

УДК 539.375

О ДВИЖЕНИИ ТРЕЩИНЫ С КОНЕЧНОЙ ЗОНОЙ ОТРЫВА
ПО ЛИНИИ СОЕДИНЕНИЯ ДВУХ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

СИМОНОВ И. В.

Изучается движение полубесконечного разреза по границе раздела двух упругих материалов при альтернативных условиях взаимодействия берегов (отрыв, контакт с проскальзыванием). Учет контакта берегов вблизи края разреза производится методом сращиваемых асимптотических разложений. Внешняя задача, в которой контакт берегов принимается во внимание только далеко от края, а решение содержит осциллирующую особенность, как и внутренняя, сводится к проблеме сопряжения вектор-функции, решаемой методом [1]. Таким же способом можно регуляризовать некоторые другие (пространственные) решения задач о трещине отрыва на границе раздела. Кроме того, в публикуемой работе устраняется аналогичная особенность в бесконечности [1, 2].

В общем случае контакта разнородных упругих тел осциллирующая особенность порождается разрывом условий сопряжения типа условия в напряжениях — сцепление (или условия в смещениях). Расщепление этой особенности на две монотонные особенности происходит, если ввести участок проскальзывания. Это показано сначала на примерах задач о действии штампа [3, 4]. Трещина на границе раздела с участками проскальзывания впервые рассмотрена в [5] (численное решение).

1. Полубесконечная трещина со скоростью c распространяется вдоль прямой линии соединения двух различных упругих полуплоскостей. Декартову систему координат $x=x_1, y=y_2$ свяжем с движущимся краем разреза (фиг. 1). Трещина ($x < 0, y = 0$) содержит два участка контакта с проскальзыванием ($-l < x < 0, -\infty < x < -L$) и участок отрыва ($L < -x < l$). При $x > 0, y = 0$ выполняются условия полного контакта. На бесконечности действует однородное сжимающее статическое напряжение $-\sigma_\infty$, а причиной, вызывающей развитие трещины, является сила Σ , приложенная симметрично по нормали к берегам разреза на единичном расстоянии от края разреза ($0 < l < 1 < L$). Требуется определить установившиеся поля динамических напряжений σ_{lm}^j и скоростей u_m^j ($j, k, m = 1, 2$; индекс j здесь и далее фиксирует среду) при сформулированных предположениях относительно геометрии трещины. Обоснование этих предположений будет заключаться в проверке дополнительных естественных условий.

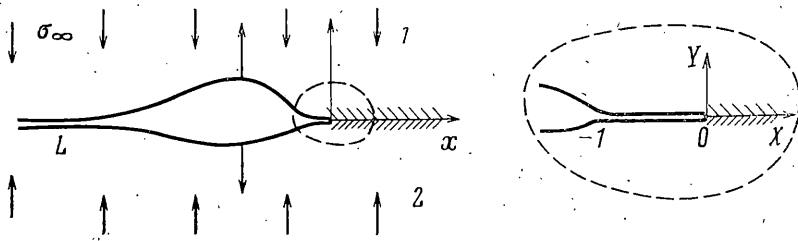
Граничные условия при $y = 0$ имеют вид (напряжения на бесконечности снимем):

$$[\sigma_{2m}] = [u_m] = 0 \quad (x > 0) \quad (1.1)$$

$$[\sigma_{22}] = [u_2] = 0, \quad \sigma_{12}^j = 0, \quad \sigma_{22}^j \leq \sigma_\infty \quad (x < -LU - l < x < 0) \quad (1.2)$$

$$\sigma_{22}^j = \sigma(x), \quad \sigma_{12}^j = 0, \quad f(x) = -\frac{1}{c} \int_{-L}^x [u_2] dx \geq 0 \quad (l < -x < L) \quad (1.3)$$

Здесь квадратные скобки означают скачок величины при переходе с верхнего берега на нижний: $[u_m] = u_m^1 - u_m^2, \dots$; $j, m = 1, 2$; $\sigma = \sigma_\infty - \Sigma \delta(x+1)$; $\delta(x)$ — функция Дирака; f — скачок вертикальных смещений берегов.



Фиг. 1

В установившейся задаче динамической теории упругости (плоская деформация, дозвуковой режим) искомые функции можно выразить через аналитические функции $\chi_m^j(z_{hj})$ комплексного переменного $z_{hj} = x + i\beta_{hj}y$ ($\beta_{hj} = \sqrt{1 - c^2/c_{hj}^2}$, c_{1j} и c_{2j} — скорости волн расширения и сдвига) [1] — представления, близкие к [3]. На границе раздела имеем:

$$\sigma_{12}^j = \text{Im } \chi_1^j, \quad u_1^j = c \text{ Re} \{ b_{2j} \chi_1^j + a_j \chi_2^j \} \quad (1.4)$$

$$\sigma_{22}^j = \text{Re } \chi_2^j, \quad u_2^j = -c \text{ Im} \{ a_j \chi_1^j + b_{1j} \chi_2^j \}$$

$$2\mu_j R_j(a_j, b_{mj}) = (\beta_{1j} \beta_{2j} - \beta_j, \beta_{mj} (1 - \beta_j)), \quad 2\beta_j = 1 + \beta_{2j}^2$$

где μ_j — модули сдвига, $R_j = \beta_{1j} \beta_{2j} - \beta_j^2$ — функции Релея.

Условия непрерывности компонент напряжений σ_{m2}^j на всей вещественной оси, вытекающие из (1.1) — (1.3), сокращают число неизвестных комплексных функций до двух: $\chi_1^1(z) = -\chi_1^2(\bar{z}) \equiv \chi_1(z)$, $\chi_2^1(z) = \chi_2^2(\bar{z}) \equiv \chi_2(z)$, $\text{Im } z > 0$ ($z = x + iy$ — вспомогательная переменная), а выражения для скачков скоростей принимают вид

$$[u_1] = c \text{ Re} \{ q \chi_1 + d \chi_2 \}, \quad [u_2] = -c \text{ Im} \{ d \chi_1 + p \chi_2 \} \quad (1.5)$$

$$d = a_1 - a_2, \quad p = b_{11} + b_{12}, \quad q = b_{21} + b_{22}$$

Оставшиеся условия (1.1) — (1.3) составят краевые условия обобщенной задачи Римана — Гильберта [6] ($y=0$):

$$\text{Im } \chi_1 = 0, \quad \text{Re } \chi_2 = \sigma(x) \quad (l < -x < L) \quad (1.6)$$

$$\text{Im } \chi_1 = \text{Im } \chi_2 = 0 \quad (x < -L \cup -l < x < 0)$$

$$\text{Re} \{ q \chi_1 + d \chi_2 \} = 0, \quad \text{Im} \{ d \chi_1 + p \chi_2 \} = 0 \quad (x > 0)$$

Решение ищем в энергетическом классе функций с конечными всюду смещениями. Отсюда вытекают оценки ($z_1 = -L$, $z_2 = -l$, $z_3 = 0$, $\varepsilon > 0$):

$$|\chi_m| < \frac{\text{const}}{|z - z_h|^{1/2}} \quad (z \rightarrow z_h), \quad |\chi_m| < \frac{\text{const}}{|z|^{1+\varepsilon}} \quad (z \rightarrow \infty) \quad (m=1,2; h=1,2,3) \quad (1.7)$$

В (1.6), (1.7) функции $\chi_1(z)$ и $\chi_2(z)$ связаны и имеют четыре особые точки на вещественной оси (исключая особенности от нагрузки), причем положение двух особых точек z_1 и z_2 заранее неизвестно. К такому же типу относятся задачи [3—5] и некоторые задачи теории фильтрации [7]. В [1] рассмотрена задача о движущемся разрезе с одной зоной контакта, для которой найдено решение в интегралах типа Коши. Метод [1] не распространяется на рассматриваемый случай. Тем не менее попытаемся воспользоваться результатами [1] в предположении малости параметра l . Тогда приближенное решение можно получить методом сращиваемых асимптотических разложений. А именно, внешнее разложение получим пренебрегая малой зоной контакта вблизи края разреза, т. е. считая, что отрыв происходит в точке $z=0$ ($-L < x < 0$ — область отрыва). Внутреннее разложение (вернее, его главную часть) определим решая задачу в

растянутой до бесконечности окрестности интервала $-l < x < 0$ (фиг. 1) с соответствующими условиями срачивания на бесконечности. Таким образом, исходная задача будет сведена к двум более простым задачам, алгоритм решения которых известен [1]. На возможность срачивания указывает существование промежуточной асимптотики точного решения [1], совпадающей с асимптотикой решения задачи без учета зоны проскальзывания [2].

2. Приступим к решению внешней задачи, полагая в (1.6) $l=0$. Рассмотрим конформное преобразование $z=4L\omega e^{2\pi i}/(1-\omega)^2$, переводящее верхнюю полуплоскость ω на плоскость z ($0 \leq \arg z \leq 2\pi$) с разрезом $-L < x < \infty, y=0$ (лучу $x < -L, y=0$ соответствует единичная полуокружность $\omega=e^{i\theta}$). Аналогично [1] введём вспомогательную вектор-функцию $w=(w_1, w_2)$, для которой точки $\omega=\pm 1$ являются обыкновенными ($b=(p/q)^{1/2}$):

$$w = -\frac{z^{1/2}(\omega+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & -b \\ 1 & b \end{vmatrix} \chi, \quad \chi = \frac{-1}{(\omega+1)z^{1/2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^{-1} & -b^{-1} \end{vmatrix} w$$

$$\chi(z) = \overline{\chi(\bar{z})}, \quad \text{Im } z < 0$$

Задача для w расщепляется, и ее единственное решение (при замороженном L) с нужным поведением в особых точках 0 и ∞ имеет вид

$$w_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\omega}{\xi}\right)^{\rho_k+1} \frac{w_k^\circ(\xi) d\xi}{\xi-\omega}, \quad w_k^\circ = (-1)^k \frac{b(\xi+1)\sigma}{2|x|^{1/2}}$$

$$\rho_k = (-1)^k i\alpha, \quad \alpha = \frac{\ln \lambda}{2\pi}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{pq-d}}{\sqrt{pq+d}} > 1$$

Считаем для определенности, что $d < 0$. Если $d > 0$, то следует поменять местами среду 1 и 2. Случай $d=0$ будет рассмотрен отдельно. Вклад от сосредоточенной нагрузки (индекс единица сверху) просто получить в конечном виде, интегралы от распределенной нагрузки берутся при помощи теории вычетов (результат обозначим через $\chi^{(2)}$):

$$\chi^{(1)} = \frac{2iL\Sigma\xi_0}{\pi(\omega-\xi_0)(\xi_0-\omega^{-1})z^{1/2}} \begin{vmatrix} b(h_+ \sin \zeta_0 + ih_-g) \\ h_- \sin \zeta_0 + ih_+g \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

$$\chi^{(2)} = \frac{8L^{1/2}\sigma_\infty\omega}{(\lambda+1)z^{1/2}(\omega+1)} \begin{vmatrix} b(\lambda H_+\omega^{i\alpha} - H_-\omega^{-i\alpha}) \\ \lambda H_+\omega^{i\alpha} + H_-\omega^{-i\alpha} \end{vmatrix}$$

$$H_\pm = \frac{(1+\omega)\sqrt{\omega}}{(1-\omega)^3\omega^{\pm i\alpha}} - \frac{2}{(1-\omega)^3} + \frac{2(1\mp i\alpha)}{(1-\omega)^2} - \frac{(1/2\mp i\alpha)^2}{1-\omega}$$

$$h_\pm = \lambda^{1/2}\omega^{i\alpha} \pm \lambda^{-1/2}\omega^{-i\alpha}, \quad \xi_0 = \omega(L) = -(\sqrt{L} + \sqrt{L-1})^2$$

$$g = \frac{(\omega-1)(\xi_0+1)}{(\omega+1)(\xi_0-1)} \cos \zeta_0, \quad \zeta_0 = \alpha \ln |\xi_0|$$

Под $\omega^{\pm i\alpha}$ понимаем функцию $\exp\{\pm i\alpha \ln |\omega| \mp \alpha \arg \omega\}$ ($0 \leq \arg \omega \leq \pi$); $\sqrt{z^+} = -\sqrt{z^-}$ ($x > 0$), $\sqrt{z^+} = \sqrt{z^-}$ ($x < 0$) (индексом плюс или минус отмечены предельные значения функций сверху или снизу вещественной оси). Уравнение для L получим приравняв вычет функций w_k в точке $\omega=-1$ нулю ($\omega=-1 \Rightarrow z=-L$). Иначе особенность решения (2.1) в точке отрыва ($\chi_m \sim (z+L)^{-1/2}$, $z \rightarrow -L$) противоречит дополнительным условиям

(4.2) и (4.3) [1]:

$$\begin{aligned} \cos[2\alpha \ln(\sqrt{L} + \sqrt{L-1})] &= AL\sqrt{L-1} \\ A &= \pi(1+4\alpha^2)\sigma_\infty / ((\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2})\Sigma) > 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Это трансцендентное уравнение имеет один корень $L > 1$, удовлетворяющий условию $0 \leq \xi_0 \leq \pi/2$. Другие решения следует отбросить, поскольку они противоречат дополнительному условию непроникания (4.3): функция $f(x)$ меняет знак на участке $-L < x < -1$. Тем самым исчерпан вопрос единственности решения.

При $\sigma_\infty = 0$ уравнение (2.2) допускает решение в явном виде $L = \text{ch}^2(1/4\pi/\alpha) \approx 1/4 \exp(1/2\pi/\alpha)$. При этом $\chi^{(2)} = 0$, а вектор $\chi^{(1)}$ определен формулой (2.1), где следует учесть, что $g = 0$. Выражение для компоненты напряжения $\sigma_{22}^j(x, 0)$ в зоне контакта $x < -L$ приведет к виду

$$\sigma_{22}^j(x, 0) = \frac{4L\Sigma\xi_0 \text{sh}(\alpha\pi - \alpha\theta)}{\pi(\xi_0^2 - 2\xi_0 \cos\theta + 1)|x|^{1/2}}, \quad \cos\theta = \frac{2L}{x} + 1$$

Из этой формулы следует, что $\sigma_{22} < 0$ (т. е. сжимающее) на всем луче $-\infty < x < -L$. Приведем также формулу для раскрытия берегов, исходя из (1.3), (1.5), (2.1):

$$f = \frac{4L\Sigma p\xi_0}{\pi} \int_{-L}^x \frac{\sin(\alpha \ln|\xi|) dx}{(\xi_0 - \xi)(\xi_0 - \xi^{-1})|x|^{1/2}} > 0, \quad \xi = \frac{(\sqrt{L+x} + \sqrt{L})^2}{x} \quad (-L < x < -1)$$

Для срачивания понадобятся следующие асимптотики:

$$w \sim \frac{Lb}{\sqrt{\lambda}} \left\| \frac{B_1 \omega^{-i\alpha}}{-\lambda \bar{B}_1 \omega^{i\alpha}} \right\| \quad (\omega \rightarrow \infty), \quad w \sim \frac{Lb\omega}{\sqrt{\lambda}} \left\| \frac{-\bar{B}_1 \omega^{-i\alpha}}{\lambda B_1 \omega^{i\alpha}} \right\| \quad (\omega \rightarrow 0) \quad (2.3)$$

$$\chi^\circ = \frac{L}{\sqrt{\lambda z}} \left\| \frac{b(A_1 h_-^\circ - iA_2 h_+^\circ)}{A_1 h_+^\circ - iA_2 h_-^\circ} \right\|$$

$$\chi = \chi^\circ(z) + O(1) \quad (z \rightarrow 0), \quad h_\pm^\circ = [z/(4L)]^{-i\alpha} \pm [z/(4L)]^{i\alpha}$$

$$B_1 = A_1 + iA_2 = \sigma_\infty L^{1/2} \text{ch}^{-1}(\pi\alpha) [2 - L(4\alpha^2 + 1) + 4i\alpha] - 2\pi^{-1} i \Sigma \sin \xi_0$$

3. Введем в рассмотрение внутренние координаты $Z = X + iY$, $Z = z/l$ ($Z_{mk} = z_{mk}/l$). Граничные условия и условия в конечных особых точках $Z_1 = -1$, $Z_2 = 0$ для внутреннего разложения запишутся в виде (обозначения искомых функций не меняются):

$$\text{Im } \chi_1 = 0, \quad \text{Re } \chi_2 = \sigma_\infty, \quad f(X) \geq 0 \quad (X < -1) \quad (3.1)$$

$$\text{Im } \chi_k = 0, \quad \text{Re } \chi_2 \leq \sigma_\infty \quad (-1 < X < 0)$$

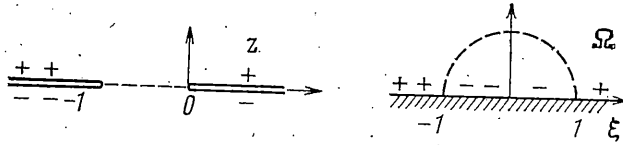
$$\text{Re}\{q\chi_1 + d\chi_2\} = \text{Im}\{d\chi_1 + p\chi_2\} = 0 \quad (X > 0)$$

$$|\chi_k| < \text{const} |Z - Z_m|^{-1/2}, \quad Z \rightarrow Z_m \quad (k, m = 1, 2)$$

На бесконечности поведение $\chi(Z)$ диктуется условием срачивания

$$\chi \sim \chi^\circ(lZ) \quad (Z \rightarrow \infty) \quad (3.2)$$

где вектор $\chi^\circ(z)$ определен в (2.3) из решения внешней задачи. Для решения задачи (3.1), (3.2) продолжим вектор $\chi(Z)$ аналитически через отрезок $(-1 < X < 0, Y = 0)$ и переведем конформным преобразованием $\Omega = 2Z + 1 + 2\sqrt{Z(Z+1)}$ плоскость Z с разрезами на вещественной оси $X \leq -L$



Фиг. 2

и $X \geq 0$ в верхнюю полуплоскость Ω (фиг. 2). Введем вспомогательную функцию

$$W = \frac{\sqrt{Z}(\Omega+1)}{2} \begin{vmatrix} \chi_1 - b\chi_2 \\ \chi_1 + b\chi_2 \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

Задача линейного сопряжения для кусочно-голоморфной вектор-функции W в Ω -плоскости примет вид $(W(\Omega) = -W(\bar{\Omega}), \text{Im } \Omega < 0)$:

$$W^+ = \Lambda W^- (\xi > 0), \quad W^+ = W^- + 2iW^0 (\xi < 0) \quad (3.4)$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}, \quad W^0 = \frac{b\sigma_\infty(1-\xi^2)}{4\sqrt{|\xi|}} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Следует переформулировать условие срачивания (3.2). Полуплоскость $\text{Im } Z > 0$ переходит во внешность (полуплоскость $\text{Im } Z < 0$ — во внутренность) единичной полуокружности на верхней полуплоскости Ω . При этом областям перекрытия $l \ll |z| \ll 1$, $1 \ll |Z| \ll l^{-1}$ в верхней и нижней полуплоскостях z , Z соответствуют зоны $4 \ll |\Omega| \ll 4l^{-1}l \ll 4|\Omega| \ll 1$ и $l \ll 4L|\omega| \ll 104L \ll |\omega| \ll 4Ll^{-1}$ в Ω - и ω -полуплоскостях, где связь переменных Ω и ω такова: $l\Omega \sim 16L\omega$ ($\Omega \rightarrow \infty, \omega \rightarrow 0$), $16L\Omega \sim l\omega$ ($\Omega \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty$). С учетом этих соотношений из (3.2), (3.3) получим

$$W_k \sim C_k \Omega^{2k+1} (\Omega \rightarrow \infty), \quad W_k \sim -\bar{C}_k \Omega^{2k} (\Omega \rightarrow 0) \quad (3.5)$$

$$4\sqrt{\lambda}l(C_1, C_2) = (\bar{B}, -\lambda B), \quad B = B_1(16L/l)^{-i\alpha}$$

Единственное решение расщепленной задачи (3.5), (3.6) (l фиксировано) с двумя особыми точками $\Omega=0, \infty$ состоит из суммы неоднородного и однородного решений

$$W_k = \frac{f_k(\Omega)}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{W_k^0(\xi) d\xi}{f_k(\xi)(\xi-\Omega)} + \Omega^{2k}(C_k \Omega - \bar{C}_k) \quad (3.6)$$

Первое из них (интеграл) удовлетворяет неоднородным условиям (3.4), но имеет более слабое асимптотическое поведение, чем этого требуют оценки (3.5). Второе дает правильную асимптотику при $\Omega \rightarrow 0, \infty$ и подчиняется однородным условиям сопряжения (3.4). В качестве вспомогательных функций, при помощи которых ликвидируется разрыв в коэффициентах при решении задачи (3.4), а неоднородность переводится в гёльдеровский класс [6], выбираются функции $f_k = \Omega^{2k}(1-\Omega)^2$.

Интегралы в (3.6) разбиваются каждый на два интеграла, один из которых имеет сингулярную плотность и известен [6], а другой можно вычислить методами теории вычетов. В результате получим (одним или двумя штрихами отметим неоднородное и однородное решения):

$$\chi_k' = \frac{b^{2-k}\sigma_\infty}{1+\lambda} \left\{ \lambda + (-1)^k - 2 \frac{(-1)^k \Omega^{-i\alpha} + \lambda \Omega^{i\alpha}}{\Omega^{1/2} + \Omega^{-1/2}} \right\} \quad (0 \leq \arg \Omega \leq \pi) \quad (3.7)$$

$$\chi_k'' = \frac{b^{2-k}[\lambda E_1 \Omega^{i\alpha} + (-1)^k E_2 \Omega^{-i\alpha}]}{4\sqrt{\lambda}LZ(\Omega+1)}, \quad \left\| \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \bar{B}-B\Omega \\ \bar{B}\Omega-B \end{matrix} \right\| \quad (k=1,2)$$

Аналогично [1] и задаче, рассмотренной в п. 2, уравнение для определения l получим приравняв нулю коэффициент при особенности решения (3.7) в точке смыкания берегов $Z=-1$:

$$d_1 \cos \zeta + d_2 \sin \zeta = 2a\sqrt{l/L} \quad (3.8)$$

$$d_1 = a[L(1+4\alpha^2)-2], \quad d_2 = 4\alpha a - \sin \zeta_0$$

$$\zeta = \alpha \ln [l/(16L)], \quad a = \pi \sigma_\infty L^{1/2} / (2\Sigma \operatorname{ch}(\pi\alpha))$$

При выводе (3.8) использовано уравнение (2.2). Единственный корень уравнения (3.8) выбирается исходя из неравенств $l > 0$, $L > 1$ и дополнительного условия (3.1), как и в п. 2. Он удовлетворяет требованию $-\pi \leq \zeta < 0$. Анализ уравнения (3.8) показывает, что в случае $a \ll 1$ ($\sigma_\infty \ll \Sigma$) свободным членом можно пренебречь. Тогда его решение запишется в форме

$$l \approx 16L e^{\zeta_*/\alpha}, \quad \zeta_* = \arctg(-d_1/d_2) - \pi \quad (\pi/2 < -\zeta_* < \pi) \quad (3.9)$$

где величина $d_1/d_2 < 0$ (при $a \ll 1$ имеем $L \gg 1$, $\sin \zeta \sim 1$). С той же точностью получим $B \approx iM$, где $M = 2\pi^{-1}\Sigma\sqrt{d_1^2+d_2^2} \approx 2\pi^{-1}\Sigma \sin \zeta_0$, а результат для χ'' упрощается

$$\chi'' = -\frac{iM}{4\sqrt{\lambda}Lz} \left\| \begin{matrix} b(\lambda\Omega^{i\alpha} + \Omega^{-i\alpha}) \\ \lambda\Omega^{i\alpha} - \Omega^{-i\alpha} \end{matrix} \right\| \quad (3.10)$$

При $a \ll 1$ из (2.2) следует $L \approx 1/4 e^{\zeta_*/\alpha}$, где $0 < \zeta_0 < \pi/2$ (оценка). Из (3.9) получим $l \approx 4 \exp[(\zeta_* + \zeta_0)/\alpha]$. Величина l может быть достаточно малой ($l \leq 5 \cdot 10^{-4}$ при $c \rightarrow 0$). Неравенство $l \ll 1$ служит ограничением сверху на величины рассматриваемых скоростей, поскольку при $c \rightarrow c_R$, где c_R — минимальная из релейевских скоростей, $\lambda \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow \infty$. Однако верхняя грань допустимых скоростей близка к c_R из-за логарифмической зависимости α от λ .

Итак, приближенное решение исходной задачи при $|z| \gg l$ представлено формулами (2.1), а в зоне $|z| \ll 1$ — (3.7), (3.10) с областью перекрытия $l \ll |z| \ll 1$. Невязка составляет величину $O(z^{1/2})$ в этой области, относительная погрешность $O(z)$ (на самом деле совпадают два первых члена разложений: $O(z^{-1/2})$ и $O(1)$). Решения (2.1) и (3.7) удовлетворяют всем граничным и дополнительным условиям в своих областях определения. Кроме того, энергия без потерь передается из внешней во внутреннюю область, так как поток энергии полностью определяется той частью решения, по которой происходит срачивание.

4. На продолжении разреза и в зоне контакта асимптотическое поведение напряжений таково ($a \ll 1$):

$$\sigma_{12} \sim K_2 (2\pi x)^{-1/2}, \quad \sigma_{22} \sim \alpha M l^{-1/2} (\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}) \quad (0 < x \leq l)$$

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} \sim K_1 (2\pi|x|)^{-1/2} \quad (x < 0, |x| \leq l)$$

$$\sigma_{22} = O((x+l)^{1/2}) \quad (x \rightarrow -l+0), \quad K_1 = \frac{dM}{d+\sqrt{pq}} \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} = -\frac{d}{p} K_2 < 0$$

Формулы (и анализ) углового распределения напряжений и скоростей вблизи края разреза ($|z| \ll l$) можно найти в [8]. При $\sigma_\infty = 0$ имеем $\chi' = 0$, $M = 2\pi^{-1}\Sigma$ и коэффициенты K_m совпадают с коэффициентами интенсивности из решения задачи о трещине с полубесконечной зоной отрыва [1].

При $c \rightarrow 0$, полагая в (2.1), (3.7), (3.10) $p = q = p(0) = q(0)$, получим решение соответствующей статистической задачи. В случае одинаковых

материалов ($\mu_1 = \mu_2$, $c_{m1} = c_{m2}$), а также, когда материалы различны, но $c = c_d$, где c_d — корень уравнения $d(c) = 0$ [1], имеем $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, $l = 0$, а область определения внутреннего разложения во внешних координатах исчезает. Остается решение внешней задачи (внешний предел), в котором осциллирующая особенность сменяется на монотонную $\chi_1^{(1)} = \chi_1^{(2)} = 0$:

$$\chi_2^{(1)} = \frac{4\Sigma L \xi_0 (\omega - 1) \sqrt{1 - L^{-1}}}{\pi z^{1/2} (\xi_0 - \omega) (\xi_2 - \omega^{-1}) (\omega + 1)}, \quad \chi_2^{(2)} = \frac{2L^{1/2} \sigma_\infty \omega (1 - \omega^{1/2})^4}{z^{1/2} (\omega - 1)^3 (\omega + 1)} \quad (4.1)$$

$$L \sqrt{1 - L^{-1}} = \frac{2\Sigma}{\pi \sigma_\infty}, \quad \chi_2 = \chi_2^{(1)} + \chi_2^{(2)} \sim \left(\pi^{-1} \sqrt{1 - L^{-1}} \Sigma - \frac{1}{2} L \sigma_\infty \right) (Lz)^{-1/2}$$

$$(z \rightarrow 0, 4\omega L \sim z)$$

Уравнение для определения L , выписанное выше, имеет один действительный корень $L > 1$ ($L \rightarrow \infty$ при $\sigma_\infty \rightarrow +0$). Если $\sigma_\infty < 0$, т. е. напряжения в среде растягивающие, то действительных корней нет. При $\sigma_\infty \rightarrow +0$ существует предел решения (4.1). Он совпадает с известным решением для полубесконечной трещины отрыва, движущейся под действием сосредоточенной силы [9]. Фиксируя s и параметры среды 1 и устремляя среду 2 к жесткой ($\mu_2, c_{12}, c_{22} \rightarrow \infty$), обнаружим, что величины L и l растут, достигая максимума.

ЛИТЕРАТУРА

1. Симонов И. В. Об установившемся движении трещины с участками проскальзывания и отрыва по границе раздела двух упругих материалов. — ПММ, 1984, т. 48, вып. 3, с. 482—489.
2. Гольдштейн Р. В. О стационарном движении трещины по прямолинейной границе соединения двух упругих материалов. — Инж. ж. МГТ, 1966, № 5, с. 93—102.
3. Галин Л. А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. — ПММ, 1945, т. 9, № 5, с. 413—424.
4. Фалькович С. В. О давлении жесткого штампа на упругую полуплоскость при наличии участков сцепления и скольжения. — ПММ, 1945, т. 9, № 5, с. 425—432.
5. Cottrill M. The interface crack. — Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1977, v. 44, No. 4, p. 631—636.
6. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
7. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
8. Симонов И. В. О дозвуковом движении края сдвиговой подвижки с трением вдоль границы раздела двух упругих материалов. — ПММ, 1983, т. 47, вып. 3, с. 497—506.
9. Griggs J. W. On the propagation of a crack in an elastic-brittle material. — J. Mech. and Phys. Solids, 1960, v. 8, No. 1, p. 66—75.

Москва

Поступила в редакцию
1. III. 1984