

УДК 539.3:534.1

СВЕРХНИЗКИЕ СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

ГОЛОВАНОВ В. А., ПОПОВ А. Ю.

Рассмотрены свободные колебания тонких упругих оболочек вращения положительной кривизны, закрепленных вблизи вершин. Установлено, что спектры осесимметричных и антисимметричных колебаний содержат сверхнизкие частоты. Выведены частотные уравнения. Исследовано поведение частот при изменении координаты закрепленной параллели и относительной толщины оболочки.

1. Рассматривается задача о свободных колебаниях тонкой упругой изотропной оболочки вращения положительной кривизны с достаточно гладкой срединной поверхностью. Пусть h — толщина оболочки, E , ν , ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки, ω — частота колебаний, $\lambda = \omega^2 R_0^2 \rho / E$ — безразмерный частотный параметр (в дальнейшем λ также будем называть частотой), R_0 — радиус кривизны в вершине. Отнесем срединную поверхность оболочки к системе координат θ , φ , в которой θ — угол между осью вращения и нормалью к поверхности, φ — угол поворота вокруг оси вращения (фиг. 1).

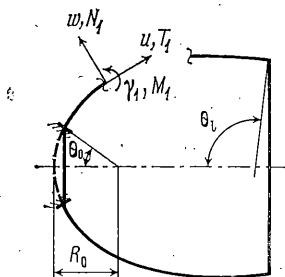
Будем рассматривать два варианта закрепления оболочки вблизи вершины по параллели $\theta = \theta_0$ ($\theta_0 \ll 1$): защемление и неподвижное шарнирное опирание. Другой край оболочки $\theta = \theta_1$ полагается свободным (частный случай $\theta_1 = \pi$ соответствует оболочке, замкнутой в вершине).

Собственные формы колебаний оболочек вращения, закрепленных по параллелям, описываются функциями вида $f_1(\theta) \cos m\varphi$ и $f_2(\theta) \sin m\varphi$ [1]. При осесимметричных и антисимметричных колебаниях $m=0$ и $m=1$ соответственно. Спектры собственных частот этих колебаний в рассматриваемых случаях закрепления содержат частоты, которые в определенном смысле являются сверхнизкими.

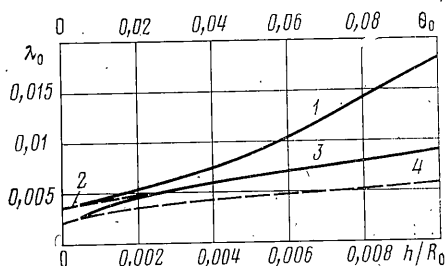
Рассмотрим в качестве примера осесимметричные колебания оболочки вращения, защемленной в вершине. Очевидно, в осесимметричном случае реакцией опоры является сосредоточенная сила, направленная вдоль оси вращения. Если осевая сила действует на незакрепленную оболочку, то при достаточно малых частотах оболочка будет совершать колебания почти как жесткое целое. Амплитуда осевого перемещения в этом случае определяется по формуле $u_z = -F_z / (M\omega^2)$, где F_z — амплитуда силы, $M = \rho h S$ — масса оболочки, S — площадь срединной поверхности оболочки. Как следует из [2], прогиб w_0 под сосредоточенной силой F_z , статически действующей в вершине, выражается в виде $w_0 = F_z R_0 [3(1-\nu^2)]^{1/2} / (4Eh^2)$. Из условия защемления $w_0 + u_z = 0$ вытекает следующее выражение для собственной частоты:

$$\lambda_0 = 4[3(1-\nu^2)]^{-1/2} R_0 h / S \quad (1.1)$$

Хотя формула (1.1), очевидно, имеет приближенный характер, однако она дает хорошую оценку. Так, например, значение частоты, найденное экстраполяцией результатов численного решения задачи для половины сферической оболочки ($\theta_1 = \pi/2$) при $h/R_0 = 0,01$ (все приводимые ниже численные результаты получены при $\nu = 0,3$), равно 0,0038, а значение



Фиг. 1



Фиг. 2

частоты, вычисленное по формуле (1.1), равно 0,0039. Укажем, что здесь и в дальнейшем приводятся результаты численного решения краевой задачи для уравнений колебаний оболочки вращения, основанного на методе сведения к задачам Коши [3].

Из равенства (1.1) следует, что при $h/R_0 \rightarrow 0$ собственная частота $\lambda_0 \rightarrow 0$. Это свойство позволяет называть данную частоту сверхнизкой.

Способ вывода формулы (1.1) по существу аналогичен методу динамических податливостей, позволяющему свести исходную задачу для распределенной системы к эквивалентной задаче для системы с конечным числом степеней свободы [4].

2. Рассмотрим теперь осесимметричные колебания произвольной оболочки вращения для первого варианта закрепления. Опорными реакциями являются в этом случае меридиональное усилие T_{10} , перерезывающее усилие N_{10} и момент M_{10} . Свободная от закреплений оболочка под действием осевых усилий $F_{z0} = -T_{10} \sin \theta_0 + N_{10} \cos \theta_0$, равномерно распределенных по параллели $\theta = \theta_0$, при достаточно малых частотах колебаний в первом приближении перемещается как жесткое целое. Амплитуда осевого перемещения u_{z0} при этом определяется по формуле $u_{z0} = -2\pi r_0 F_{z0} / (M\omega^2)$, где $r_0 = R_0 \sin \theta_0$ — радиус параллели $\theta = \theta_0$.

Пусть известны интегралы, описывающие локальную деформацию в окрестности вершины оболочки. Компоненты локального напряженно-деформированного состояния можно представить следующим образом:

$$y = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)} + C_3 y^{(3)} \quad (2.1)$$

где через y обозначены величины u , w , γ_1 , T_1 , N_1 , M_1 — меридиональное перемещение, прогиб, угол поворота нормали, меридиональное усилие, перерезывающее усилие и изгибающий момент (фиг. 1), C_1 , C_2 , C_3 — постоянные. Верхним индексом $i=1, 2, 3$ отмечены компоненты i -го интеграла.

Подчиняя условиям защемления при $\theta = \theta_0$ деформацию оболочки, полученную наложением локальной деформации на перемещение оболочки как жесткого целого, приходим к следующим уравнениям:

$$U_z(\theta_0) = u(\theta_0) \sin \theta_0 - w(\theta_0) \cos \theta_0 + \frac{2\pi r_0}{M\omega^2} [T_1(\theta_0) \sin \theta_0 - N_1(\theta_0) \cos \theta_0] = 0$$

$$U_r(\theta_0) = u(\theta_0) \cos \theta_0 + w(\theta_0) \sin \theta_0 = 0, \quad \gamma_1(\theta_0) = 0 \quad (2.2)$$

где U_z , U_r — осевая и радиальная компоненты вектора перемещения. Подставляя в (2.2) выражения (2.1), получаем систему трех линейных алгебраических уравнений относительно C_1 , C_2 , C_3 . Из условия существования нетривиального решения этой системы следует частотное уравнение.

Локальное статическое напряженно-деформированное состояние оболочки рассмотрено в ряде работ [5, 6]. Для получения интегралов, описывающих локальное состояние при колебаниях, воспользуемся подходом, примененным при выводе статических регулярных интегралов в окрест-

ности вершины в [7]. В качестве исходных уравнений примем уравнения в перемещениях пологой сферической оболочки.

Локальное состояние определяется тремя нерегулярными в вершине интегралами. В безразмерной форме их компоненты записываются в виде

$$\begin{aligned}
 z_1^{(1)} &= \frac{1}{x}, & z_4^{(1)} &= -\frac{c}{(1+\nu)x^2}, & z_2^{(1)} &= z_3^{(1)} = z_5^{(1)} = z_6^{(1)} = 0 \\
 z_1^{(2)} &= \frac{1+\nu}{c} \operatorname{kei}' x, & z_2^{(2)} &= -\operatorname{ker} x, & z_3^{(2)} &= -c \operatorname{ker}' x \\
 z_4^{(2)} &= -\frac{1}{x} \operatorname{kei}' x, & z_5^{(2)} &= -\frac{1-\lambda}{c} \operatorname{kei}' x \\
 z_6^{(2)} &= \left[\frac{1-\lambda}{12(1-\nu^2)} \right]^{1/2} \left(\frac{1-\nu}{x} \operatorname{ker}' x + \operatorname{kei} x \right) \\
 z_1^{(3)} &= -\frac{1+\nu}{c} \operatorname{ker}' x, & z_2^{(3)} &= -\operatorname{kei} x, & z_3^{(3)} &= -c \operatorname{kei}' x \\
 z_4^{(3)} &= \frac{1}{x} \operatorname{ker}' x, & z_5^{(3)} &= \frac{1-\lambda}{c} \operatorname{ker}' x \\
 z_6^{(3)} &= \left[\frac{1-\lambda}{12(1-\nu^2)} \right]^{1/2} \left(\frac{1-\nu}{x} \operatorname{kei}' x - \operatorname{ker} x \right) \\
 z_1 &= u/R_0, & z_2 &= w/R_0, & z_3 &= \gamma_1, & z_4 &= T_1/(Eh) \\
 z_5 &= N_1/(Eh), & z_6 &= M_1/(Eh^2), & x &= c\theta, & c^4 &= (1-\lambda)c_0^4 \\
 & & & & c_0^4 &= 12(1-\nu^2)R_0^2/h^2
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\operatorname{ker} x$, $\operatorname{kei} x$, $\operatorname{ker}' x$, $\operatorname{kei}' x$ — функции Кельвина нулевого порядка и их первые производные [8]. В рассматриваемом случае $\lambda \ll 1$ и, следовательно, $c \approx c_0$, т. е. допустимо вместо динамических использовать статические интегралы.

На основе выражений (2.1), (2.3) и условий (2.2) получаем следующее выражение для сверхнизкой собственной частоты:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi R_0^2}{S} \frac{1}{1+\theta_0^2} \left\{ [12(1-\nu^2)]^{-1/2} \left(\frac{h}{R_0} \right)^{1/2} \theta_0 \frac{p_0}{q_0} + \frac{\theta_0^2}{1+\nu} \right\}$$

$$p_0 = (\operatorname{ker}' x_0)^2 + (\operatorname{kei}' x_0)^2 \tag{2.4}$$

$$q_0 = \operatorname{ker}' x_0 \operatorname{kei} x_0 - \operatorname{ker} x_0 \operatorname{kei}' x_0, \quad x_0 = c_0 \theta_0$$

где S — площадь срединной поверхности оболочки.

Для сопоставления результатов приближенного аналитического и численного решений рассмотрен случай половины сферической оболочки ($\theta_1 = \pi/2$). Ниже приведены результаты численного решения задачи (строка 1) и результаты вычислений по формуле (2.4) (строка 2), полученные для оболочки относительной толщины $h/R_0 = 0,01$ при различных значениях θ_0 :

θ_0	0,01	0,025	0,05	0,15	0,30
1	0,00438	0,00579	0,00899	0,0312	0,0908
2	0,00441	0,00583	0,00909	0,0314	0,0878

При выполнении расчетов по формуле (2.4) привлекались таблицы функций Кельвина [9].

При $\theta_0 \ll c_0^{-1}$ из равенства (2.4) с использованием асимптотических разложений функций Кельвина и их производных получаем

$$\lambda_0 \sim \frac{\pi R_0^2}{S} [3(1-\nu^2)]^{-1/2} \left(\frac{h}{R_0} \right) \frac{4 + (x_0^2 \ln x_0)^2}{\pi - 2(x_0 \ln x_0)^2} \tag{2.5}$$

Из соотношения (2.5) при $\theta_0 \rightarrow 0$ следует предельная формула (1.1).

На фиг. 2 сплошной линией (кривая 1) изображена зависимость λ_0 от θ_0 при $h/R_0 = 0,01$, полученная методом численного решения задачи; штриховой линией (кривая 2) представлены результаты вычислений по асимптотической формуле (2.5).

При фиксированном значении θ_0 и $h/R_0 \rightarrow 0$ из формулы (2.4) следует

$$\lambda_0 \sim \frac{2\pi R_0^2}{S} \frac{\theta_0}{1+\theta_0^2} \left\{ [3(1-\nu^2)]^{-1/2} \left(\frac{h}{R_0} \right)^{1/2} + \frac{\theta_0}{1+\nu} \right\} \quad (2.6)$$

Отметим, что это асимптотическое представление не является равномерным относительно θ_0 , так как значения аргументов функций Кельвина возрастают при уменьшении h/R_0 и, наоборот, убывают при уменьшении θ_0 .

На фиг. 2 сплошной линией (кривая 3) показано изменение λ_0 в зависимости от h/R_0 при $\theta_0 = 0,05$. Соответствующие асимптотические результаты отмечены штриховой линией (кривая 4).

На фиг. 3 сплошными линиями изображены компоненты u (кривая 1) и w (кривая 2) нормированной собственной формы колебаний оболочки при $h/R_0 = 0,01$ и $\theta_0 = 0,05$, соответствующей частоте $\lambda_0 = 0,00899$. Штриховыми линиями показаны компоненты перемещения оболочки как жесткого целого. Там же приведены компоненты u (кривая 3) и w (кривая 4) формы колебаний, отвечающей следующей в спектре собственной частоте $\lambda_1 = 0,776$. Эта частота при изменении θ_0 в рассматриваемом диапазоне изменяется весьма незначительно.

Рассмотрим теперь второй вариант закрепления — неподвижное шарнирное опирание. В этом случае третье условие из (2.2) заменяется равенством $M_1(\theta_0) = 0$. Выражение для собственной частоты записывается в виде

$$\lambda_0 = \frac{2\pi R_0^2}{S} \frac{1}{1+\theta_0^2} \left\{ [12(1-\nu^2)]^{-1/2} \left(\frac{h}{R_0} \right)^{1/2} \theta_0 \times \right. \\ \left. \times \frac{(1-\nu)p_0 + x_0 q_0}{(1-\nu)q_0 + x_0 s_0} + \frac{\theta_0^2}{1+\nu} \right\}, \quad s_0 = (\ker x_0)^2 + (\ker i x_0)^2 \quad (2.7)$$

Из соотношения (2.7) при $\theta_0 \rightarrow 0$ следует предельная формула (1.1).

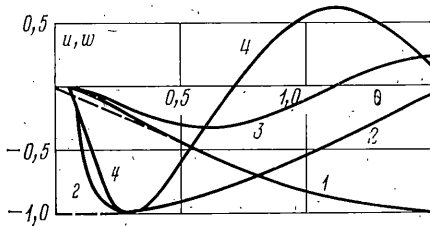
Ниже приведены значения λ_0 , полученные при численном решении (строка 1) и при вычислениях по формуле (2.7) (строка 2) при $h/R_0 = 0,01$:

θ_0	0,01	0,025	0,05	0,15	0,30
1	0,00358	0,00390	0,00579	0,0239	0,0776
2	0,00360	0,00393	0,00584	0,0240	0,0754

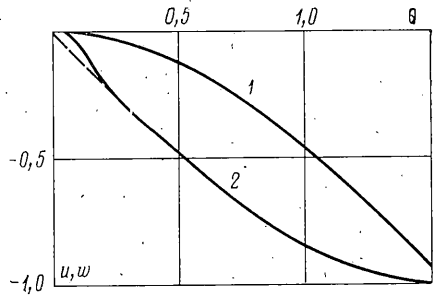
Приведенные данные показывают, что при увеличении θ_0 от нуля расхождение между значениями частоты λ_0 для защемления и шарнирного опирания сначала увеличивается, достигает максимума и затем убывает. При $\theta_0 = 0,3$ расхождение составляет $\sim 14,5\%$ (по отношению к случаю защемления).

Аналогично может быть исследовано поведение сверхнизкой собственной частоты осесимметричных колебаний оболочки вращения, закрепленной вблизи обеих вершин. В частности, результаты, полученные для половины сферической оболочки, переносятся без изменений на случай сферической оболочки, закрепленной по параллели $\theta = \pi - \theta_0$ так же, как и по параллели $\theta = \theta_0$.

3. Приведем кратко результаты, относящиеся к антисимметричным колебаниям ($m=1$) оболочки, защемленной вблизи вершины. Спектр антисимметричных колебаний содержит частоту, которой отвечает собственная форма колебаний с локальным характером деформации. На фиг. 4 изображена указанная собственная форма (приводимые ниже численные резуль-



Фиг. 3



Фиг. 4

таты получены для половины сферической оболочки), найденная численным методом, при $h/R_0=0,01$; $\theta_0=0,05$ (кривые 1, 2 соответствуют u , w).

Кривая, соответствующая окружной компоненте перемещения v , в заданном масштабе сливается с кривой 1. Построенная форма колебаний вне малой окрестности заземленной параллели практически не отличается от перемещения оболочки как жесткого целого, являющегося поворотом в малом вокруг оси, которая проходит через вершину перпендикулярно оси вращения оболочки. Собственная частота, отвечающая этой форме колебаний, равна $0,600 \cdot 10^{-4}$.

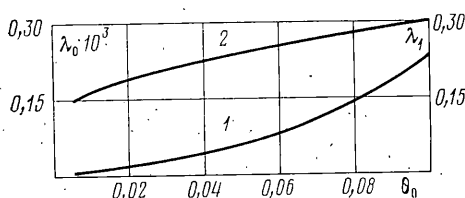
В рассматриваемом случае формулу для указанной собственной частоты можно вывести тем же способом, который описан выше для случая осесимметричных колебаний. При реализации данного подхода требуется найти нерегулярные интегралы, линейная комбинация которых описывает локальное напряженно-деформированное состояние.

Введем в рассмотрение угол поворота оболочки вокруг оси, проходящей через вершину, и составим уравнение движения оболочки как жесткого целого. Это уравнение связывает угол поворота и суммарный момент всех компонент реакции заземления. Наложив на перемещение оболочки как жесткого целого локальное напряженно-деформированное состояние и подчинив результат условиям заземления при $\theta=\theta_0$, приходим к системе уравнений, условие нетривиального решения которой дает искомое выражение для собственной частоты. Не останавливаясь на деталях вывода, приведем окончательную формулу:

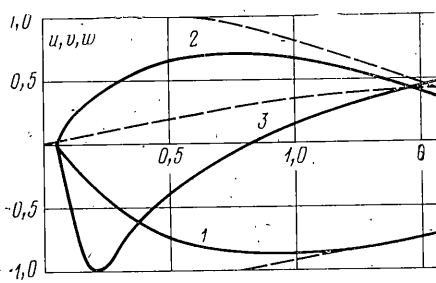
$$\begin{aligned} \lambda_0 = & \pi \rho h R_0^4 [(1+\nu) c_0^4 J]^{-1} x_0^2 \{ (1+\nu) [4(1+\nu) a_1 + \\ & + a_2 x_0^2 + 4a_3 x_0^2 \ln \theta_0] + \\ & + 4a_4 x_0^4 \ln \theta_0 \} [(1+\nu) a_2 + 4a_1 x_0^2 \ln \theta_0]^{-1} \\ & a_1 = q_1/x_0, \quad a_{2,3} = p_1 \pm 2t_1/x_0 + s_1/x_0^2 \\ & p_1 = (\ker_1' x_0)^2 + (\ker_1 x_0)^2 \\ & q_1 = \ker_1' x_0 \ker_1 x_0 - \ker_1 x_0 \ker_1' x_0 \\ & s_1 = (\ker_1 x_0)^2 + (\ker_1' x_0)^2 \\ & t_1 = \ker_1' x_0 \ker_1 x_0 + \ker_1 x_0 \ker_1' x_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь J — момент инерции оболочки относительно оси, проходящей через вершину перпендикулярно оси вращения; $\ker_1 x$, $\ker_1' x$, $\ker_1 x$, $\ker_1' x$ — функции Кельвина первого порядка и их производные [8]. При $h/R_0=0,003$ и $\theta_0=0,05$ формула (3.1) и численное решение задачи дают для собственной частоты λ_0 значения $0,184 \cdot 10^{-4}$ и $0,176 \cdot 10^{-4}$ соответственно. Для определения значений функций Кельвина привлекались таблицы [10].

На фиг. 5 кривой 1 изображена зависимость λ_0 от θ_0 при $h/R_0=0,01$, полученная в результате численного решения задачи. Из формулы (3.1) при



Фиг. 5



Фиг. 6

$\theta_0 \rightarrow 0$ и $h/R_0 = \text{const}$ получается соотношение $\lambda_0 = -4\pi\rho h R_0^4 (Jc_0^4 \ln \theta_0)^{-1} [1 + O(1/\ln \theta_0)]$, откуда следует, что $\lambda_0 \rightarrow 0$ при $\theta_0 \rightarrow 0$.

Следующая в спектре частота λ_1 существенно превышает λ_0 . Соответствующую собственную форму уже нельзя трактовать как суперпозицию локального напряженно-деформированного состояния и перемещения оболочки как жесткого целого. Эта форма для случая $h/R_0 = 0.01$; $\theta_0 = 0.05$ представлена на фиг. 6 (кривые 1, 2, 3 соответствуют u , v , w ; $\lambda_1 = 0.240$). Там же штриховыми линиями показаны компоненты некоторого возможного перемещения оболочки как жесткого целого: Собственная частота λ_1 , как и частота λ_0 , сильно зависит от θ_0 . На фиг. 5 кривой 2 представлена указанная зависимость при $h/R_0 = 0.01$. В отличие от λ_0 частота λ_1 относительно слабо зависит от h/R_0 .

Отметим, что третья в спектре собственная частота λ_2 ($\lambda_2 = 0.861$ при $h/R_0 = 0.01$; $\theta_0 = 0.05$) при изменениях θ_0 и h/R_0 в рассматриваемых диапазонах изменяется незначительно.

В случае антисимметричных колебаний оболочки вращения, закрепленной вблизи обеих вершин, первой собственной частоте отвечают колебания, которые не имеют локального характера деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
2. Чернышев Г. Н. Прогиб под сосредоточенной силой в оболочках положительной кривизны. — ПММ, 1967, т. 31, вып. 5, с. 883–886.
3. Кармишин А. В., Ляковец В. А., Мясников В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 376 с.
4. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высш. школа, 1972. 416 с.
5. Круглякова В. И. Оболочки вращения с малым центральным отверстием под действием симметричной и антисимметричной нагрузки. — В кн.: Исследования по упругости и пластичности: Сб. статей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1965, вып. 4, с. 123–158.
6. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шниренко К. И. Сферические днища, ослабленные отверстиями. Киев: Наук. думка, 1970. 324 с.
7. Кукуджанов В. Н., Любимов В. М., Пшеничных Г. И. Расчет деформированных состояний отражающей поверхности зеркал телескопов. — В кн.: Сборник по численным методам в механике твердого деформируемого тела. М.: ВЦ АН СССР, 1978, с. 3–17.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 830 с.
9. Носова Л. Н. Таблицы функций Томсона и их первых производных. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 424 с.
10. Таблицы функций Кельвина. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 120 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.III.1983