

УДК 539.3:534.1

ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ И УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

КЛИМЮК Ю. С., ОНИЩУК О. В., ПОПОВ Г. Я.

Методика, предложенная в [1, 2] для решения задачи об изгибе пластинки с тонким включением, переносится на аналогичные задачи о колебаниях и устойчивости пластинки. Как и в [1, 2], эти задачи сводятся к интегральным уравнениям первого рода с гладким ядром, решения которых ищутся в классе функций с неинтегрируемыми особенностями.

Проводится исследование влияния включения на величину собственных частот колебаний пластинки и критическое значение нагрузки.

1. Задача о колебаниях пластинки с тонким жестким включением. Рассматриваются установившиеся колебания прямоугольной пластинки ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$). Дифференциальное уравнение относительно амплитудной функции прогибов $w(x, y)$ имеет вид

$$\Delta^2 w(x, y) - \gamma^2 w(x, y) = 0 \quad (\gamma^2 = \nu^2 \rho h D^{-1}) \quad (1.1)$$

где Δ — лапласиан, ν — частота колебаний, ρ — плотность, h — толщина, D — цилиндрическая жесткость пластинки.

Предполагая контур пластинки шарнирно опертым, запишем граничные условия

$$w|_{x=0,a} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0,a} = 0 \quad (0 \leq y \leq b), \quad w|_{y=0,b} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0,b} = 0 \quad (0 \leq x \leq a) \quad (1.2)$$

Будем считать, что внутри пластинки на отрезке $y = l = 1/2 b$, $c_1 < x < c_2$ имеется тонкое жесткое включение, к которому приложена сила $P e^{i\nu t}$. Наличие включения в общем случае вызывает разрыв непрерывности прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и обобщенных поперечных сил

$$\langle w \rangle = \omega(x), \quad \langle w' \rangle = \chi(x), \quad \langle M_y \rangle = \mu(x), \quad \langle V_y \rangle = \psi(x) \quad (1.3)$$

$$\langle f \rangle = f(x, l-0) - f(x, l+0)$$

причем, если $0 < x < c_1$ либо $c_2 < x < a$, то

$$\omega = \chi = \mu = \psi = 0 \quad (1.4)$$

Предполагая колебания симметричными относительно прямой $y = l$, а включение сцепленным с материалом пластинки, запишем условия, которые должны выполняться на включении

$$w(x, l \pm 0) = Ax + B, \quad w_y'(x, l \pm 0) = 0 \quad (c_1 < x < c_2) \quad (1.5)$$

При этом из симметрии задачи относительно прямой $y = l$ и второго условия из (1.5) вытекает, что в (1.3) следует положить

$$\omega(x) = \chi(x) = \mu(x) = 0 \quad (0 < x < a) \quad (1.6)$$

Задача состоит в определении собственных частот колебаний пластинки. Для решения поставленной задачи воспользуемся обобщенным методом интегральных преобразований [2], а именно применим к задаче (1.1),

(1.2) конечное синус-преобразование Фурье [3] по переменной y (через включение). Реализация схемы [2] приводит к краевой задаче

$$\begin{aligned} w_n^{IV}(x) - 2\beta^2 w_n''(x) + (\beta^4 - \gamma^2) w_n(x) &= D^{-1} \sin \beta l \psi(x) \\ w_n(0) = w_n(a) = w_n''(0) = w_n''(a) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

относительно трансформанты

$$w_n(x) = \int_0^b w(x, y) \sin \beta y dy, \quad \beta = \beta_n = \frac{\pi n}{b} \quad (n=1, 2, \dots)$$

Решение краевой задачи (1.7) может быть выражено с помощью конечного синус-преобразования Фурье по x формулой

$$\begin{aligned} w_n(x) &= \frac{2 \sin \beta l}{aD} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{(\beta^2 + \alpha^2)^2 - \gamma^2} \sin \alpha x \\ \alpha = \alpha_k &= \frac{\pi k}{a}, \quad \psi_k = \int_0^a \psi(\xi) \sin \alpha \xi d\xi = \int_{c_1}^{c_2} \psi(\xi) \sin \alpha \xi d\xi \end{aligned}$$

(последнее равенство получено на основании (1.4)).

Функция $\psi(x)$, как и в [1, 2], может иметь неинтегрируемые особенности вида $(x-c_1)^{-3/2}(c_2-x)^{-3/2}g(x)$. В этом случае интегралы понимаются в регуляризованном смысле [4].

Применяя формулу обращения для конечного синус-преобразования Фурье по y , получим выражение функции прогибов пластинки через скачок $\psi(x)$:

$$w(x, y) = \frac{4}{abD} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \beta l \sin \beta y \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{(\beta^2 + \alpha^2)^2 - \gamma^2} \int_{c_1}^{c_2} \psi(\xi) \sin \alpha \xi d\xi \quad (1.8)$$

Реализуя теперь первое из условий (1.5), изменив предварительно в (1.8) порядок суммирования и интегрирования, получаем следующее интегральное уравнение относительно неизвестного скачка $\psi(x)$:

$$\frac{4}{abD} \int_{c_1}^{c_2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sin \alpha x \sin \alpha \xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta l}{(\beta^2 + \alpha^2)^2 - \gamma^2} \right) \psi(\xi) d\xi = Ax + B \quad (c_1 < x < c_2)$$

Ряд по n здесь можно просуммировать с помощью формул 0.234(2), 1.421(1,2) из [5].

Вводя новые обозначения, интегральное уравнение можно записать в виде

$$\frac{a^2}{2\pi^3 D} \int_{c_1}^{c_2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k x \sin \alpha_k \xi}{k^3} \kappa_k \right) \psi(\xi) d\xi = Ax + B \quad (c_1 < x < c_2) \quad (1.9)$$

$$\sigma = \frac{b}{a}, \quad \nu_* = \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} (1 + \sigma^2), \quad \delta_k = \frac{\gamma}{\alpha_k^2} = \frac{\nu}{\nu_*} \left(1 + \frac{1}{\sigma^2} \right) \frac{1}{k^2}$$

$$\lambda_k = \sqrt{1 + \delta_k}, \quad \mu_k = \sqrt{|1 - \delta_k|}, \quad \rho_k = 1/2 \pi \sigma k$$

$$\kappa_k = (\mu_k^{-1} \operatorname{tg} \mu_k \rho_k - \lambda_k^{-1} \operatorname{th} \lambda_k \rho_k) / \delta_k \quad (\delta_k > 1)$$

$$\kappa_k = (\rho_k - \lambda_k^{-1} \operatorname{th} \lambda_k \rho_k) / \delta_k \quad (\delta_k = 1)$$

$$\kappa_k = (\mu_k^{-1} \operatorname{th} \mu_k \rho_k - \lambda_k^{-1} \operatorname{th} \lambda_k \rho_k) / \delta_k \quad (\delta_k < 1)$$

(ν_* — первая собственная частота колебаний пластинки без включения [6]).

Выделение главной части ядра путем суммирования медленно сходящейся части ряда в (1.9) с помощью формул 1.462, 1.518(1) из [5] и формул 1.6.6.(3), 1.6.6.(5), 1.6.7.(3) из [7] приводит уравнение к форме

$$\frac{1}{8\pi D} \int_{c_1}^{c_2} [(x-\xi)^2 \ln|x-\xi| + R(x, \xi)] \psi(\xi) d\xi = Ax + B \quad (c_1 < x < c_2) \quad (1.10)$$

где $R(x, \xi)$ — бесконечно дифференцируемая при $c_1 \neq 0, c_2 \neq a$ функция.

Уравнение (1.10) является уравнением того же типа, что и в [1, 2]. Поэтому по аналогии с [1, 2] его решение будем искать в классе функций с неинтегрируемыми особенностями $\psi(\xi) = (\xi - c_1)^{-1/2} (c_2 - \xi)^{-1/2} \psi_0(\xi)$.

Для дальнейшего более удобной является форма записи интегрального уравнения в виде (1.9).

Будем считать, что включение расположено симметрично относительно прямой $x = 1/2a$ (т. е. $c_1 = 1/2(a-c), c_2 = 1/2(a+c), c = c_2 - c_1$), и форма колебаний является симметричной относительно этой прямой. Тогда в условиях (1.5) и в уравнении (1.9) следует принять $A = 0$.

Учитывая четность функции $\varphi(\tau) = 1/2\pi c \psi(\xi)$ ($\tau = (2\xi - a)c^{-1}$), от (1.9) приходим к уравнению

$$\int_{-1}^1 \left(\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos \theta_k t \cos \theta_k \tau}{k^3} \kappa_k \right) \varphi(\tau) d\tau = \frac{2\pi^4 DW_0}{a^2} \quad (|t| < 1) \quad (1.11)$$

$$t = (2x - a)c^{-1}, \quad B = W_0, \quad \varepsilon = ca^{-1}, \quad \theta_k = 1/2\pi \varepsilon k$$

Это уравнение будем решать методом ортогональных многочленов [2], для чего введем функции [4]:

$$\begin{aligned} \pi_n(\tau) &= 2\sqrt{\pi}(2n)! [\Gamma(2n - 1/2)]^{-1} (1 - \tau^2)^{-3/2} P_n(\tau) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ P_0(\tau) &= \tau^2 - 1, \quad P_n(\tau) = P_{2n}^{-1/2, -1/2}(\tau) \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $P_{2n}^{-1/2, -1/2}(\tau)$ — многочлены Якоби, определяемые формулой [5]:

$$P_k^{-1/2, -1/2}(\tau) = \frac{(-1)^k (1 - \tau^2)^{-1/2}}{2^k k!} \frac{d^k}{d\tau^k} [(1 - \tau^2)^{k-1/2}] \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Подставляя $\varphi(\tau) = \sum \varphi_n \pi_n(\tau)$, где φ_n — неизвестные коэффициенты, в (1.11), умножая (1.11) на $\pi_m(t)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) и интегрируя по t от -1 до 1 , получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно φ_n ($J(z)$ — функция Бесселя):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \varphi_n = b_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.13)$$

$$a_{00} = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} k^{-3} \kappa_k [J_0(\theta_k)]^2, \quad b_0 = 2\pi^3 DW_0 a^{-2}, \quad b_m = 0 \quad (m \geq 1)$$

$$a_{n0} = a_{0n} = \frac{1}{2} (-1)^n \pi \varepsilon \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} k^{-2} \kappa_k J_0(\theta_k) J_{2n-1}(\theta_k) \quad (n \geq 1)$$

$$a_{mn} = \frac{1}{4} (-1)^{m+n} \pi^2 \varepsilon^2 \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} k^{-1} \chi_k J_{2m-1}(\theta_k) J_{2n-1}(\theta_k) \quad (m \geq 1, n \geq 1)$$

При этом используются формулы

$$\int_{-1}^1 \pi_n(\tau) \cos b\tau d\tau = (-1)^n \pi b J_{2n-1}(b), \quad \int_{-1}^1 \pi_n(\tau) d\tau = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$\int_{-1}^1 \pi_0(\tau) \cos b\tau d\tau = \pi J_0(b), \quad \int_{-1}^1 \pi_0(\tau) d\tau = \pi$$

получаемые регуляризацией интегралов соответственно в формулах 7.355(2), 7.393(2) и 7.391(1) из [5].

Используя уравнение движения включения, которое в случае установившихся колебаний имеет вид

$$P - R = -v^2 W_0 M_1, \quad R = \int_{c_1}^{c_2} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) d\tau = \varphi_0$$

где M_1 — масса включения, R — главный вектор скачка поперечных сил, φ_0 — коэффициент при $\pi_0(\tau)$, можно при заданном значении M_1 установить зависимость между амплитудой P , приложенной к включению внешней силы, и амплитудой W_0 колебания включения.

Собственная частота колебаний будет получена, если потребовать, чтобы $P=0$. При этом она оказывается зависящей от M_1 и длины включения c . Поскольку для вычисления коэффициентов в системе (1.13) нужно задать значение v , то оказывается удобнее строить зависимость M_1 от v и c . Переходя к безразмерным величинам $\Omega = v v_*^{-1}$, $\varepsilon = c a^{-1}$, $M_* = M_0 M_1^{-1}$ (M_0 — масса пластинки), получаем

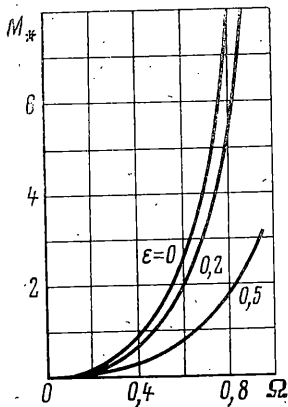
$$M_*(\Omega, \varepsilon) = \frac{\rho h a b}{m} v^2 W_0 = \frac{\pi^4 (1 + \sigma^2)^2}{\sigma^3 c v} \Omega^2, \quad \varphi_* = \varphi_*(\Omega, \varepsilon) = \varphi_0 a^2 W_0^{-1} D^{-1}$$

где φ_* — решение системы (1.13) при $b_0 = 2\pi^3$ в правой части. При этом, как и следовало ожидать, амплитуда собственных колебаний пластинки остается неопределенной.

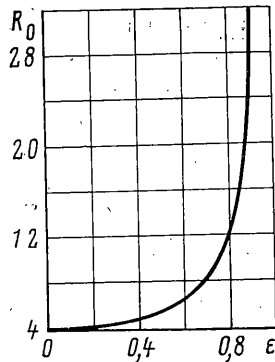
Диапазон, в котором следует задавать Ω , зависит от того, какая по порядку собственная частота исследуется. Поскольку при $\Omega \rightarrow 1-0$ величины $\text{tg } \mu_1 \rho_1$ и χ_1 стремятся к бесконечности, а φ_* — к нулю, то, меняя Ω от 0 до 1 (соответственно v от 0 до v_*), получим все значения M_* от 0 до бесконечности. Это показывает, что первая собственная частота колебаний пластинки с включением меньше, чем пластинки без включения.

Доказательство квазирегулярности системы (1.13) при $\varepsilon \in [0, 1)$ проводится точно так же, как и для аналогичной системы в [1, 2]. Поэтому приближенное решение системы (1.13) может быть получено методом редукции [8]. Выделение неинтегрируемых особенностей обеспечило быструю сходимость метода. Достаточная точность получалась при сохранении в (1.13) трех-четырёх уравнений.

Вычисления проводились для квадратной пластинки ($\sigma=1$). Полученные значения $M_*(\Omega)$ при различных значениях ε показаны на графиках (фиг. 1). Собственную частоту колебаний пластинки $v = v(M_*, \varepsilon)$ можно найти по формуле $v = \Omega(M_*, \varepsilon) v_*$, где значение Ω находится на оси абсцисс, если выбирать кривую, соответствующую данному ε , а значение M_* — на оси ординат. При $\varepsilon=0$ (включение переходит в сосредоточенный груз) результаты совпадают с имеющимися в [6], где приведена функция $f(\lambda) =$



Фиг. 1



Фиг. 2

$=2M_*(\Omega, 0)/\pi$, $\lambda=2\Omega$. При увеличении длины включения собственная частота возрастает, а при увеличении массы включения — уменьшается.

2. Устойчивость пластинки с жестким тонким включением. Предложенная выше схема решения задачи о колебаниях пластинки с тонким жестким включением легко переносится и на задачу об устойчивости прямоугольной пластинки, содержащей тонкое жесткое включение.

Пусть пластинка, описанная в п. 1, сжимается нормальной равномерно распределенной нагрузкой N_x , приложенной к граням $x=0$, $x=a$ пластинки. Требуется определить зависимость критического значения нагрузки N_x от заданного отношения длины включения к длине пластинки $\varepsilon=ca^{-1}$ и отношения длин сторон пластинки $\sigma=ba^{-1}$.

Относительно функции прогибов пластинки $w(x, y)$ задача формулируется в виде дифференциального уравнения

$$\Delta^2 w(x, y) + \gamma^2 \partial^2 w(x, y) / \partial x^2 = 0 \quad (\gamma^2 = N_x / D)$$

граничных условий (1.2) и условий на включении (1.5), (1.6).

Решая эту задачу по схеме п. 1, приходим к интегральному уравнению (1.9) относительно скачка поперечных сил $\psi(x)$ с тем лишь отличием, что в этом случае следует положить $\delta_k = \gamma \alpha_k^{-1}$.

Поэтому, как и прежде, решение задачи ищем в классе функций с неинтегрируемыми особенностями, а интегралы будем понимать в регуляризованном смысле.

Предположим, что включение расположено симметрично относительно прямой $x=1/2a$. При этом, по смыслу задачи, очевидно, в соответствии с формой выпучивания пластинки возможны два случая: функция $\psi(\xi)$ является четной относительно прямой $\xi=1/2a$, и тогда $A=0$ ($B=W_0 \neq 0$); функция $\psi(\xi)$ нечетна относительно прямой $\xi=1/2a$ и, следовательно, $A \neq 0$ ($1/2Aa + B = 0$).

Выполним в уравнении (1.9) замену переменных, причем в первом случае полагаем $\varphi(\tau) = 1/2 \pi c a^2 W_0^{-1} D^{-1} \psi(\xi)$, а во втором — $\varphi(\tau) = 1/2 \pi c^2 A^{-1} D^{-1} \psi(\xi)$. Тогда в первом случае получаем уравнение (1.11) с правой частью, равной $2\pi^4$, решение которого сводится к решению бесконечной алгебраической системы (1.13), в которой $b_0 = 2\pi^3$. Во втором случае приходим к уравнению

$$\int_{-1}^1 \left(\sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\sin \theta_k t \sin \theta_k \tau}{k^3} \kappa_k \right) \varphi(\tau) d\tau = \pi^4 \varepsilon^2 t \quad (|t| < 1) \quad (2.1)$$

Полагая в этом случае

$$\pi_n(\tau) = 2\sqrt{\pi}(2n+1)! [\Gamma(2n+1/2)]^{-1} (1-\tau^2)^{-1/2} P_{2n+1}^{-1/2, -1/2}(\tau) \quad (n \geq 0)$$

и разыскивая решение уравнения (2.1) в виде $\varphi(\tau) = \sum \varphi_n \pi_n(\tau)$, получаем относительно φ_n бесконечную систему алгебраических уравнений (1.13), для которой

$$b_0 = 4\pi, \quad b_m = 0 \quad (m \geq 1)$$

$$a_{mn} = a_{nm} = (-1)^{m+n} \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} k^{-1} \chi_k J_{2m}(\theta_k) J_{2n}(\theta_k) \quad (m \geq 0, n \geq 0)$$

При этом для получения системы (1.13) используются формулы

$$\int_{-1}^1 \pi_n(\tau) \sin b\tau d\tau = (-1)^n \pi b J_{2n}(b) \quad (n \geq 0)$$

$$\int_{-1}^1 \pi_0(\tau) \tau d\tau = \pi, \quad \int_{-1}^1 \pi_n(\tau) \tau d\tau = 0 \quad (n \geq 1)$$
(2.2)

которые следуют соответственно из формул 7.393 (1) и 7.391 из [5].

Доказательство квазирегулярности системы (1.13) в обоих случаях проводится точно так же, как и в [1, 2]. Поэтому приближенное решение системы (1.13) в каждом из случаев может быть получено методом редукции.

Искомую зависимость критического значения нагрузки N_x от отношения длины включения к длине пластинки $\varepsilon = ca^{-1}$ и отношения длин сторон пластинки $\sigma = ba^{-1}$ получим записав условия равновесия для включения, т. е. приравнивая нулю главный вектор и главный момент сил, действующих на включение со стороны пластинки

$$P = \int_{c_1}^{c_2} \psi(\xi) d\xi = q_1 \int_{-1}^1 \varphi(\tau) d\tau = 0,$$

$$M = \int_{c_1}^{c_2} \left(\xi - \frac{a}{2} \right) \psi(\xi) d\xi = q_2 \int_{-1}^1 \varphi(\tau) \tau d\tau = 0$$
(2.3)

В первом случае $q_1 = \pi^{-1} a^{-2} W_0 D$, $q_2 = 1/2 \pi^{-1} a^{-2} c W_0 D$, а во втором — $q_1 = (\pi c)^{-1} AD$, $q_2 = 1/2 \pi^{-1} AD$.

В первом случае условие для P из (2.3) дает $\varphi_0 = 0$, а условие для M в силу четности $\varphi(\tau)$ выполняется автоматически. Во втором случае условие $P=0$ выполняется в силу нечетности $\varphi(\tau)$, а второе условие (2.3) на основании второй формулы из (2.2), как и в первом случае, приводит к равенству $\varphi_0 = 0$.

Поскольку φ_0 , которое определяется из системы (1.13), зависит от N_x , ε , σ (эти величины входят в выражения для коэффициентов системы), то на основании проведенных рассуждений искомая зависимость в обоих случаях принимает вид $\varphi_0(N_x, \varepsilon, \sigma) = 0$. Это равенство и является уравнением для определения критического значения нагрузки по заданным значениям ε и σ .

В расчетах критические значения нагрузки N_x представлялись в виде

$$N_x = \pi^2 b^{-2} DR \quad (2.4)$$

где R — коэффициент, зависящий от ε и σ , $\gamma = N_x^{1/2} D^{-1/2} = \pi R^{1/2} / b$.

Далее при выбранных значениях ε и σ следует, вообще говоря, отдельно для каждого из случаев подобрать такое наименьшее значение $R = R_0$,

при котором, решив систему (1.13), получим $\varphi_0=0$. Подстановка наименьшего из найденных таким образом двух значений R_0 в формулу (2.4) дает значение критической нагрузки при заданных значениях ε , σ . Кроме того, в соответствии с тем, какому из случаев соответствует это наименьшее R_0 , определяется четность формы выпученной поверхности пластинки.

Для квадратной пластинки ($\sigma=1$) получены с использованием ЭВМ численные результаты. С точностью до четырех значащих цифр вычисленные значения R_0 при различных значениях ε . Указанная точность вычислений достигается при сохранении в системе (1.13) трех-четырёх уравнений.

Результаты вычислений представлены графиком (фиг. 2). Для получения критического значения нагрузки при заданном значении ε следует на оси абсцисс зафиксировать это значение и соответствующее значение ординаты R_0 подставить в формулу (2.4).

Анализ и сравнение полученных численных результатов с известным решением задачи об устойчивости прямоугольной пластинки без включения [9] показывают, что наличие включения приводит в случае квадратной пластинки к увеличению критического значения нагрузки, тем больше, чем больше длина включения.

При $\varepsilon=0$ (включение отсутствует) в первом случае аналогично [4] получаем

$$\varphi_0 = b_0 a_{00}^{-1}, \quad b_0 = 2\pi^3, \quad a_{00} = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} k^{-3} \kappa_k \quad (2.5)$$

Тогда условие $\varphi_0=0$ будет выполнено, если $a_{00}=\infty$, для чего необходимо (поскольку $\kappa_k \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$), чтобы хотя бы одно из κ_k обратилось в бесконечность, т. е. $\operatorname{tg} \mu_k \rho_k = \infty$, откуда для критического значения нагрузки получаем формулу

$$(N_x)_{кр} = (\pi^2 D / b^2) [\sigma k + 1 / (\sigma k)]^2 \quad (k=2n+1, n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

что совпадает с известным [9] решением задачи об устойчивости прямоугольной пластинки без включения.

Во втором случае при $\varepsilon=0$ уравнение $\operatorname{tg} \mu_k \rho_k = \infty$ также приводит к формуле (2.6) при $k=2n$ ($n=1, 2, \dots$), однако аналитическое получение данного уравнения путем предельного перехода при ε , стремящемся к нулю, осложняется в этом случае расходимостью ряда

$$a_{00}(\varepsilon) = \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} k^{-1} \kappa_k [J_0(1/2\pi \varepsilon k)]^2$$

при $\varepsilon=0$. Можно показать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ ряд $a_{00}(\varepsilon) = O(\ln \varepsilon)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Онищук О. В., Попов Г. Я. О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 144—150.
2. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
3. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
4. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
6. Филиппов А. П. Колебания упругих систем. Киев: Изд-во АН УССР, 1956. 322 с.
7. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
8. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
9. Огибалов П. М. Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. М.: Изд-во МГУ, 1958. 389 с.

Одесса

Поступила в редакцию
24.XII.1982