cos \theta)$ — полином Лежандра, l — порядок нормальной моды (угловой момент), $h_i^{(j)}(x)$ и $h_i^{(j)'}(x)$ ($j=1, 2$) — сферические функции Ханкеля и их производные по аргументу, $F_l(\omega)$ — парциальная импедансная функция, $\delta_l(\omega)$ — парциальный сдвиг фазы рассеяния, ξ — параметр, который в данной работе полагается большим, ρ и ρ_s — плотности жидкости и материала оболочки, c_{10}, c_{20} — скорости распространения фронтов волн деформации срединной поверхности упругой оболочки [7, 8], ν — коэффициент Пуассона; функции $a_{nj}(l, \omega)$ приведены в [7, 8]; a_{33} — полином первого порядка, а A_{33} и D_1 — полиномы второго порядка относительно $\omega_0^2 = E_0$ ($\omega_0 = \omega \lambda_0^{-1}$, $\omega^2 = E$) при фиксированных l или относительно L при фиксированных ω .

Введем R -матрицу [2, 9–11], которая в данном случае будет, как и S -матрица, диагональной с элементами

$$R_l(\omega) = [1 + F_l(\omega)]^{-1} \quad (1.4)$$

Применяя к $R_l(\omega)$ теорему Миттаг — Леффлера [12] и используя свойства R -функций [11], получим следующее разложение по временно-му спектральному параметру:

$$R_l(\omega) = \alpha(l) + \sum_{n=0}^2 \frac{\gamma_{ln}^2}{E_{ln}^{\circ} - E} \quad (1.5)$$

$$\alpha(l) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} R_l(\omega) = \left[1 + \xi \lambda_0^2 \frac{\alpha_2(L)}{\beta_3(L)} \right]^{-1} = 1 - \sum_{n=0}^2 \frac{\gamma_{ln}^2}{E_{ln}^{\circ}} = O(\xi^{-1})$$

$$\gamma_{ln}^2 = - \frac{D(l, \omega_{0ln})}{[\partial(D + \xi E A_{33}) / \partial E]_{E=E_{ln}^{\circ}}} > 0, \quad E_{ln}^{\circ} = \lambda_0^2 E_{0ln} = \omega_{ln}^2$$

где $E_{0ln} = \omega_{0ln}^2$ — нули целой функции $D + \xi E A_{33}$ полинома третьей степени относительно E , $\alpha_2(L), \beta_3(L)$ — коэффициенты полиномов A_{33} и D при наибольших степенях E . Подставив F_l из (1.4) в (1.3), получим

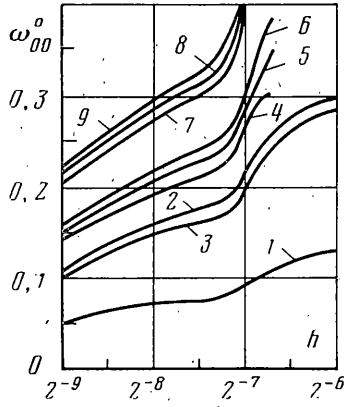
$$S_l(\omega) = S_l^{(s)}(\omega) \frac{1 - \omega R_l(\sigma_l - i\pi_l) / (1 - R_l)}{1 - \omega R_l(\sigma_l + i\pi_l) / (1 - R_l)} \quad (1.6)$$

$$S_l^{(s)}(\omega) = -h_i^{(2)}(\omega) / h_i^{(1)}(\omega) \equiv \exp[2i\xi_i^{(s)}(\omega)]$$

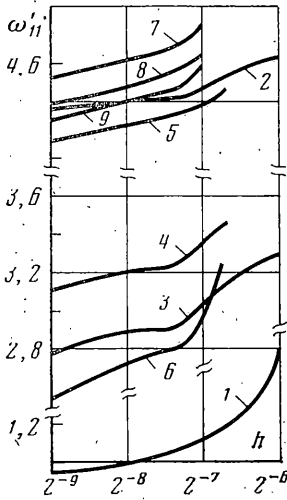
$$\sigma_l(\omega) \pm i\pi_l(\omega) h_i^{(4,2)'}(\omega) / h_i^{(4,2)}(\omega)$$

где $S_l^{(s)}(\omega)$ — функция, соответствующая рассеянию звука акустически мягкой сферой.

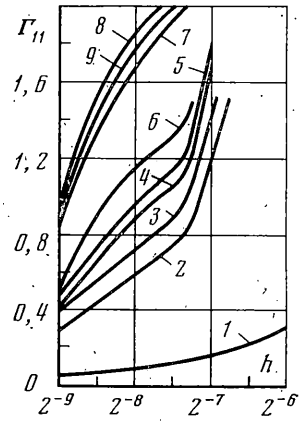
Формулы (1.5), (1.6) позволяют дать точное описание S -функций через полюсы R -функций.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

При $\xi \gg 1$ ($\omega < 30$), что отвечает случаю предельно тонкой оболочки, для полюсов E_{ln}° имеем

$$E_{l0}^{\circ} = -\frac{D(l, 0)}{A_{33}(l, 0)} \xi^{-1} + O(\xi^{-2}) \approx \gamma_{l0}^2 > 0 \quad (1.7)$$

$$E_{ln}^{\circ} = E_{ln}^{(c)\circ} - \frac{L}{\xi E_{ln}^{(c)\circ}} \frac{D_1}{(\partial A_{33} / \partial E_0)_{E_0 = E_{ln}^{(c)\circ}}} + O(\xi^{-2}) \approx E_{ln}^{(c)\circ} + \gamma_{ln}^2 > 0$$

$$E_{ln}^{(c)\circ} = E_{0ln}^{(c)} \lambda_0^2, \quad E_{0ln}^{(c)} = 1/2 (a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_0 a_2}) / a_0 \quad (n=1, 2)$$

$$a_0 = \varepsilon(1 - 3\varepsilon), \quad a_1 = \kappa^2 + 2(1 - \nu - L - 3\kappa^2)\varepsilon - (1 - \nu - L)\varepsilon^2$$

$$a_2 = (1 - \nu - L)[\kappa^2 - \varepsilon(1 - \nu - L - \kappa^2)], \quad \kappa = c_{10}/c_{20}, \quad \varepsilon = h^2/12$$

где $E_{0ln}^{(c)\circ} = \omega_{0ln}^{(c)\circ 2}$ — нули функции A_{33} . Тогда из (1.5) следует

$$R_l(\omega) = \sum_{n=0}^2 \frac{\gamma_{ln}^2}{E_{ln}^{\circ} - E} + O(\xi^{-1}) \quad (1.8)$$

В окрестности полюсов R -функций формула (1.6) упрощается, приобретая четкий физический смысл, поскольку соотношения

$$S_l(\omega) \approx S_l^\circ(\omega) + \sum_{n=0}^2 S_l^{(s)}(\omega_{ln}^\circ) \frac{E_{ln}' - E + i\Gamma_{ln}'}{E_{ln}' - E - i\Gamma_{ln}'} \quad (1.9)$$

$$S_l^\circ(\omega) = \frac{\omega^2 - (l+1)\gamma_{l0}^2 - i\theta_l \omega^{2l+1}}{\omega^2 - (l+1)\gamma_{l0}^2 + i\theta_l \omega^{2l+1}}, \quad \theta_l = \frac{\gamma_{l0}^2}{l(2l-1)!!^2}$$

$$E_{ln}' = \omega_{ln}'^2 = E_{ln}^\circ - \sigma_l(\omega_{ln}^\circ) \gamma_{ln}^2 \omega_{ln}^\circ, \quad \Gamma_{ln}' = \pi_l(\omega_{ln}^\circ) \gamma_{ln}^2 \omega_{ln}^\circ > 0$$

описывают резонансный характер переизлучения звука упругой оболочкой в жидкости (ω_{ln}' — резонансная частота, $\Gamma_{ln} = \Gamma_{ln}'/\omega_{ln}' > 0$ — ширина резонанса).

Так как $\gamma_{l0}^2 \ll 1$, то при $\omega \rightarrow \omega_{ln}^\circ \approx O(\xi^{-1})$ существенным будет лишь монополюсный случай $l=0$. Тогда

$$S_0^\circ(\omega) \approx (\omega^2 - \gamma - i\omega\gamma) / (\omega^2 - \gamma + i\omega\gamma) \quad (1.10)$$

$$\gamma = \gamma_{00}^2 = -a_{33}(0, 0) / \xi = (1-\nu)[(1+\varepsilon)\kappa - (1-\nu)\varepsilon] / \xi \ll 1$$

где γ — спектральная полуширина. Заметим, что брейт-вигнеровское приближение (1.9) эффективно при исследовании парциальных сечений рассеяния в случае $\Gamma_{ln}^2 \ll 4E_{ln}$ [10, 11, 13].

Исходя из результатов (1.2), (1.6) представим парциальные амплитуды в виде суммы:

$$f_l(\theta) = f_l^1(\theta) + f_l^2(\theta), \quad (1.11)$$

$$f_l^1(\theta) = (2l+1) \exp[2i\xi_l^{(s)}(\omega)] T_l(\omega) P_l(\cos \theta) \quad (1.12)$$

$$T_l(\omega) = \frac{\pi_l R_l}{1-R_l} \left[1 - \frac{\omega R_l}{1-R_l} (\sigma_l + i\pi_l) \right]^{-1}$$

$$f_l^2(\theta) = (2l+1) \exp[i\xi_l^{(s)}(\omega)] \sin \xi_l^{(s)}(\omega) P_l(\cos \theta) / \omega$$

где первое слагаемое — это амплитуда резонансного рассеяния, вызванного возбуждением волн деформации в оболочке, а второе — отвечает потенциальному (фоновому) рассеянию оболочкой, как акустически мягкой, дающему вклад вдали от резонансов.

Из (1.9), (1.12) в приближении Брейта — Вигнера [13] имеем

$$T_l(\omega) \approx \sum_{n=1}^2 \frac{1/4 \Gamma_{ln}}{\omega_{ln}' - \omega - 1/2 i \Gamma_{ln}} \quad (1.13)$$

Кроме того, при $\omega \rightarrow \omega_{00}^\circ = O(\xi^{-1})$:

$$f_0^1(\theta) \approx 1/2 \omega_{00}^\circ / (\omega_{00}^\circ - \omega - 1/2 i \omega_{00}^{\circ 2}) \quad (1.14)$$

Формула (1.14) соответствует «гигантскому» монополюсному резонансу в силу того, что при $\omega = \omega_{00}^\circ$ $f_0^1 \approx i(\omega_{00}^\circ)^{-1} = O(\xi)$.

Переход частоты колебаний ω в звуковой посылке через резонансные частоты ω_{ln}' сопровождается изменением сдвига фазы упругого рассеяния на фоне рассеяния от сферы, как от акустически мягкой

$$\delta_l - \xi_l^{(s)} = \text{arctg} \frac{\pi_l R_l \omega}{1 - (1 + \sigma_l \omega) R_l} \approx \text{arctg} \frac{1/2 \Gamma_{ln}}{\omega_{ln}' - \omega} \quad (n=1, 2) \quad (1.15)$$

приблизительно на число π .

На фиг. 1 приведены зависимости частот гигантских резонансов от толщины оболочки h для различных материалов: свинца, алюминия, зо-

лота, меди, титана, платины, никеля, стали, железа (кривые 1–9) [14].

Аналогичные графики для расположения ω_{ln}' и Γ_{ln} спектральной линии, соответствующей низкомодовому дипольному переизлучению звука пустой сферической оболочкой, изготовленной из тех же материалов, приведены на фиг. 2, 3. Из этих результатов следует, что резонансные характеристики очень тонких оболочек, материал которых жесткий на сдвиг, существенно чувствительны к изменениям толщины объекта.

Конечность ширины спектральных линий указывает на то, что упругая оболочка, возбуждаясь на собственных частотах падающей волны, находится в квазистационарном состоянии. Сдвиг размещения каждой линии по отношению к собственным частотам оболочек, возбуждаемых в вакууме, и ее ширина, определенные как функции приведенных ширины резонансов γ_{ln}^2 (1.5), быстро убывают с увеличением параметра ξ . Поэтому приближенное нахождение резонансных параметров, равно как и одноуровневое описание спектральных линий (1.9), (1.13), тем более точны, чем тоньше оболочка. Допускаемую при этом погрешность можно оценить проведя в конкретных случаях численные расчеты модулей амплитуд рассеяния или парциальных амплитуд рассеяния с выделением резонансного фона.

2. Теория полюсов Редже. Для описания интерференционного процесса переизлучения звука упругими периферическими волнами, когда включается большое число колебаний нормальных мод, воспользуемся методом комплексных угловых моментов [11, 13, 15]. Применим к разложению амплитуды рассеяния по нормальным модам преобразование Ватсона. Подынтегральная функция R_l , мероморфная относительно комплексного переменного L , может быть представлена по теореме Миттаг — Леффлера и свойств R -функций [11, 12] в виде

$$R_l(\omega) = 1 + \sum_{k=0}^2 \frac{\gamma_k^2}{L_k^0 - L} \quad (2.1)$$

$$\gamma_k^2 = - \frac{D(l_k^0, \omega)}{[\partial(D + \xi EA_{33}) / \partial L]_{L=L_k^0}} \leq 0 \quad (2.2)$$

где $L_k^0 = L_k^0(E)$ — нули полинома третьего порядка $D + \xi EA_{33}$.

Формулы (1.6), (2.1) дают точное представление S -матрицы через полюсы R -матрицы, как функции комплексного углового момента.

При $L \rightarrow L_k^0$ ($l \rightarrow l_k^0$) и $\xi \gg 1$ формулы (2.1), (2.2) упрощаются:

$$R_l(\omega) \approx \frac{\gamma_k^2}{L_k^0 - L}, \quad \gamma_k^2 \approx - \frac{L_k^0 D_1(l_k^0, \omega)}{\xi E (\partial A_{33} / \partial L)_{L=L_k^0}} = O(\xi^{-1})$$

и тогда достаточно ограничиться нулями L_k^0 ($k=1, 2$) функции A_{33} , соответствующими периферическим волнам безмоментного и изгибного типа:

$$L_k^0 = (\alpha_{\pm} \pm \sqrt{\alpha_{\pm}^2 + 4\alpha_0 \varepsilon}) / \varepsilon$$

$$\alpha_{\pm} = \alpha_2 \pm \varepsilon \alpha_1, \quad \alpha_0 = (\kappa^2 + 2\varepsilon E_0)^2$$

$$\alpha_1 = 1 - \nu - \kappa^2 + (1 + \varepsilon) E_0, \quad \alpha_2 = \varepsilon (1 - \nu + E_0)$$

В этом случае S -функции (1.6) приобретут резонансную форму по пространственному спектральному параметру (угловому моменту):

$$S_l(\omega) \approx \sum_{k=1}^2 S_l^{(k)}(\omega) \frac{L_k - L}{L_k - L} \quad (2.3)$$

$$L_k' = L_k^0 - \omega \gamma_k^2 \sigma_{l_k}^0, \quad \nu_k' = -\omega \gamma_k^2 \pi i_k^0 > 0$$

где $L_k = L_k' + i\nu_k'$ — полюсы Редже.

Функция $L_k = L_k(\omega)$ является аналитической относительно ω ; при изменении действительного ω она описывает реджевские траектории [15]. Как и в случае частотного резонанса, приближенное угловое резонансное представление матрицы рассеяния эффективно в случае $\nu_k'^2 \ll L_k'^2$. Исключение составляют волны типа Франца (волны соскальзывания), для которых это неравенство несущественно. Соответствующие резонансы функции $S_l^{(s)}$ проявляются больше через скачок фазы, чем через амплитудные пики. Вычисляя интеграл Ватсона по переменной $\lambda = l + 1/2$, пробегаящей контур, охватывающий полюсы Редже в первом квадранте λ -плоскости, из (1.1), (1.3), (2.3) найдем амплитуду рассеяния

$$f^l(\theta) \approx \frac{\pi}{2\omega} \sum_{k=1}^2 S_{i_k}^{(s)} \nu_k \operatorname{cosec}(\pi l_k) P_{l_k} [\cos(\pi - \theta)] \quad (2.4)$$

$$l_k = l_k' + 1/2 i \nu_k, \quad l_k' = \lambda_k' - \frac{1}{2}, \quad \lambda_k' = \sqrt{L_k' + \frac{1}{4}}, \quad \nu_k = \frac{\nu_k'}{\lambda_k'}$$

где не учтен фоновый интеграл, вычисляемый по перевальному пути и соответствующий отраженным волнам [16] и волнам типа Франца [17].

При малых мнимых частях и действительных ω полюсы $l_k(\omega)$, двигаясь вдоль траекторий Редже, приближаются к целым положительным числам l . В этих условиях опять наступает резонанс, поскольку [18]:

$$\operatorname{cosec}(\pi l_k) \approx (-1)^l / [\pi(l_k - l)] \quad (2.5)$$

Если предположить, что $|l_k| \gg 1$, а $\theta \neq 0, \pi$ (при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ рассуждения аналогичны), то, пользуясь асимптотическим разложением функции Лежандра при большом значении индекса, из (2.4) получим

$$f^l(\theta) \approx -\frac{\pi}{\omega} \sum_{k=1}^2 \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\nu_k}{\sqrt{2\pi l_k'} \sin \theta} \exp\{i[2\xi_{i_k}^{(s)} - \pi(m + 1/2)\lambda + (l_k + 1/2)(\lambda(\pi - \theta) + (2m + 1)\pi)]\} \quad (2.6)$$

Условие резонанса по угловому моменту здесь проявляется в том, что при приближении действительной части полюса Редже к целочисленному значению выражение (2.6) представляет собой суперпозицию бегущих по ходу часовой стрелки и против нее вокруг периферии оболочки слабоугасающих нормальных почти-периодических волн безмоментной и изгибной моды, укладывающихся по поверхности оболочки кратное число раз.

Таким образом, в случае целых (физических) значений углового момента l матрица рассеяния имеет полюсы в нижней полуплоскости комплексных частот ω . При действительных значениях частоты ω полюсы S -матрицы определяются траекториями Редже. Резонанс переизлучения звука наступает тогда, когда частота ω и угловой момент l парциальных амплитуд неискаженной (падающей) волны близки соответственно к частоте возбуждения и угловому моменту (вообще говоря, комплексным) одной из рассеянных волн. Это вытекает из свойств полюсов R -матрицы и результата [19, теорема XII.1].

3. Возбуждение квазистационарного излучения. Представим набегающую волну в виде разложения по парциальным волнам (мультиполям) и применим к (1.1) интеграл Фурье. На основании (1.2), (1.3) полное

поле акустического давления вдали от рассеивателя представится суммой входящих и выходящих волновых пакетов [11, 20]:

$$p = p_+ + p_- \quad (r \rightarrow \infty) \quad (3.1)$$

$$p_+(r, \theta, \tau) \approx \frac{2}{\pi r} \operatorname{Re} \int_0^\infty |A(\omega)| \exp\{-i[\omega(\tau+r) - \alpha(\omega)]\} d\omega \delta(\theta - \pi)$$

$$p_-(r, \theta, \tau) \approx -\frac{1}{\pi r} \sum_{l=0}^\infty \left(l + \frac{1}{2} \right) P_l(\cos \theta) \operatorname{Re} \int_0^\infty |A(\omega)| \exp\{-i[\omega(\tau-r) - \alpha(\omega) - 2\delta_l(\omega)]\} d\omega$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $A(\omega) = |A(\omega)| e^{i\alpha(\omega)}$ — причинная трансформанта Фурье импульса звуковой посылки [11]. Если $A(\omega)$ соответствует узкому спектру, сосредоточенному вблизи частоты посылки ω_0 , то величина $\Delta\tau = 2|\delta_l'(\omega_0)|$ определяет отставание центра выходящего волнового пакета по отношению к центру входящего пакета, вызванное наличием рассеивателя [11, 20]. При частоте ω_0 , близкой к одной из резонансных частот ω_{ln} , это отставание равно удвоенной продолжительности жизни отклика $2\tau_{ln}$ ($\tau_{ln} = \Gamma_{ln}^{-1}$), связанной с возбуждением. Для импульса посылки

$$a(\tau) = \operatorname{Re} f(\tau), \quad f(\tau) = i \exp(-i\omega_0\tau) H(\tau), \quad \omega_0 = \omega_0' - i/2\Gamma_0 \quad (3.2)$$

где $H(\tau)$ — функция Хевисайда, $\tau_0 = \Gamma_0^{-1}$ — продолжительность зондирования, причинная фурье-трансформанта равна $A(\omega) = 1/2[F(\omega) + \bar{F}(-\omega)]F(\omega)F(\omega) = (\omega_0 - \omega)^{-1}$. В случае близости несущей частоты ω_0' к одной из резонансных частот нормальных волн ω_{ln}' давление акустического поля, соответствующего переизлучению, выразится формулой

$$p^i(r, \theta, \tau) \approx \frac{1}{r} \sum_{l=0}^\infty (2l+1) P_l(\cos \theta) \operatorname{Re} Q_{ln} \quad (n=1,2) \quad (3.3)$$

$$Q_{ln} = \frac{i\Gamma_{ln}}{4(\omega_0 - \omega_{ln})} [\exp(-i\omega_0\tau') - \exp(-i\omega_{ln}\tau')] \quad (\tau' = \tau - r - 2, \quad r \rightarrow \infty)$$

где принято приближенное равенство $\xi_l^{(s)}(\omega) \approx \omega$. Функция Q_{ln} носит характер «коэффициента усиления», введенного в [11]. В случае комплексного резонанса, когда линия возбуждения совпадает с линией резонанса, а ширины спектров равны, $\omega_0 = \omega_{ln}$, $Q_{ln} = 1/4\Gamma_{ln}\tau' \exp(-i\omega_{ln}\tau')$.

Максимальное значение модуля усиления $|Q_{ln}| = (2\epsilon)^{-1}$ достигается за время, равное удвоенной «продолжительности жизни» переизлученного парциального импульса, $\tau' = 2\tau_{ln}$, $\tau_{ln} = \Gamma_{ln}^{-1}$. Усиление сначала происходит линейно, затем убывает со временем распада порядка $2\tau_{ln}$. Смещение линии возбуждения относительно резонанса вызывает «биения» переизлученных квазимонохроматических импульсов на разностной частоте $\omega^\circ = \omega_0' - \omega_{ln}'$, причем максимум усиления убывает пропорционально расстоянию от точного положения резонанса

$$\max |Q_{ln}| \approx \frac{1}{2\tau_{ln}} \exp\left(-\frac{\tau'}{2\tau_{ln}}\right) \left| \frac{\sin(1/2\omega^\circ\tau')}{\omega^\circ} \right|, \quad \tau_{ln} \approx \tau_0$$

При совпадении несущей и резонансных частот, $\omega_0' \approx \omega_{ln}'$:

$$Q_{ln} = \frac{\tau_0}{2(\tau_0 - \tau_{ln})} \exp(-i\omega_0'\tau') \left[\exp\left(-\frac{\tau'}{2\tau_0}\right) - \exp\left(-\frac{\tau'}{2\tau_{ln}}\right) \right]$$

время достижения макс $|Q_{ln}|$ равно $\tau'_{\max} = 2\tau_0\tau_{ln} \ln(\tau_0\tau_{ln}^{-1})(\tau_0 - \tau_{ln})^{-1}$. Возбуждение узкой линией $\Gamma_0 \ll \Gamma_{ln}$ (длинная посылка, $\tau_0 \gg \tau_{ln}$), когда $\tau'_{\max} \approx 2\tau_{ln}$, не меняет качественного характера времени роста и амплитуду усиления по сравнению со случаем комплексного резонанса. Однако время распада сигнала $\approx \tau_0^{-1}$. При широкополосном возбуждении $\Gamma_0 \gg \Gamma_{ln}$ (короткая посылка, $\tau_0 \ll \tau_{ln}$), когда $\tau'_{\max} \approx 2\tau_0$, время распада имеет порядок комплексно-резонансного случая, а амплитуда усиления и время нарастания сигнала по порядку меньше в $\tau_0\tau_{ln}^{-1}$ раз. Эти результаты в соответствии с [11] позволяют определить среднее время задержки рассеянного сигнала, вызванное наличием возбужденной упругой сферической оболочки $\langle \Delta\tau \rangle \approx 2\tau_{ln}$ ($\tau_0 \gg \tau_{ln}$), $\langle \Delta\tau \rangle \approx 2\tau_0$ ($\tau_0 \ll \tau_{ln}$).

Озвучивание упругой оболочки на высоких частотах приводит к перераспределению принятой энергии посылки на большое число нормальных мод. В результате эхо-сигнал формируется за счет переизлучения звука в акустическую среду периферическими волнами. Для очень тонких оболочек преобладающими являются периферические волны безмоментной моды [4, 5]. Квазистационарные состояния при возбуждении более толстых оболочек формируются за счет переизлучения нормальными волнами типа Лемба (для оболочек, относительная толщина которых изменяется от 0,02 до 0,09, в [21] разработана соответствующая теория описания спектральных линий первых трех типов нормальных волн — безмоментной, изгибной и сдвиговой). Исходя из (2.6) можно определить эхо-сигнал в виде бегущих квазимонохроматических импульсов, обладающих фазовыми и групповыми скоростями $c_h(\omega_0') = c\omega_0'(l_h' + 1/2)^{-1}$, $c_{h,g}(\omega_0') = c(dl_h'/d\omega_0')^{-1}$ с угловыми угасаниями $\theta_h(\omega_0') = 2[v_h(\omega_0')]^{-1}$. Нетрудно также аналитически установить условия резонансного возбуждения эхо-импульсов.

В заключение отметим, что предложенный подход полностью переносится на случай рассеяния звука резонансно-возмущенной тонкой упругой круговой цилиндрической оболочкой бесконечной длины (плоская задача). При наличии информации о собственных колебаниях тонких упругих оболочек произвольного профиля в вакууме можно разработать аналогичную теорию резонансного рассеяния и на этот случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. — В кн.: Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
2. Wigner E. P., Eisenbud L. Higher angular momenta and long range interaction in resonance reaction. — Phys. Rev., 1947, v. 72, No. 1, p. 29–41.
3. Gaunaurd G., Uberall H. R-matrix theory of sound scattering from fluid spheres via the Mittag — Leffler expansion. — J. Acoust. Soc. Amer., 1980, v. 68, No. 6, p. 1850–1857.
4. Veksler D. N. Sound pulse scattering by thin elastic cylindrical shells. — Acoust. Letters, 1980, v. 4, No. 2, p. 15–18.
5. Векслер Н. Д. О природе рассеяния акустических волновых пакетов тонкостенными упругими цилиндрическими оболочками. — Изв. АН ЭССР. Физ., матем., 1981, № 2, с. 147–158.
6. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 476 с.
7. Нигул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э. Эхо-сигналы от упругих объектов. Т. 2. Таллин: Изд-е Ин-та кибернетики АН ЭССР, 1974. 345 с.
8. Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Стулов А. С. Дифракция акустических импульсов на упругих телах. М.: Наука, 1979. 240 с.
9. Лейн А., Томас Р. Теория ядерных реакций при низких энергиях. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 476 с.
10. Брейт Г. Теория резонансных ядерных реакций. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 464 с.
11. Нуссенцвейг Х. М. Причинность и дисперсионные соотношения. М.: Мир, 1976. 461 с.
12. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968. 624 с.
13. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976. 664 с.

14. Таблицы физических величин. Справочник./Под ред. И. К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1005 с.
15. Коллинз П. Введение в реджевскую теорию и физику высоких энергий. М.: Атомиздат, 1980. 432 с.
16. Поддубняк А. П. Высокочастотные асимптотики отраженных и проходящих волн при рассеянии звука полый упругой сферой с жидким наполнителем.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 6, с. 823—830.
17. Хёня Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
18. Dickey J. W., Uberall H. Surface wave resonance in sound scattering from elastic cylinders.— J. Acoust. Soc. Amer., 1978, v. 63, No. 2, p. 319—320.
19. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.
20. Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений. М.: Мир, 1969. 756 с.
21. Поддубняк А. П. Резонансное рассеяние акустических волн упругой сферической оболочкой в жидкости.— Акуст. ж. 1984, т. 30, № 1, с. 89—95.

Львов

Поступила в редакцию
19.VII.1982