МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1984

УДК 539.375

ДИНАМИКА ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ В СРЕДАХ СО СТРУКТУРОЙ

СЛЕПЯН Л. И.

Распространение трещин или волн разрушения в упругом теле сопровождается потоком энергии в движущуюся границу (линию или поверхность). Однако интенсивность потока энергии определяется не только затратами непосредственно на изменение свойств среды во фронте разрушения (например, на преодоление межатомных связей), но и энергией, идущей на возбуждение сопутствующих этому волн, параметры которых существенно зависят от структуры среды и скорости распространения упомянутой граничной линии. Поэтому в отличие от всех других соотношений, которые могут быть основаны, например, на классической теории упругости, при формулировке критерия разрушения необходимо учитывать роль конкретной структуры среды.

Исследования по этому направлению были начаты решением задач о трещинах в решетках [1–4]. Однако то же явление – отток энергии от края трещины или от фронта волны разрушения – характерно не только для дискретных, но и для непрерывных моделей сред, наделенных внутренней структурой. Существенна лишь возможность распространения волн, уносящих энергию.

В данной статье определяется соотношение между потоками энергии – идущим непосредственно на разрушение (энергия разрушения на «микроуровне») и стекающим к краю трещины в длинноволновом приближении (на «макроуровне») – применительно к сплошной линейно-упругой однородной среде со структурой довольно общего вида. Выводятся также соответствующие формулы для дискретных сред.

1. Формулы для потока энергии. Пусть трещина в некоторой окрестности данной точки на ее границе представляет собой гладкую поверхность, граница – гладкую линию. Координату x направим по касательной к трещине вдоль внешней нормали к ее границе. Предположим, что в данный момент скорость v расширения трещины и асимптотики функций, характеризующих раскрытие трещины и напряжения на ее продолжении (у ее края), непрерывны во времени и вдоль границы. Как известно, в случае сплошной линейно-упругой среды (без структуры) поток энергии в край трещины, приходящийся на единицу ее площади, при указанных условиях определяется формулой (см., например, [5]):

$$T=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}[\mathbf{u}_-(-x)*\boldsymbol{\sigma}_+(x)],\qquad \mathbf{u}_-(-x)*\boldsymbol{\sigma}_+(x)=\int_0^x \mathbf{u}_-(\xi-x)\cdot\boldsymbol{\sigma}_+(\xi)\,d\xi \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}_-(x)$ – перемещение верхнего берега трещины (полагаем, что перемещение нижнего берега отличается лишь знаком), $\boldsymbol{\sigma}_+(x)$ – вектор напряжения, действующего со стороны верхнего берега на нижний при $x>0$ (на продолжении трещины).

Линейная теория упругости определяет асимптотики

$$\mathbf{u}_-\sim\mathbf{M}\sqrt{-x}H(-x),\quad \boldsymbol{\sigma}_+\sim\mathbf{N}H(x)/\sqrt{x}\quad (x\to 0)$$

($H(x)$ – функция Хевисайда), при которых поток энергии $T=\frac{\pi}{2}\mathbf{M}\cdot\mathbf{N}$ отличен от нуля.

К формуле (1.1) приводит вычисление работы, которую необходимо затратить, чтобы закрыть трещину на некотором сужающемся интервале у ее края. При выводе формулы использовалось лишь предположение о линейности задачи, другие данные о модели среды не привлекались. Поэтому формула справедлива не только для классической модели сплошной линейно-упругой среды, но и для других моделей, в рамках которых может быть поставлена линейная задача о трещине. При этом $\mathbf{u}_-$, $\boldsymbol{\sigma}_+$ могут быть произвольными обобщенными функциями, для которых существует указанный предел ($\mathbf{u}_-(-x)$ и $\boldsymbol{\sigma}_+(x)$ отличны от нуля лишь при $x\geqslant 0$, поэтому интегрирование в (1.1) в общем случае проводится на интервале $-\varepsilon\leqslant\xi\leqslant x+\varepsilon$, $\varepsilon\to+0$).

Если функции $\mathbf{u}_-$, $\boldsymbol{\sigma}_+$ таковы, что на некотором отрезке $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$ существует непрерывная производная от свертки (1.1), то из этой формулы следует

$$T=\lim_{x\to 0}[\mathbf{u}_-(-x)*\boldsymbol{\sigma}_+(x)]' \tag{1.2}$$

где знак производной (штрих) можно отнести к любой из свертываемых функций. Последнюю формулу можно вывести основываясь непосредственно на расчете потока энергии для движущейся трещины.

Приложим к нижнему берегу трещины на интервале $-\tau\leqslant x\leqslant 0$ напряжение $a\boldsymbol{\sigma}_+(x+\tau)$ и тот же вектор, но другого знака, — к верхнему берегу. Учитывая предположение о непрерывности и линейность задачи, дополнительное перемещение на интервале $-\tau\leqslant x\leqslant 0$ можно выразить так:

$$\mathbf{u}_a(x)\sim -a\mathbf{u}_-(x) \quad (\tau\to 0) \tag{1.3}$$

Далее, так как при $a=1$ асимптотика напряжений, порождающая поток энергии в точку $x=0$, исчезает (край трещины перемещается в точку $x=-\tau$), то при произвольном значении a она приобретает множитель $1-a$. Та же асимптотика, но с множителем a, появляется в правой окрестности точки $x=-\tau$ (там приложена внешняя нагрузка). Потоки энергии в точки $x=0$, $x=-\tau$ в силу линейности задачи пропорциональны квадратам указанных множителей. Поток энергии, создаваемый нагрузкой, приложенной на интервале $-\tau\leqslant x\leqslant 0$, равен $(\partial/\partial t\sim -v\partial/\partial x)$:

$$\frac{a}{v}\int_{-\tau}^{0}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{u}_-(x)+\mathbf{u}_a(x)]\cdot\boldsymbol{\sigma}_+(x+\tau)\,dx=a\{[\mathbf{u}_-(-x)+\mathbf{u}_a(-x)]*\boldsymbol{\sigma}_+(x)\}'=$$
$$=a(1-a)[\mathbf{u}_-(-x)*\boldsymbol{\sigma}_+(x)]' \tag{1.4}$$

Заметим теперь, что напряжения, приложенные к берегам трещины на малом отрезке у ее края и не изменяющиеся в системе координат, движущейся вместе с краем трещины, не влияют на общий поток энергии, они лишь перераспределяют его из точки $x=0$ на отрезок $-\tau\leqslant x\leqslant 0$. Ввиду этого справедливо уравнение

$$T=(1-a)^2T+a^2T+\lim_{\tau\to 0}2a(1-a)[\mathbf{u}_-(-\tau)*\boldsymbol{\sigma}_+(\tau)]'$$

из которого и следует формула (1.2).

Для дальнейшего удобнее оказываются формулы в виде пределов на комплексной плоскости параметра преобразования Фурье. Их можно получить с помощью известной предельной теоремы (обычно формулируемой для преобразования Лапласа). Пусть предел (1.1) существует. Учитывая, что носитель свертки (1.1) — правая полуось x, можем записать

$$T=\lim_{p\to+\infty}p\int_{p}^{\infty}\mathbf{u}_-^F(-ip)\cdot\sigma_+^F(ip)\,dp \tag{1.5}$$

где для функции $f(x)$ с носителем Γ_0: $f^F(q)=\int\limits_{\Gamma_0} f(x)e^{iqx}dx$

Если существует и предел (1.2), то

$$T=\lim_{p\to+\infty} p^2\mathbf{u}_-^F(-ip)\cdot\sigma_+(ip) \tag{1.6}$$

Пусть, например

$$\mathbf{u}_-(-x)=\mathbf{M}D_\lambda(x),\quad \boldsymbol{\sigma}_+(x)=\mathbf{N}D_\mu(x),\quad D_\lambda=x^{\lambda-1}H(x)/\Gamma(x)\quad (\lambda>0)$$

$$D_{\lambda-n}(x)=D_\lambda^{(n)}(x),\quad D_{-n}(x)=\delta^{(n)}(x)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $n=1, 2, \ldots$. Тогда

$$\mathbf{u}_-^F(-ip)=\mathbf{M}p^{-\lambda},\quad \boldsymbol{\sigma}_+^F(ip)=\mathbf{N}p^{-\mu}$$

$$T=\lim_{p\to+\infty}\mathbf{M}\cdot\mathbf{N}p^{2-\lambda-\mu} \tag{1.7}$$

Отсюда и из (1.6) (или (1.5)) видно, что ограниченный и отличный от нуля предел существует, если $\lambda+\mu=2$. Если же $\lambda+\mu>2$, то $T=0$. В линейной теории упругости при дорэлеевской скорости трещины $\lambda={}^3/_2+n$, $\mu={}^1/_2+n$, $n=0, 1, \ldots$.

Если перемещение u_- и напряжение σ_+ стремятся при $x\to0$ к конечным пределам, то в соответствии с (1.1) или (1.2)

$$T=\mathbf{u}_-(-0)\cdot\boldsymbol{\sigma}_+(+0) \tag{1.8}$$

Формула (1.8) применима и к дискретным средам. В этом случае $\boldsymbol{\sigma}_+$ — сила, растягивающая связь непосредственно перед ее разрушением, отнесенная к площади (в плоскости трещины), приходящейся на одну связь.

2. О соотношении между потоками энергии на различных уровнях описания структуры линейно-упругой среды. При вычислении потока энергии, который зависит лишь от указанных выше асимптотик, задачу можно полагать стационарной, т. е. такой, в которой зависимость от координаты x и времени t проявляется в виде зависимости от одной переменной $\tau=x-vt$. Рассмотрим плоскую стационарную задачу о динамике плоской полубесконечной трещины (разреза), сводящуюся к уравнению Винера — Хопфа [6]

$$\sigma_+(\tau)+S_0(\tau)*u_-(\tau)=-\sigma_-(\tau) \tag{2.1}$$

где σ_- — заданная функция с носителем при $x<0$. Уравнение (2.1) содержит лишь по одной из компонент векторов $\mathbf{u}_-$, σ_+, фигурировавших выше. Таким образом, здесь предполагается, что либо другие компоненты не влияют на данное уравнение, либо они равны нулю. Кроме того, предполагается, что рассматриваемые функции — медленного роста и удовлетворяют условию ограниченности потока энергии, точнее, существует предел (1.2).

Преобразование Фурье по τ, которое можно рассматривать как преобразование по x при фиксированном t или как преобразование по $(-vt)$ при некотором значении x (последняя интерпретация существенна для дискретной среды), приводит к задаче Римана (см., например, [7]) определения функций $\sigma_+^F(q)$, аналитической в верхней полуплоскости q (исключая вещественную ось), и $u_-^F(q)$, аналитической в нижней полуплоскости, удовлетворяющих на вещественной оси уравнению

$$\sigma_+^F(q)+S_0^F(q)u_-^F(q)=-\sigma_-^F(q) \tag{2.2}$$

Доопределим задачу, исходя из предположения, что ее решение является пределом при $t\to\infty$ решения той же, но нестационарной задачи с нулевыми начальными условиями. Этот принцип причинности [8] (принцип предельной амплитуды [9]) приводит к правилу отбора стационарных решений, основанному на представлении [2, 3]:

$$S_0^F(q)=\lim_{\varepsilon\to 0} S^{LF}(s,q)=S^F(iqv+0,q) \tag{2.3}$$

где $S^{LF}(s,q)$, $1/S^{LF}(s,q)$ — LF-преобразования (преобразование Лапласа по t с параметром $s=\varepsilon+iqv$ и Фурье по x с параметром q) фундаментальных решений соответствующей нестационарной задачи $\sigma(t,x)+S(t,x)**u(t,x)=0$, а именно: $\sigma^{LF}=S^{LF}$ при $u=-\delta(t)\delta(x)$, $u^{LF}=1/S^{LF}$ при $\sigma=-\delta(t)\delta(x)$. Если рассматриваемая линейно-упругая среда устойчива (что и предполагается), то указанные фундаментальные решения не растут экспоненциально и LF-изображения не имеют особых точек, а следовательно, и нулей при $\varepsilon=\operatorname{Re} s>0$, $\operatorname{Im} q=0$. Поэтому представлением (2.3) функция S_0^F на вещественной оси q доопределяется полностью в том смысле, что из (2.3) однозначно устанавливается правило обхода ее особых точек и нулей.

Пусть $\ln|S_0^F(q)|$ локально интегрируем, а асимптотики функции S^F представимы в виде

$$S^F=A(0+iq)^\alpha(0-iq)^\beta+O(q^{\alpha+\beta+\gamma})\quad(q\to 0)$$

$$S^F=Be^{\pm i\pi d}|q|^\nu+O(q^{\nu-\gamma})\quad(q\to\pm\infty),\quad A,\,B,\,\gamma>0;\quad d=\operatorname{Ind} S^F \tag{2.4}$$

Неравенство $A>0$ следует из положительности работы внешних напряжений для устойчивого материала. Значения аргумента S^F ($\operatorname{Arg} S^F=\operatorname{Im}\ln S^F$) при $q\to\pm\infty$ определяются индексом S^F ($\operatorname{Ind} S^F$) — приращением аргумента S^F при изменении q от $-\infty$ до $+\infty$, деленным на 2π, и нечетностью $\operatorname{Arg} S^F$ как функции q. Последнее вытекает непосредственно из формулы преобразования Фурье вещественной функции и представления (2.3).

Длинноволновое (низкочастотное) приближение — асимптотику S^F при $q\to 0$ — можно рассматривать как описание среды без учета ее структуры. Определив потоки энергии, соответствующие этому приближению и полному представлению для S^F, получим искомое соотношение между потоками энергии, отвечающее тому уровню структуры упругой среды, который нашел отражение в структуре функции S_0. Ниже при выводе указанного соотношения будут также определены связи между параметрами α, β, d и потоками энергии. Положим

$$S^F=S_*^F(q)B(0+iq)^\alpha(0-iq)^\beta\left[\left(\frac{A}{B}\right)^{1/2n_-}+\right.$$

$$\left.+(0+iq)^2\right]^{n_-}\left[\left(\frac{A}{B}\right)^{1/2n_+}+(0-iq)^2\right]^{n_+} \tag{2.5}$$

$$n_-=\tfrac{1}{2}(d-\alpha+\nu/2),\quad n_+=-\tfrac{1}{2}(d+\beta-\nu/2)$$

Тогда

$$S_*^F=1+O(q^\gamma)\quad(q\to 0)$$

$$S_*^F=1+O(q^{-\gamma})\quad(q\to\pm\infty),\quad \operatorname{Ind} S_*^F(q)=0 \tag{2.6}$$

Теперь можно факторизовать S^F, т. е. представить

$$S^F=S_+^F S_-^F \tag{2.7}$$

$$S_+^F=S_{*+}^F\sqrt{B}(0-iq)^\beta\left[\left(\frac{A}{B}\right)^{1/2n_+}+(0-iq)^2\right]^{n_+}$$

$$S_-^F=S_{*-}^F\sqrt{B}(0+iq)^\alpha\left[\left(\frac{A}{B}\right)^{1/2n_-}+(0+iq)^2\right]^{n_-}$$

$$S_{*\pm}^F=\exp\left(\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln S_*^F(\xi)}{\xi-q}\,d\xi\right)\quad(\operatorname{Im} q\gtrless 0)$$

Учитывая, что $\ln|S_*^F(q)|$ — четная, а $\operatorname{Arg} S_*^F(q)$ — нечетная функции, и полагая $\operatorname{Arg} S_*^F(0)=0$, приходим отсюда к следующим выражениям для предельных значений:

$$S_{*\pm}^F \to 1 \quad (q\to\pm i\infty), \qquad S_{*\pm}^F\to\varkappa^{\pm 1} \quad (q\to 0) \tag{2.8}$$

$$\varkappa = \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{q}\operatorname{Arg} S_*^F(q)\,dq\right)$$

$$S_+^F\sim\sqrt{B}(-iq)^{\nu/2-d} \quad (q\to i\infty), \qquad S_+^F\sim\sqrt{A}(0-iq)^{\beta}\varkappa \quad (q\to 0)$$

$$S_-^F\sim\sqrt{B}(iq)^{\nu/2+d} \quad (q\to -i\infty), \qquad S_-^F\sim\sqrt{A}(0+iq)^{\alpha}\varkappa^{-1} \quad (q\to 0) \tag{2.9}$$

Представим уравнение (2.2) в виде

$$\sigma_+^F/S_+^F+S_-^F u_-^F=-\sigma_-^F/S_+^F \tag{2.10}$$

Пусть $m<\beta\leqslant m+1$, $m=0, 1, \ldots$. Положим $(\operatorname{Im} q=0)$:

$$\frac{\sigma_-^F}{S_+^F}=-\sum_{n=0}^{m} a_n[(0-iq)^{-1-n}+(0+iq)^{-1-n}]=-2\pi\sum_{n=0}^{m} a_n\frac{(-i)^n}{n!}\delta^{(n)}(q) \tag{2.11}$$

где постоянные коэффициенты a_n вещественны, поскольку мнимая часть данного выражения — нечетная функция q. При этом $\sigma_-^F(q)$ как обобщенная функция равна нулю: $\sigma_-^F=\sum_{n=0}^{m} b_n\delta^{(n)}(q)q^\beta\equiv 0$, $b_n=\mathrm{const}$ и, следовательно, уравнение (2.10) с правой частью (2.11) отвечает однородной задаче. Однако при $\varepsilon>0$ указанная сумма отлична от нуля, так что решение однородной стационарной задачи является пределом решения неоднородной нестационарной задачи.

Складывая частное решение неоднородного уравнения (2.10) с решением однородного уравнения, находим

$$\sigma_+^F=S_+^F\sum_{n=k}^{m} a_n(0-iq)^{-n-1}, \qquad u_-^F=\frac{1}{S_-^F}\sum_{n=k}^{m}(-1)^n a_n(0+iq)^{-n-1} \quad (k\leqslant m) \tag{2.12}$$

Обращаясь к формуле (1.6), находим потоки энергии, причем для длинноволнового приближения поток энергии определяется по асимптотикам (2.9) для $q\to 0$ экстраполяцией их на произвольно большие значения q (при этом $d={}^1/_2(\alpha-\beta)$). «Точное» значение потока энергии, определенное с учетом структуры среды

$$T_0=(-1)^k a_k^2 \quad (d+k=0), \qquad T=0 \quad (d+k>0) \tag{2.13}$$

Поток энергии в длинноволновом приближении

$$T=(-1)^k a_k^2\varkappa^2 \quad (\alpha-\beta+2k=0), \qquad T=0 \quad (\alpha-\beta+2k>0) \tag{2.14}$$

Итак, ограниченный, но отличный от нуля поток энергии существует на обоих уровнях (с учетом и без учета структуры) тогда и только тогда, когда существует такое целое число n, что

$$n\leqslant m<\beta\leqslant m+1, \qquad d+n=0, \qquad \alpha-\beta+2n=0 \tag{2.15}$$

где m — также целое. В этом случае соотношение между потоками энергии определяется формулой

$$k(v)=\frac{T_0}{T}=\varkappa^{-2}=\exp\left(-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1}{q}\operatorname{Arg} S_*^F(q)\,dq\right) \qquad (2.16)$$

указанной ранее применительно к трещине в решетке [10], где $\operatorname{Arg} S_*^F = \operatorname{Arg} S^F$ (см. п. 3).

С учетом неравенств (2.15) из формулы (2.13) следует:

ограниченный предел (1.2) существует лишь в том случае, когда $\beta>-d$. При этом условии можно положить $k\geqslant -d$ и предел (1.6) оказывается конечным;

поток энергии может быть отличным от нуля только в том случае, когда индекс d целый (при этом можно положить $k=-d$);

при условиях $-d=k<\beta$ имеет место сток энергии в край распространяющейся трещины, если индекс d четный; край трещины оказывается источником энергии, если индекс нечетный.

Так, в плоской задаче о динамике трещины в сплошной линейно-упругой среде значения указанных постоянных оказываются следующими (см., например, [5]). В дорэлеевском диапазоне скорости трещины $d=0$, $\alpha=\beta=$ $=1/2$ и при $k=0$ существует положительный поток энергии в край трещины. В диапазоне между скоростями волны Рэлея и волны сдвига $d=1$, $\alpha=3/2$, $\beta=-1/2$. При $k=-1$ существует отрицательный поток энергии (поток из края трещины возникает здесь как возможное следствие предположения о распространении трещины со скоростью в указанном диапазоне). В межзвуковом диапазоне индекс дробный $d=d(v)$ [11], и следовательно, как и показано в [11], ненулевой ограниченный поток энергии невозможен. Тот же вывод сохраняется и для сверхзвуковой скорости трещины, так как при этом $d=1/2$.

Заметим, что при движении особой линии в противоположном направлении ($v<0$), что соответствует смыканию берегов трещины, знак потока энергии изменяется: при четных значениях d край трещины — источник энергии, при нечетных — сток.

В качестве простейшего примера ситуации, в которой уточнение теории, первоначально пригодной лишь для длинных волн, может повлечь за собой изменение вывода о «статьях» расхода энергии, можно привести задачу о неупругом падении нити на жесткое основание. Пусть точка контакта нити с основанием (граничная точка зоны контакта) движется влево ($v<0$): при $\tau>0$ нить покоится на основании, при $\tau<0$ — движется к основанию. Если учесть (приближенно) изгибную жесткость нити, то уравнение ее движения можно записать в виде (как и выше, положительным считаем напряжение, препятствующее положительному перемещению)

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\sigma \qquad (a,\ b=\mathrm{const}>0)$$

В данной задаче $S^F=a^2q^4+b^2(0+iqv)^2\sim b^2(0+iqv)^2$ $(q\to 0)$. При этом в обозначениях, принятых выше, для длинноволнового приближения ($a=0$) $\alpha=0$, $\beta=2$, $d=$ $=-1$ и, следовательно, при $k=1$ имеет место ограниченный поток энергии в точку контакта. Действительно, туда должна стекать кинетическая энергия нити. Однако учет изгибной жесткости ($a>0$) приводит к другому выводу: при тех же значениях α, β индекс $d=0$ и, следовательно, $T_0=0$ ($k=1$) — вся энергия, поступающая к точке контакта на «макроуровне», т. е. по длинноволновому приближению, излучается в виде энергии изгибных волн. Решение однородной задачи с учетом изгибной жесткости нити имеет вид

$$u_-=-A\left(\tau-\frac{a}{bv}\sin\frac{bv\tau}{a}\right)H(-\tau)$$
$$\sigma_+=Ab^2v^2\delta(\tau),\quad A=\mathrm{const}>0 \qquad (2.17)$$

Если $a\to 0$, то перемещение u_- (2.17) стремится к перемещению абсолютно гибкой нити, синусоидальная волна исчезает. Однако, как бы ни был мал параметр $a>0$, поток энергии в точку контакта остается равным нулю, т. е. не стремится при $a\to 0$ к потоку энергии в длинноволновом приближении. Учет деформаций сдвига вновь изменил бы вывод о потоках энергии и т. д. Таким образом, о потоке энергии можно говорить лишь применительно к конкретному уровню структуры.

Заметим, что в рассмотренной задаче излучение изгибных волн возможно лишь при $v<0$, так как их групповая скорость больше фазовой (последняя вследствие стационарности задачи равна v), а распространение возмущений на область $\tau>0$ запрещено: $u_+=0$.

Переход к однородной задаче ($\sigma_-=0$), описываемой неоднородным уравнением (2.10), (2.11), оказывается возможным, когда S_+^F обращается в нуль при $q=0$. Но S_+^F, вообще говоря, может обращаться в нуль и при других вещественных значениях q, скажем, при $q=\pm q_0\neq 0$. Это позволяет дополнить правую часть (2.10) суммой вида (2.11), где $\delta(q)$ заменяется на $\delta(q\mp q_0)$, причем число членов ограничивается порядком нуля S_+^F в точках $q=\pm q_0$. Такого вида правая часть отвечает притоку энергии в край трещины (или оттоку от нее) в форме энергии синусоидальных волн [2]. Взяв в приведенном выше примере (2.17) $v>0$, видим, что «трещина» может распространяться при высокочастотном возбуждении (полагаем, что по масштабам макроуровня параметр a мал и, следовательно, частота bv^2/a велика). При этом равномерное движение возникает за счет энергии волн.

3. Дискретная среда. Рассмотрим периодическую (в плоскости трещины) решетку, состоящую из точечных масс, каждая из которых взаимодействует с конечным числом других масс, причем притяжение двух масс друг к другу пропорционально увеличению расстояния между ними. Конкретный вид решетки и характер ее деформации не фиксируются. Предполагается, однако, что удлинение каждой из разрываемых связей описывается одной и той же функцией времени (со сдвигом, зависящим от положения связи). Одинаковыми полагаются жесткости разрываемых связей и массы, взаимодействие между которыми осуществляется с помощью этих связей.

Пусть направление от массы m к массе n вдоль разрываемой связи определяется единичным вектором $\mathbf{l}_{mn}$ и к массе n приложена внешняя сила $R(t,x)\mathbf{l}_{mn}$, а к массе m — та же, но противоположно направленная сила, $x=0, \pm 1, \ldots$ — номер разрываемой связи (предполагается, что разрываемые связи можно пронумеровать так, что при $x<vt$ они оказываются разорванными, а при $x>vt$ неповрежденными). Других внешних сил нет.

Предположим, что вследствие однородности решетки вдоль оси x соотношение между удлинением разрываемых связей $Q(t, x)$ и силами $R(t, x)$ для неповрежденной решетки представимо в виде

$$Q^{LF}(s,q)=(1-S^{LF}(s,q))R^{LF}(s,q)/E \tag{3.1}$$

где E — жесткость связи; символом F обозначено дискретное преобразование Фурье по x. Принимая $R=EQ_-+P$, где P — внешние силы в задаче о трещине, т. е. компенсируя действие разорванных связей [10], приходим к уравнению

$$Q_+^{LF}+S^{LF}Q_-^{LF}=(1-S^{LF})P^{LF}/E \tag{3.2}$$

Положив здесь, следуя [3], $s=iqv+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, умножив обе части на ε и устремив ε к нулю, придем к уравнению типа (2.2). Таким образом, соотношение между потоками энергии для решетки определяется функцией $S^F(iqv+0, q)$ (2.3), где S^{LF} взято из (3.1).

Кроме того будем предполагать устойчивость решетки, вследствие чего функция $S^{LF}(s,q)$ не имеет особых точек и нулей при $\operatorname{Re} s>0$ ($\operatorname{Im} q=0$), и симметрию: $Q(t,-x)=Q(t,x)$ при $R=\delta(t)\delta_{x0}$. Отсюда и из (3.1) следует, что $S^{LF}(s,q)$ — четная вещественная функция q при $s>0$.

В дальнейшем потребуется более сильное утверждение, а именно, $S^{LF}(s,q)>0$ при $s>0$. Покажем это. Соотношение (3.1) при $s>0$ можно рассматривать как соотношение для статической деформации решетки, смещению масс которой препятствуют упругие опоры (их жесткость пропорциональна s^2). Пусть $R^L=\exp(i\omega x)$, $R^{LF}=2\pi\delta(q+\omega)$. Тогда $EQ^L=$

$=(1-S^{LF}(s,\omega))\exp(i\omega x)$. Работа внешних сил, осредненная по периоду $(2\pi/\omega)$:

$$A=\frac{1}{2}Q^L\overline{R^L}=\frac{1}{2E}(1-S^{LF}(s,\omega))$$

больше энергии растягиваемых связей

$$B={}^1/_2E|Q^L|^2=(1-S^{LF}(s,\omega))^2/2E.$$

Итак, $0<1-S^{LF}(s,q)<1$ $(A>0)$, $0<S^{LF}(s,q)<1$.

Покажем теперь, что для решетки индекс d равен нулю и, более того, $\operatorname{Arg} S^F$ — финитная функция [10].

Положим $R=\delta(t)\delta_{x0}$, где δ_{mn} — символ Кронекера, и проведем преобразование Лапласа (при нулевых начальных условиях) над уравнениями динамики решетки (здесь они не выписываются). Тогда члены, соответствующие силам инерции, будут содержать (в отличие от других членов уравнений) множители s^2. Отсюда следует, что при достаточно больших значениях $|s|$ $(\operatorname{Re} s=\varepsilon>0)$ изображения перемещений $u_p{}^L$ можно определить методом последовательных приближений, который приводит к оценке

$$u_p{}^L(s)=O\left(s^{-2(k+1)}\right)\quad(|s|\to\infty) \qquad (3.3)$$

где k — минимальное число связей, с помощью которых данная масса p взаимодействует с какой-либо из масс, подверженных действию внешних сил. Поэтому при $\operatorname{Im} q=0$ справедлива оценка: $Q^{LF}(s,q)=O(s^{-2})$ $(|s|\to\infty)$. Но при указанных внешних силах, как видно из (3.1), $Q^{LF}(s,q)=$ $=(1-S^{LF}(s,q))/E$. Таким образом, при достаточно больших значениях $|s|(\varepsilon>0)$ функция $S^{LF}(s,q)$ близка к единице. Следовательно, при этом $\operatorname{Ind} S^{LF}(iqv+\varepsilon,q)=0$. Но, как уже отмечалось, S^{LF} не имеет особых точек и нулей при $\varepsilon>0$, поэтому ее индекс при уменьшении ε не изменяется и остается равным нулю и для $S^F(0+iqv,q)$.

Далее, если, рассматривая стационарную задачу, взять $R=\exp(iq\tau)$, то тем же путем снова получим оценку (3.3), где $s=iqv$. Отсюда видно, что при достаточно больших значениях q^2v^2 внешние силы не создают потока энергии (решетка — фильтр низких частот) и, следовательно, соответствующая этой стационарной задаче комплексная амплитуда $1-S^F(0+iqv,q)$ вещественна. Вместе с тем, как показано выше, $S^F(\varepsilon,0)>0$ $(\varepsilon>0)$ и поэтому можно принять $\operatorname{Arg} S^F(+0,0)=0$. Так как $\operatorname{Ind} S^F=0$, а $\operatorname{Arg} S^F$ — нечетная функция q, приходим к выводу, что при достаточно больших значениях q^2v^2 $\operatorname{Arg} S^F(0+iqv,q)=0$.

При дорэлеевской скорости трещины в обозначениях п. 2 (см. (2.5)) $\alpha=\beta={}^1/_2$, $n_+=n_-=-{}^1/_4$ $(d=\nu=0)$ и поэтому $\operatorname{Arg} S^F=\operatorname{Arg} S_*{}^F$. Следовательно, для решетки формула (2.16) и соответствующая ей из [6] совпадают.

Очевидно, что распространение трещины в решетке сопровождается потоком энергии, идущей на разрыв связей. При этом $\operatorname{Ind} S^F=0$, но, возможно, для длинноволнового приближения индекс отличен от нуля и поток энергии отсутствует (см. п. 2). В этом случае энергия поступает к краю трещины по существу лишь из ближайших слоев решетки, так что поток энергии на макроуровне не обнаруживается. Динамика трещины в решетке при таких условиях рассмотрена в [2].

Если скорость трещины достаточно мала, то к моменту разрыва данной связи возмущения, вызванные излучением волн при разрыве предыдущих связей, рассеиваются и напряженное состояние решетки можно считать статическим. Для такого «квазистатического» процесса распространения трещины формула (2.16) неудобна (ее можно использовать для определения предела при $v\to0$ [3]). Выведем формулу, позволяющую непосредственно определить $k(0)$.

Факторизацию периодической функции $S^F(+0,q)$ (будем обозначать ее $S^F(q)$) можно провести с помощью периодического аналога интеграла типа Коши [3] (полагаем, что разорваны связи $x=-1,-2,\ldots,$ соответственно индексом $+(-)$ снабжаем функции с носителями при $x=0, 1, \ldots$ $\ldots, (-1, -2, \ldots)$)

$$
\begin{aligned}
&S_\pm{}^F(q)=\exp\left(\int_{-\pi}^{\pi}\ln S^F(\xi)\,\delta_\pm(\xi-q)\,d\xi\right)\\
&\delta_\pm(\xi-q)=\pm\frac{1}{4\pi}\left(1-i\operatorname{ctg}\frac{\xi-q}{2}\right)\qquad(\operatorname{Im} q\gtrless 0)\\
&\delta_\pm\sim\pm\frac{1}{4\pi}+\frac{1}{2\pi}\frac{p}{\xi^2+p^2}\qquad(q=\pm ip\to 0,\ \operatorname{Im} p=0)\\
&\delta_+\to\frac{1}{2\pi}\qquad(q\to+i\infty)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

В асимптотическом представлении для $\delta_\pm$ сохранена лишь вещественная часть, поскольку мнимая нечетна и не дает вклада в интеграл ($S^F(\xi)$ — неотрицательная четная функция, $\operatorname{Arg} S^F=0$).

В длинноволновом приближении решетка эквивалентна классической модели упругой среды и асимптотика S^F при $q\to 0$ имеет вид (2.4), где $\alpha=\beta=1/2$. Отсюда и из (3.4) находим

$$
S_\pm{}^F=\sqrt{C}(0\mp iq)^{1/2}\chi^{\pm1}\quad(q\to 0)
$$

$$
S_+{}^F\to\chi^2\quad(q\to+i\infty),\quad C=\mathrm{const}
$$

$$
\chi=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\ln S^F(q)\,dq\right)
$$

Уравнение (3.2) теперь можно представить в виде (аналогичном (2.11) при $m=0$, но для периодического аналога δ-функции (3.4)):

$$
\frac{Q_+{}^F}{S_+{}^F}+S_-{}^FQ_-{}^F=D\left[\left(1+\operatorname{cth}\frac{0-iq}{2}\right)_+-\left(1-\operatorname{cth}\frac{0+iq}{2}\right)_-\right],\qquad D=\mathrm{const}
$$

Отсюда

$$
Q_+(0)=Q_+{}^F(+i\infty)=2\chi^2D,\qquad T_0=\frac{1}{2}EQ_+{}^2(0)=2E\chi^4D^2
$$

Длинноволновое приближение

$$
\sigma_+{}^F=EQ_+{}^F\sim2\sqrt{C}(0-iq)^{-1/2}\chi DE
$$

$$
u_-{}^F=\frac{1}{2}Q_+{}^F\sim\frac{1}{\sqrt{C}}(0+iq)^{-3/2}\chi D
$$

В соответствии с (1.6) $T=2\chi^2D^2E$ и, наконец

$$
k(0)=\frac{T_0}{T}=\chi^2=\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\ln S^F(q)\,dq\right)\qquad(\operatorname{Arg} S^F=0)
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Слепян Л. И.* Динамика трещины в решетке.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 3, с. 561–564.
2. *Слепян Л. И.* Распространение трещины при высокочастотных колебаниях решетки.— Докл. АН СССР, 1981, т. 260, № 3, с. 566–569.
3. *Слепян Л. И.* Антиплоская задача о трещине в решетке.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 5, с. 101–115.
4. *Кулахметова Ш. А., Сарайкин В. А., Слепян Л. И.* Плоская задача о трещине в решетке.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 3, с. 112–118.

5. *Слепян Л. И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 296 с.
6. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964. 268 с.
7. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
8. *Болотовский Б. М., Столяров С. Н.* О принципах излучения в среде с дисперсией.— В кн.: Проблемы теоретической физики. М.: Наука, 1972, с. 267—285.
9. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
10. *Слепян Л. И.* О связи между решениями смешанных динамических задач для сплошной упругой среды и решетки.— Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 3, с. 581—584.
11. *Слепян Л. И., Фишков А. Л.* К задаче о распространении разреза с межзвуковой скоростью.— Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 6, с. 1316—1319.

Ленинград

Поступила в редакцию
17.I.1983