МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1984

УДК 531.383

# ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГИРОСИЛОВОЙ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ

ХОРОШИЛОВ В. С.

Рассматривается управление ориентацией тела при помощи силовых гироскопов. Изучается система из четырех двухстепенных гироскопов, оси подвеса которых совпадают с направлениями из центра правильного четырехгранника к его вершинам. Одновременно работают любые три гироскопа, а четвертый находится в холодном резерве на случай выхода из строя одного из работающих. Приводятся уравнения движения тела, решения этих уравнений, алгоритм управления гироскопами. Исследуется устойчивость вынужденных колебаний тела в условиях резонансов.

1. В системах управления ориентацией тел все большее применение в качестве исполнительных органов находят силовые гироскопы, в частности двухстепенные силовые гироскопы — гиродины [1].

В работе [2] рассмотрены пространственные группы двухстепенных гиросиловых стабилизаторов. Причем отмечаются варианты групп, у которых оси подвеса гироскопов размещаются параллельно направлениям, исходящим из общей точки $O$, равномерно распределенным в полном телесном угле $4\pi$, имеющем вершину в точке $O$. Указывается, что основой для отыскания таких направлений могут служить правильные многогранники, в частности тетраэдр.

В публикуемой работе рассматривается избыточная гиросиловая система управления ориентацией тела, состоящая из четырех силовых гироскопов в однорамочных подвесах. Оси вращения рамок гироскопов направлены из центра воображаемого тетраэдра, совпадающего с центром масс тела, на его вершины. Одновременно работают любые три гироскопа, а оставшийся четвертый является резервным на случай выхода из строя любого из работающих гироскопов.

Управление телом осуществляется изменением суммарного кинетического момента гироскопов. Рамки гироскопов приводятся во вращение специальными двигателями, которые создают моменты согласно логике управления.

Рассмотрим движение относительно центра масс твердого тела, несущего установленные описанным способом двухстепенные гироскопы. Воспользуемся теоремой об изменении главного момента количества движения системы [3]. Будем пренебрегать слагаемыми, содержащими компоненты тензора инерции рамок гироскопов. В качестве резервного примем гироскоп с номером $i=4$. Положим, что углы и угловые скорости отклонения рамок гироскопов малые. Тогда уравнения движения тела можно представить в форме

$$I_x p^{\bullet} + (I_z - I_y) qr + \sum_{i=1}^{3} H_i (\nu_i^{\bullet} \cos\lambda_i \sin\delta_i \cos\nu_i - r\cos\lambda_i \cos\nu_i) = M_x$$

$$I_y q^{\bullet} + (I_x - I_z) pr + \sum_{i=1}^{3} H_i (\nu_i^{\bullet} \sin\lambda_i \sin\delta_i \cos\nu_i + r\sin\lambda_i \cos\nu_i) = M_y$$

$$I_z r^{\cdot}+(I_y-I_x)pq+\sum_{i=1}^{3}H_i(\nu_i^{\cdot}\cos\delta_i\cos\nu_i+p\cos\lambda_i\cos\nu_i)=M_z \tag{1.1}$$

Здесь $I_x$, $I_y$, $I_z$ — диагональные компоненты тензора инерции тела в связанной с ним системе координат $Oxyz$, оси которой предполагаются главными и центральными, $p$, $q$, $r$ — проекции вектора угловой скорости тела на оси системы координат $Oxyz$, $H_i$ ($i=1, 2, 3$) — вектор кинетического момента $i$-го гироскопа, $\nu_i$ — угол, характеризующий положение рамки гироскопа, $\lambda_i$, $\delta_i$ — углы, определяющие положение неподвижной системы координат, связанной с $i$-м гироскопом, относительно системы $Oxyz$, $M_x$, $M_y$, $M_z$ — составляющие главного вектора момента внешних сил, действующих на тело.

Положение системы координат $Oxyz$ относительно инерциальной системы $O\xi\eta\zeta$ определим с помощью трех независимых углов $\psi$, $\theta$, $\varphi$: $\psi$ — угол между проекцией оси $Oz$ на плоскость $O\eta\zeta$ и осью $O\zeta$, $\theta$ — угол, образуемый осью $Oz$ с плоскостью $O\eta\zeta$, $\varphi$ — угол между осью $Ox$ и плоскостью $Oz\xi$.

Рассмотрим управляемое программное движение тела. Одним из основных видов такого движения является режим сканирования отдельных участков, например звездного неба или планет. Для обеспечения требуемого программного движения тела рамки гироскопов должны совершать также вполне определенные движения. Примем, что в вычислительном устройстве системы управления суммируются величины углов и угловых скоростей с определенными коэффициентами усиления, а также периодические составляющие, так что вращения рамок гироскопов происходят по следующим законам:

$$H_i\nu_i^{\cdot}=k_i\varphi+K_i\varphi^{\cdot}+k_i'\theta+K_i'\theta^{\cdot}+k_i''\psi+K_i''\psi^{\cdot}+A_i\sin\Omega_i t \qquad (i=1,2,3)$$

Будем считать, что действующие на твердое тело возмущающие моменты пренебрежимо малы.

Поскольку полагается, что управление производится вблизи положения равновесия твердого тела, заменим тригонометрические функции углов $\psi$, $\theta$, $\varphi$, $\nu_i$ первыми членами их разложений в степенные ряды и в уравнениях (1.1) удержим лишь члены первой и второй степени относительно координат и их производных.

Рассмотрим такие движения системы, для которых члены, содержащие множителями $K_i$, $K_i'$, $K_i''$, $A_i$, малы по сравнению с основными линейными членами.

Путем введения малого положительного параметра $\mu$ аналогично тому, как это сделано в работе [4], выделим все малые члены в каждом из уравнений (1.1) в общую группу. Тогда для изучения колебательных явлений, порождаемых нелинейными связями между координатами системы, дифференциальные уравнения, описывающие пространственное движение системы, можно представить в виде

$$\begin{gathered}
I_x\psi^{\cdot\cdot}+a\varphi+b\theta+c\psi-d\varphi^{\cdot}=\sum_{i=1}^{3}a_i\sin\Omega_i t+\mu V_1\\
I_y\theta^{\cdot\cdot}+a'\varphi+b'\theta+c'\psi-d'\varphi^{\cdot}=\sum_{i=1}^{3}a_i'\sin\Omega_i t+\mu V_2\\
I_z\varphi^{\cdot\cdot}+a''\varphi+b''\theta+c''\psi+d'\theta^{\cdot}+d\psi^{\cdot}=\sum_{i=1}^{3}a_i''\sin\theta_i t+\mu V_3
\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$a=\sum_{i=1}^{3}k_i\cos\lambda_i\sin\delta_i,\quad a'=\sum_{i=1}^{3}k_i\sin\lambda_i\sin\delta_i,\quad b=\sum_{i=1}^{3}k_i'\cos\lambda_i\sin\delta_i,$$

$$b'=\sum_{i=1}^{3}k_i'\sin\lambda_i\sin\delta_i$$

$$c=\sum_{i=1}^{3}k_i''\cos\lambda_i\sin\delta_i,\quad c'=\sum_{i=1}^{3}k_i''\sin\lambda_i\sin\delta_i,\quad d=\sum_{i=1}^{3}H_i\cos\lambda_i,$$

$$d'=\sum_{i=1}^{3}H_i\sin\lambda_i$$

$$a''=\sum_{i=1}^{3}k_i\cos\delta_i,\quad a_i=-A_i\cos\lambda_i\sin\delta_i,\quad b''=\sum_{i=1}^{3}k_i'\cos\delta_i,\quad a_i'=-A_i\sin\lambda_i\sin\delta_i$$

$$c''=\sum_{i=1}^{3}k_i''\cos\delta_i,\quad a_i''=-A_i\cos\delta_i$$

$$V_1=-\left(\sum_{i=1}^{3}K_i\cos\lambda_i\sin\delta_i\right)\varphi^{\cdot}-\left(\sum_{i=1}^{3}K_i'\cos\lambda_i\sin\delta_i\right)\theta^{\cdot}-$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{3}K_i''\cos\lambda_i\sin\delta_i\right)\psi^{\cdot}-I_x\theta^{\cdot\cdot}\varphi-I_x\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}-(I_z-I_y)\theta^{\cdot}\varphi^{\cdot}-d\psi^{\cdot}\theta$$

$$V_2=N_1\varphi^{\cdot}+N_2\theta^{\cdot}-\left(\sum_{i=1}^{3}K_i''\sin\lambda_i\sin\delta_i\right)\psi^{\cdot}+I_y\psi^{\cdot\cdot}\varphi+I_y\psi^{\cdot}\varphi^{\cdot}-(I_x-I_z)\psi^{\cdot}\varphi^{\cdot}-d'\psi^{\cdot}\theta$$

$$V_3=N_0\varphi^{\cdot}+N^0\theta^{\cdot}-\left(\sum_{i=1}^{3}K_i''\cos\delta_i\right)\psi^{\cdot}+I_z\psi^{\cdot\cdot}\theta+I_z\psi^{\cdot}\theta^{\cdot}-(I_y-I_x)\psi^{\cdot}\theta^{\cdot}+d'\psi^{\cdot}\varphi-d\theta^{\cdot}\varphi$$

$$N_0=-\sum_{i=1}^{3}K_i\cos\delta_i,\quad N^0=-\sum_{i=1}^{3}K_i'\cos\delta_i\quad N_1=-\sum_{i=1}^{3}K_i\sin\lambda_i\sin\delta_i,$$

$$N_2=-\sum_{i=1}^{3}K_i'\sin\lambda_i\sin\delta_i$$

Полученные уравнения квазилинейного типа удобны для исследования нелинейных колебательных процессов.

Рассмотрим имеющий место в практике машиностроения двухканальный вариант системы управления ориентацией тела. Введем новые переменные (нормальные координаты) следующим образом: $\theta=y_1+y_2$, $\theta^{\cdot}=y_1^{\cdot}+y_2^{\cdot}$, $\varphi=\beta_1y_1+\beta_2y_2$, $\varphi^{\cdot}=\beta_1y_1^{\cdot}+\beta_2y_2^{\cdot}$, где $\beta_1$, $\beta_2$ — корни квадратного уравнения

$$\beta^2+\frac{I_zb'-I_ya''}{I_za'}\beta-\frac{I_y}{I_z}=0$$

Тогда уравнения (1.2) примут вид

$$\begin{gathered}y_2^{\cdot\cdot}+\omega_1^2y_2-\xi_1y_1^{\cdot}=-\mu f_1+a_0\sin\Omega_2t+a^1\sin\Omega_3t\\ y_1^{\cdot\cdot}+\omega_2^2y_1+\xi_2y_2^{\cdot}=-\mu f_2+b_0'\sin\Omega_2t+b_0''\sin\Omega_3t\end{gathered}\qquad(1.3)$$

$$\omega_1^2=d_2/e_2,\quad \omega_2^2=d_1/e_1,\quad \xi_1=f_{12}/e_2,\quad \xi_2=f_{12}/e_1$$

$$-f_1=Q\dot{y}_1{}^{\bullet}+Q_1y_2{}^{\bullet}+Q_2(y_1{}^{\bullet}+y_2{}^{\bullet})(\beta_1y_1+\beta_2y_2)\quad -f_2=Q'y_1{}^{\bullet}+Q''y_2{}^{\bullet}$$

$$\mu Q'=R'/e_1,\quad \mu Q''=R''/e_1,\quad \mu Q=R/e_2\quad \mu Q_1=R_1/e_2,\quad \mu Q_2=-d/e_2,\quad a_0=a_2''/e_2$$

$$a^1=a_3''/e_2,\quad b_0'=a_2'/e_1,\quad b_0''=a_3'/e_1$$

$$e_1=I_y+I_z\beta_1^2,\quad d_1=b'+a''\beta_1^2+2a'\beta_1$$

$$e_2=I_y+I_z\beta_2^2,\quad d_2=b'+a''\beta_2^2+2a'\beta_2$$

$$f_{12}=-d'(\beta_2-\beta_1),\quad R=N^0+\beta_1N_0,\quad R_1=N^0+\beta_2N_0$$

$$R'=N_2+\beta_1N_1,\quad R''=N_2+\beta_2N_1$$

2. Общее решение системы (1.3) при $\mu=0$, описывающее режим программного движения, может быть представлено в форме ($E_i$, $f_i^0$ — произвольные постоянные, $i=1, 2$):

$$y_2=E_1\sin\vartheta_1+E_2\sin\vartheta_2+D_1\sin\Omega_2t+D_2\cos\Omega_2t+D_3\sin\Omega_3t+D_4\cos\Omega_3t$$

$$y_2{}^{\bullet}=E_1\omega_{01}\cos\vartheta_1+E_2\omega_{02}\cos\vartheta_2+D_1\Omega_2\cos\Omega_2t-$$
$$-D_2\Omega_2\sin\Omega_2t+D_3\Omega_3\cos\Omega_3t-D_4\Omega_3\sin\Omega_3t$$

$$y_1=E_1\alpha_1\cos\vartheta_1+E_2\alpha_2\cos\vartheta_2+D_1h_2\cos\Omega_2t+$$
$$+D_2h_1\sin\Omega_2t+D_3h_4\cos\Omega_3t+D_4h_3\sin\Omega_3t \tag{2.1}$$

$$y_1{}^{\bullet}=-E_1\alpha_1\omega_{01}\sin\vartheta_1-E_2\alpha_2\omega_{02}\sin\vartheta_2-D_1h_2\Omega_2\sin\Omega_2t+$$
$$+D_2h_1\Omega_2\cos\Omega_2t-D_3h_4\Omega_3\sin\Omega_3t+D_4h_3\Omega_3\cos\Omega_3t$$

$$\vartheta_i=\omega_{0i}t+f_i^0\ {}_{(i=1,\,2)},\qquad \alpha_k=(\omega_{0k}^2-\omega_1^2)/(\xi_1\omega_{0k})\ {}_{(k=1,2)}$$

$$D_1=\frac{a_0(\omega_{01}^2-\omega_2^2)}{\xi_1\xi_2\omega_{01}^2-(\omega_{01}^2-\omega_2^2)(\omega_{01}^2-\omega_1^2)},\qquad D_2=\frac{b_0'\xi_1\omega_{01}}{(\omega_1^2-\omega_{01}^2)(\omega_2^2-\omega_{01}^2)-\xi_1\xi_2\omega_{01}^2}$$

$$D_3=\frac{a^1(\omega_{02}^2-\omega_1^2)}{\xi_1\xi_2\omega_{02}^2-(\omega_{02}^2-\omega_2^2)(\omega_{02}^2-\omega_1^2)},\qquad D_4=\frac{b_0''\xi_1\omega_{02}}{(\omega_1^2-\omega_{02}^2)(\omega_2^2-\omega_{02}^2)-\xi_1\xi_2\omega_{02}^2}$$

$$h_1=(\omega_1^2-\omega_{01}^2)/(\xi_1\omega_{01}),\quad h_2=\xi_2\omega_{01}/(\omega_{01}^2-\omega_2^2)$$
$$h_3=(\omega_1^2-\omega_{02}^2)/(\xi_1\omega_{02}),\quad h_4=\xi_2\omega_{02}/(\omega_{02}^2-\omega_2^2)$$

$$\omega_{01,02}^2={}^1/_2(\omega_1^2+\omega_2^2+\xi_1\xi_2)\pm\sqrt{{}^1/_4(\omega_1^2+\omega_2^2+\xi_1\xi_2)^2-\omega_1^2\omega_2^2}$$

Вынужденным колебаниям твердого тела относительно центра масс соответствует частное решение системы (1.3) при $\mu=0$:

$$y_2=D_1\sin\Omega_2t+D_2\cos\Omega_2t+D_3\sin\Omega_3t+D_4\cos\Omega_3t$$
$$\tag{2.2}$$
$$y_1=D_1h_2\cos\Omega_2t+D_2h_1\sin\Omega_2t+D_3h_4\cos\Omega_3t+D_4h_3\sin\Omega_3t$$

3. Исследуем поведение системы вблизи решения (2.2). Известно, что вынужденные нелинейные колебания твердого тела в нерезонансных случаях оказываются близкими к его линейным соответствующим колебаниям. Однако если система находится в условиях нелинейных резонансов, обычные вынужденные колебания твердого тела, возбуждаемые внешними периодическими силами, могут быть неустойчивыми.

Изучим вопрос устойчивости решения (2.2) в условиях возможных в системе резонансов. При этом будем следовать работе [4]. В качестве новых переменных примем переменные $E_i$, $\vartheta_i$ ($i=1, 2$). При помощи соотношений (2.1) система (1.3) сводится к виду

$$E_1^{\bullet}=\mu\left(f_1\frac{\cos\vartheta_1}{\delta_{11}}-f_2\frac{\sin\vartheta_1}{\delta_{12}}\right),\quad \vartheta_1^{\bullet}=\omega_{01}-\frac{\mu}{E_1}\left(f_1\frac{\sin\vartheta_1}{\delta_{11}}+f_2\frac{\cos\vartheta_1}{\delta_{12}}\right)$$

$$E^{\bullet}=\mu\left(f_1\frac{\cos\vartheta_2}{\delta_{22}}-f_2\frac{\sin\vartheta_2}{\delta_{21}}\right),\quad \vartheta_2^{\bullet}=\omega_{02}-\frac{\mu}{E_2}\left(f_2\frac{\cos\vartheta_1}{\delta_{21}}+f_1\frac{\sin\vartheta_2}{\delta_{22}}\right)\tag{3.1}$$

$$\delta_{11}=(\alpha_1\omega_{02}-\alpha_2\omega_{01})/\alpha_2,\quad \delta_{12}=\alpha_2\omega_{02}-\alpha_1\omega_{01}$$

$$\delta_{21}=\alpha_1\omega_{01}-\alpha_2\omega_{02},\qquad \delta_{22}=(\alpha_2\omega_{01}-\alpha_1\omega_{02})/\alpha_1$$

Рассмотрим наиболее типичный случай резонанса. Предположим, что выполняется точно или приближенно следующее резонансное соотношение: $2\omega_{01}\approx\Omega_2$.

Приближенное решение системы (3.1) может быть представлено в виде

$$E_j=x_j+\mu v_j(t,\ x_j,\ \gamma_j),\quad \vartheta_j=\omega_{1j}t+\gamma_j+\mu\vartheta_j(t,\ x_j,\ \gamma_j)\qquad (j=1,2)\tag{3.2}$$

Для установления условий возбуждения колебаний достаточно определить величины $x_j$ и $\gamma_j$, т. е. основные части решения (3.2). Воспользуемся методом, предложенным в [5]. Подставим выражения (3.2) в уравнения (3.1) и усредним полученные уравнения по явно входящему времени. Учтем при этом соотношения $\omega_{12}=\omega_{02}$, $\omega_{01}-\omega_{11}=\mu\varepsilon_1$, где $\omega_{11}={}^1/_2\Omega_2$, $\mu\varepsilon_1$ — расстройка частот.

Полученные указанным образом уравнения могут быть записаны в форме

$$x_1^{\bullet}=\mu x_1(p_1+p_2\sin 2\gamma_1+p_3\cos 2\gamma_1)$$

$$\gamma_1^{\bullet}=\mu\varepsilon_1+\mu(p_0+p_2\cos 2\gamma_1-p_3\sin 2\gamma_1)\tag{3.3}$$

$$x_2^{\bullet}=\mu g_1x_2,\qquad \gamma_2^{\bullet}=\mu g_2x_2$$

$$p_0=\frac{\omega_{01}}{2}\left(\frac{R''}{e_1\delta_{12}}-\frac{R\alpha_1}{e_2\delta_{11}}\right),\quad p_1=-\frac{1}{2}\omega_{01}\left(\frac{R_1}{e_2\delta_{11}}+\frac{\alpha_1R'}{e_1\delta_{12}}\right)$$

$$p_2=\frac{-d}{4e_2\delta_{11}}\{D_1(\omega_{01}-\Omega_2)(h_2\alpha_1^2+\alpha_2)+$$
$$+D_2(h_1(\alpha_1\omega_{01}-\alpha_2\Omega_2)+\alpha_1(\alpha_2\omega_{01}-\alpha_1\Omega_2)]\}$$

$$p_3=\frac{-d}{4e_2\delta_{11}}\{D_2(\omega_{01}-\Omega_2)(h_1\alpha_1^2-\alpha_2)+$$
$$+D_1[\alpha_1(\alpha_2\omega_{01}-\alpha_1\Omega_2)-h_2(\alpha_1\omega_{01}-\alpha_2\Omega_2)]\}$$

$$g_1=-\frac{\omega_{02}}{2}\left(\frac{R_1}{e_2\delta_{22}}+\frac{R'\alpha_2}{e_1\delta_{21}}\right),\quad g_2=\frac{\omega_{02}}{2}\left(\frac{R''}{e_1\delta_{21}}-\frac{R\alpha_2}{e_2\delta_{22}}\right)$$

Решению (2.2) соответствует частное решение системы (3.3) $x_j=0$, $\gamma_j=\rho(t,\ \mu)+\mathrm{const}$.

Преобразуем уравнения для $x_1$ и $\gamma_1$ при помощи замены переменных $Y_1=x_1\cos\gamma_1$, $Z_1=x_1\sin\gamma_1$. Получим линейную систему уравнений

$$Y_1^{\bullet}=\mu[(p_1+p_3)Y_1+(p_2-p_0-\varepsilon_1)Z_1]$$

$$Z_1^{\bullet}=\mu[(p_0+p_2+\varepsilon_1)Y_1+(p_1-p_3)Z_1]$$

из которой следует, что состояние $x_1=0$, $Y_1=Z_1=0$ устойчиво, если выполняются неравенства

$$p_1+p_3<0,\qquad p_1^2-p_3^2-(p_0+p_2+\varepsilon_1)(p_2-p_0-\varepsilon_1)>0$$

Входящие в эти условия устойчивости $p_0$, $p_i$ $(i=1, 2, 3)$ выражаются через параметры системы следующим образом:

$$p_0=\frac{1}{2}\,\omega_{01}(\omega_{01}^2-\omega_{02}^2)^{-1}\Big[\xi_1(I_y+I_z\beta_1^2)^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{3}K_i'\sin\lambda_i\sin\delta_i+$$

$$+\beta_2\sum_{i=1}^{3}K_i\sin\lambda_i\sin\delta_i\Big)+\xi_1^{-1}\omega_1^{-2}(\omega_{01}^2-\omega_1^2)(\omega_{02}^2-\omega_1^2)(I_y+I_z\beta_2^2)^{-1}\times$$

$$\times\Big(\sum_{i=1}^{3}K_i'\cos\delta_i+\beta_1\sum_{i=1}^{3}K_i\cos\delta_i\Big)\Big]$$

$$p_1=\frac{1}{2}\,\omega_{01}(\omega_{01}^2-\omega_{02}^2)^{-1}\Big[\omega_1^{-2}\omega_{01}(\omega_{02}^2-\omega_1^2)(I_y+I_z\beta_2^2)^{-1}\times$$

$$\times\Big(\sum_{i=1}^{3}K_i'\cos\delta_i+\beta_2\sum_{i=1}^{3}K_i\cos\delta_i\Big)-\omega_{01}^{-1}(\omega_{01}^2-\omega_1^2)(I_y+I_z\beta_1^2)^{-1}\times$$

$$\times\Big(\sum_{i=1}^{3}K_i'\sin\lambda_i\sin\delta_i+\beta_1\sum_{i=1}^{3}K_i\sin\lambda_i\sin\delta_i\Big)\Big]$$

$$p_2=-\frac{1}{4}\,\omega_{01}\omega_1^{-2}(\omega_{02}^2-\omega_1^2)(\omega_{02}^2-\omega_{01}^2)^{-1}(I_y+I_z\beta_2^2)^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{3}H_i\cos\lambda_i\Big)\times$$

$$\times\{\xi_1^{-1}(\omega_{01}-\Omega_2)(\omega_{01}^2-\omega_2^2)[\xi_1\xi_2\omega_{01}-(\omega_{01}^2-\omega_2^2)(\omega_{01}^2-\omega_1^2)]^{-1}(I_y+I_z\beta_2^2)^{-1}A_2\times$$
$$\times\cos\delta_2[\xi_2\xi_1^{-1}\omega_{01}^{-1}(\omega_{01}^2-\omega_1^2)^2(\omega_{01}^2-\omega_2^2)^{-1}+\omega_{02}^{-1}(\omega_{02}^2-\omega_1^2)]+$$
$$+\xi_1^{-1}\omega_{01}(\omega_{01}^2-\omega_1^2)[(\omega_1^2-\omega_{01}^2)(\omega_2^2-\omega_{01}^2)-\xi_1\xi_2\omega_{01}^2]^{-1}(I_y+I_z\beta_1^2)^{-1}A_2\sin\lambda_2\times$$
$$\times\sin\delta_2[\omega_{01}^{-1}\omega_{02}^{-1}\Omega_2(\omega_{01}^2-\omega_1^2)-\omega_{01}^{-1}(\omega_{01}^2-\omega_1^2)+\omega_{02}^{-1}(\omega_{02}^2-\omega_1^2)-$$
$$-\omega_{01}^{-2}\Omega_2(\omega_{01}^2-\omega_1^2)^2]\}$$

$$p_3=-\frac{1}{4}\,\omega_{01}\omega_1^{-2}(\omega_{02}^2-\omega_1^2)(\omega_{02}^2-\omega_{01}^2)^{-1}(I_y+I_z\beta_2^2)^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{3}H_i\cos\lambda_i\Big)\times$$

$$\times\{\omega_{01}(\omega_{01}-\Omega_2)[(\omega_1^2-\omega_{01}^2)(\omega_2^2-\omega_{01}^2)-\xi_1\xi_2\omega_{01}^2]^{-1}(I_y+I_z\beta_1^2)^{-1}A_2\sin\lambda_2\times$$
$$\times\sin\delta_2[-\xi_1^{-2}\omega_{01}^{-3}(\omega_{01}^2-\omega_1^2)^3-\omega_{02}^{-1}(\omega_{02}^2-\omega_1^2)]+\xi_1^{-1}(\omega_{01}^2-\omega_2^2)\times$$
$$\times[\xi_1\xi_2\omega_{01}^2-(\omega_{01}^2-\omega_2^2)(\omega_{01}^2-\omega_1^2)]^{-1}(I_y+I_z\beta_2^2)^{-1}A_2\cos\delta_2[\xi_1^{-1}\omega_{02}^{-1}(\omega_{01}^2-\omega_1^2)\times$$
$$\times(\omega_{02}^2-\omega_1^2)-\xi_1^{-1}\omega_{01}^{-2}\Omega_2(\omega_{01}^2-\omega_1^2)^2-\xi_2\omega_{01}(\omega_{01}^2-\omega_1^2)(\omega_{01}^2-\omega_2^2)^{-1}+$$
$$+\xi_2\omega_{01}\omega_{02}^{-1}\Omega_2(\omega_{02}^2-\omega_1^2)(\omega_{01}^2-\omega_2^2)^{-1}]\}$$

$$\beta_{1;2}=\frac{1}{2}\Big(I_y\sum_{i=1}^{3}k_i\cos\delta_i-I_z\sum_{i=1}^{3}k_i'\sin\lambda_i\sin\delta_i\Big)\Big(I_z\sum_{i=1}^{3}k_i\sin\lambda_i\sin\delta_i\Big)^{-1}\pm$$

$$\pm\Big\{\frac{1}{4}\Big[\Big(I_y\sum_{i=1}^{3}k_i\cos\delta_i-I_z\sum_{i=1}^{3}k_i'\sin\lambda_i\sin\delta_i\Big)\times$$

$$\times\Big(I_z\sum_{i=1}^{3}k_i\sin\lambda_i\sin\delta_i\Big)^{-1}\Big]^2+I_yI_z^{-1}\Big\}^{1/2}$$

$$\omega_k^2=\Big(\sum_{i=1}^{3}k_i'\sin\lambda_i\sin\delta_i+\beta_{3-k}^2\sum_{i=1}^{3}k_i\cos\delta_i+$$

$$+2\beta_{3-k}\sum_{i=1}^{3}k_i\sin\lambda_i\sin\delta_i\Bigg)(I_y+I_z\beta_{3-k}^2)^{-1}$$

$$\xi_k=(\beta_1-\beta_2)\left(\sum_{i=1}^{3}H_i\sin\lambda_i\right)(I_y+I_z\beta_{3-k}^2)^{-1}$$

Заменой $Y_2=x_2\cos\gamma_2$, $Z_2=x_2\sin\gamma_2$ последние два уравнения (3.3) могут быть приведены к виду

$$Y_2^{\bullet}=\mu(g_1Y_2-g_2Z_2),\qquad Z_2^{\bullet}=\mu(g_1Z_2+g_2Y_2)$$

Из этих уравнений получаем, что для состояния $x_2=0$, $Y_2=Z_2=0$ условия асимптотической устойчивости сводятся к неравенствам $g_1<0$, $g_1g_2>0$.

При этом $g_1$, $g_2$, записанные через параметры системы, имеют вид

$$g_1=-\frac{1}{2}\omega_{02}(\omega_{01}^2-\omega_{02}^2)^{-1}[\omega_1^{-2}\omega_{02}(\omega_{01}^2-\omega_1^2)(I_y+I_z\beta_2^2)^{-1}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{3}K_i'\cos\delta_i+\beta_2\sum_{i=1}^{3}K_i\cos\delta_i\right)+\omega_{02}^{-1}(\omega_{02}^2-\omega_1^2)(I_y+I_z\beta_1^2)^{-1}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{3}K_i'\sin\lambda_i\sin\delta_i+\beta_1\sum_{i=1}^{3}K_i\sin\lambda_i\sin\delta_i\right)\Bigg]$$

$$g_2=-\frac{1}{2}\omega_{02}(\omega_{01}^2-\omega_{02}^2)^{-1}\Bigg[\xi_1(I_y+I_z\beta_1^2)^{-1}\Bigg(\sum_{i=1}^{3}K_i'\sin\lambda_i\sin\delta_i+$$

$$+\beta_2\sum_{i=1}^{3}K_i\sin\lambda_i\sin\delta_i\Bigg)+\xi_1^{-1}\omega_1^{-2}(\omega_{01}^2-\omega_1^2)(\omega_{02}^2-\omega_1^2)(I_y+I_z\beta_2^2)^{-1}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{3}K_i'\cos\delta_i+\beta_1\sum_{i=1}^{3}K_i\cos\delta_i\right)\Bigg]$$

Случаи других возможных резонансов, например $2\omega_{0j}=\Omega_i$ ($j=2$, $i=2, 3$; $j=1$, $i=3$), $\omega_{01}\pm\omega_{02}=\Omega_i$, могут быть рассмотрены аналогично.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 598 с.
2. *Токарь Е. Н.* О рациональном построении систем гиросиловых стабилизаторов.— Космич. исследования, 1978, т. 16, вып. 1, с. 22–30.
3. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. *Ганиев Р. Ф.* Резонансные явления при нелинейных колебаниях твердых тел.— Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 12, с. 45–70.
5. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике.— Сб. тр. Ин-та строит. механ. АН УССР. Киев, 1950, № 14, с. 9–34.



Днепропетровск

Поступила в редакцию 2.XII.1983