

УДК 539.214; 539.374

**ПРИМЕНЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТЕОРЕМ
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ
ПРИ РАЗВИТОМ ПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ КОМПОЗИТА**

ЗАЛАЗИНСКИЙ А. Г.

На основе общих теорем и положений теории упругости и пластичности решен ряд вопросов, связанных с исследованием процессов деформирования композитов слоистого и волокнистого строения [1–5]. Однако известные решения не охватывают все важные в практическом отношении задачи. Значительные трудности возникают при численной реализации решений. Это приводит к использованию в работах прикладного характера простейших схем пластического течения композита, который делится либо на два – четыре жестких блока, либо на небольшое количество зон с однородным распределением напряжений или деформаций в каждой зоне, что, естественно, сказывается на точности результатов.

В публикуемой работе показано, что экстремальные теоремы теории пластичности позволяют осуществить постановку задач в удобном для численной реализации виде. На базе совместного использования статической и кинематической теорем теории идеальной пластичности предложен вариант вариационно-разностного метода для расчета на ЭЦВМ напряженно-деформированного состояния при развитии пластического течения (общей текучести [6]) жесткопластических тел с неоднородностями дискретного типа. Для численной реализации решения использован сплайн-многочлен, составленный для области деформирования, дискретизированной симплекс-элементами [7]. Количество варьируемых параметров определено числом неизвестных компонент скорости и средним нормальным напряжением в узлах сетки.

В качестве примера рассчитаны напряжения, деформация и предельная нагрузка при растяжении и сжатии образца, матрица которого пронизана дискретными однонаправленными волокнами.

1. Пусть жесткопластическое тело обладает кусочно-однородными свойствами [8], занимает объем Ω , ограничено поверхностью $S_0 = S_F \cup S_v$ и нагружено системой поверхностных сил $\mu F = \{\mu F_i\}$, где μ – возрастающий от нуля неопределенный множитель. Заданы статические и кинематические условия

$$\sigma_{ij} n_j - \mu F_i = 0 \quad (x \in S_F) \quad (1.1)$$

$$v_{is} - v_{is}^0 = 0 \quad (x \in S_v) \quad (1.2)$$

Здесь σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, n_j – направляющие косинусы S_F , $u_s = \{v_{is}\}$ – вектор скорости перемещений точки тела, $v_s^0 = \{v_{is}^0\}$ – вектор скорости перемещений, заданных на S_v , $x = \{x_i\}$ – координаты точки тела. Требуется найти предельную нагрузку $\mu_F F$, при которой жесткопластическое тело переходит в состояние общей текучести.

В состоянии общей текучести несжимаемого тела компоненты тензора скорости деформаций ξ_{ij} связаны с v_i зависимостями

$$\xi_{ij} = 1/2 (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (1.3)$$

и удовлетворяют условию несжимаемости $\delta_{ij} \xi_{ij} = 0$.

Компоненты тензора напряжений при статическом нагружении удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (x \in \Omega) \quad (1.4)$$

и для $\forall x \in \Omega$ выполняется условие, по которому интенсивность касательных напряжений

$$T(x) = 1/2 (s_{ij}s_{ij})^{1/2} \leq \tau_s(x) \quad (1.5)$$

где $\tau_s(x)$ — предел текучести при сдвиге, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$ — компоненты девиатора напряжений, $\sigma = \sigma_{ii}/3$ — среднее нормальное напряжение, δ_{ij} — символ Кронекера.

Физические уравнения каждого K -го макрообъема (в пределах Ω_K тело однородно и изотропно) установлены для начальной стадии пластического течения и имеют вид

$$s_{ij} = 2\tau_{sK}(x_K) \xi_{ij}/H(x_K) \quad (x_K \in \Omega_K) \quad (1.6)$$

где $H = (2\xi_{ij}\xi_{ij})^{1/2}$ — интенсивность скоростей деформации сдвига.

Для определенности полагаем, что пустоты (поры) внутри Ω наделены материальными свойствами, в частности их предел текучести при сдвиге $\tau_{s0} = 0$. Предел текучести при сдвиге поверхности стыка макрообъемов с различными свойствами пропорционален пределу текучести более мягкого из контактирующих материалов

$$\tau_{sM} = \psi \tau_{sK} \quad (\tau_{sK} \leq \tau_{sn}), \quad \tau_{sM} = \psi \tau_{sn} \quad (\tau_{sK} > \tau_{sn}) \quad (1.7)$$

где τ_{sK} , τ_{sn} — пределы текучести при сдвиге в контактирующих областях Ω_K и Ω_n , ψ — коэффициент пропорциональности.

Применим теоремы о нижней и верхней оценках предельной нагрузки, которые сформулированы и доказаны в [6, 8] для однородной среды. В [6] показано, что для сплошных сред допускаемые разрывы напряжений в деформируемом объеме не изменяют скорость диссипации механической энергии. Следовательно, обобщение экстремальных теорем теории идеальной пластичности на случай жесткопластического тела с кусочно-однородными свойствами является тривиальным и дальнейшие соотношения приводим без вывода.

Пусть напряжения σ_{ij} , скорости деформации ξ_{ij} и скорости перемещений v_i — неизвестное истинное решение задачи о предельном состоянии жесткопластического тела с кусочно-однородными свойствами, подверженного действию системы поверхностных сил F_i ; σ_{ij}^* — некоторые произвольные статически возможные, т. е. удовлетворяющие соотношениям (1.1), (1.4) и (1.5), напряжения. Тогда статическая теорема приводит к неравенству

$$\int_{S_v} F_i v_{is}^0 ds \geq \int_{S_v} \sigma_{ij}^* n_j v_{is}^0 ds \quad (1.8)$$

Или, если внешняя нагрузка сводится к одной обобщенной силе Q , которой соответствует обобщенная скорость v_0 :

$$Q \geq (v_0)^{-1} \int_{S_v} \sigma_{ij}^* n_j v_{is}^0 ds \quad (1.9)$$

Расчет по статически возможному состоянию дает Q — нижнюю оценку предельной нагрузки.

Пусть v_i^* , ξ_{ij}^* — произвольное кинематически допустимое, т. е. удовлетворяющее соотношения (1.2) — (1.3), состояние того же тела. Тогда кинематическая теорема приводит к неравенству

$$\int_{S_0} F_i^0 v_i^* ds \leq \sum_{K=1}^M \int_{\Omega_K} \sigma_{ij}^* \xi_{ij}^* d\omega + \sum_{p=1}^N \int_{S_p^*} \tau_{sp} [v_p^*] ds \quad (1.10)$$

где S_p^* — варьируемая внутри Ω_K поверхность разрыва касательной составляющей скорости, $[v_p^*]$ — разрыв касательной к поверхности скоро-

сти, τ_{sp} — предел текучести при сдвиге материала на поверхности S_p^* , M — количество макрообъемов Ω_K , в пределах которых механические свойства материала остаются постоянными, N — количество поверхностей разрыва скорости в $\Omega = \sum \Omega_K$ ($K=1, 2, \dots, M$).

Если внешняя нагрузка сводится к одной обобщенной силе, то

$$Q \leq (v^*)^{-1} \left(\sum_{K=1}^M \int_{\Omega_K} \sigma_{ij}^* \xi_{ij}^* d\omega + \sum_{p=1}^N \int_{S_p^*} \tau_{sp} [v_p^*] ds \right) = Q_+ \quad (1.11)$$

Расчет по кинематически допустимой схеме пластического течения дает Q_+ — верхнюю оценку предельной нагрузки Q . Варьируя кинематически допустимые скорости, находим нижнюю грань $\inf Q_+$, которая является лучшим приближением к Q в заданном классе кинематически возможных схем пластического течения. Чтобы найти интервальную оценку предельной нагрузки, решается вспомогательная краевая задача для определения статически возможного напряженного состояния и устанавливается точность решения, которая характеризуется Δ_Q относительной близостью наилучших верхней и нижней оценок

$$\Delta_Q = 2(\inf Q_+ - \sup Q_-) / (\inf Q_+ + \sup Q_-), \quad (1.12)$$

В зависимости от величины Δ_Q принимается или отвергается взятая за исходную схема пластического течения.

На основе изложенного решены некоторые прикладные задачи [9, 10], результаты которых использованы при оптимизации технологических процессов обработки давлением композиционных материалов.

Неравенства (1.8) и (1.10) свидетельствуют о том, что действительная скорость диссипации механической энергии в теле всегда меньше расчетной, которая в свою очередь определяется мощностью, подводимой к деформируемой системе внешними силами. Поэтому неравенства (1.8) и (1.10) могут быть обобщены на случай смешанных граничных условий, когда $S_0 = S_F \cup S_v \cup S_s$, где S_s — поверхность, на которой заданы нормальная составляющая скорости и касательное напряжение.

2. Составим некоторый функционал, позволяющий находить кинематически допустимые скорости и статически возможные напряжения с использованием одного неравенства. Учитывая (1.1), (1.2) и (1.6), а также соотношение $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}$, представим неравенство (1.10) в виде

$$J_1(v_i^*, \sigma^*) = J_{1v} + J_{1p} - J_{1F} - J_{1v} \geq 0 \quad (2.1)$$

$$J_{1v} = \sum_{K=1}^M \int_{\Omega_K} (\tau_{sK} H^* + \sigma^* v_{i,i}^*) d\omega$$

$$J_{1p} = \sum_{p=1}^N \int_{S_p^*} \tau_{sp} [v_p^*] ds, \quad J_{1F} = \int_{S_F} F_i^0 v_i^* ds$$

$$J_{1v} = \int_{S_0} \left(\frac{2\tau_{sK}}{H^*} \xi_{ij}^* + \sigma^* \delta_{ij} \right) n_j v_i^0 ds$$

В (2.1) независимо варьируются только v_i^* и σ^* , так как выполняются соотношения (1.3) и $H^* = (2\xi_{ij}^* \xi_{ij}^*)^{1/2}$. Действительное распределение $v_i^* = v_i$ и $\sigma^* = \sigma$ обращает $J_1(v_i^*, \sigma^*)$ в нуль.

Наряду с функционалом $J_1(v_i^*, \sigma^*)$ рассмотрим функционал

$$J_2(v_i^*, \sigma^*) = J_{2v} + J_{2p} - J_{2F} - J_{2v} \geq 0 \quad (2.2)$$

$$J_{2v} = \sum_{K=1}^M \int_{\Omega_K} [\tau_{sK} H^* + |\lambda_i| |\sigma_{ij}^*| + |\lambda_i| |v_{i,i}^*| + |\lambda_s| |\sigma^* U_+(\sigma^*)|] d\omega$$

$$U_+(\vartheta^*) = 0 (\vartheta^* \leq 0), \quad U_+(\vartheta^*) = 1 (\vartheta^* > 0), \quad \vartheta^* = \frac{1}{2} (s_{ij}^* s_{ij}^*)^{1/2} - \tau_s$$

в котором $J_{2p} = J_{1p}$, $J_{2F} = J_{1F}$ и $J_{2v} = J_{1v}$; σ_{ij} , j^* соответствует левой части уравнения равновесия (1.4), v_i , i^* — левой части уравнения несжимаемости, λ_m — множители Лагранжа ($m=1, \dots, 5$).

Видно, что введение штрафных функций не уменьшает исходный функционал на возможном напряженно-деформированном состоянии. На действительных скоростях перемещений и при действительном распределении гидростатических давлений $J_2(v_i^*, \sigma^*)$ обращается в нуль; а в остальных случаях значение этого функционала так же, как и $J_1(v_i^*, \sigma^*)$, больше нуля. Следовательно, $\inf J_2(v_i^*, \sigma^*) = \inf J_1(v_i^*, \sigma^*)$. Так как

$$\sigma_{ij}^* = s_{ij}^* + \sigma^* \delta_{ij} = 2\tau_s \xi_{ij}^* / H^* + \sigma^* \delta_{ij} \quad (2.3)$$

то функционал содержит варьируемые функции v_i^* и σ^* . На действительных скоростях перемещений и при действительном распределении средних нормальных напряжений $v_i^* = v_i$, $\sigma^* = \sigma$ и $J_2(v_i, \sigma) = J_1(v_i, \sigma) = 0$.

Определив с использованием ЭЦВМ минимальное значение $J_2(v_i^*, \sigma^*)$ и зная приближенные значения v_i и σ , находим $\inf Q_+$ и $\sup Q_-$ из выражений (1.8), (1.10) или (1.9), (1.11) и определяем Δ_Q по формуле (1.12), после чего, если $\Delta_Q \leq 0,05$, принимаем или, если $\Delta_Q > 0,05$, отвергаем схему пластического течения, взятую за исходную.

При $\Delta_Q \leq 0,05$ рассчитываем напряжения в интересующих точках $x \in \Omega$ по соотношению (2.3).

3. Для решения практических задач применяется прямой метод минимизации в разностной постановке. Так как гладкость экстремума $J_2(v_i^*, \sigma^*)$ в приближенных решениях не доказана, будем ориентироваться на методы прикладного нелинейного программирования, не использующие производные, в частности приемлемые результаты дает симплекс-метод Нелдера — Мида (поиск по деформируемому многограннику [11]).

Применим дискретизацию макрообъемов Ω_K симплекс-элементами. В дальнейшем симплекс-элементы обозначим индексом (e), а их грани, прилегающие к S_F , — индексом (c); грани, прилегающие к S_v , — индексом (m). С учетом последних замечаний составляющие функционала (2.2) представим следующим образом:

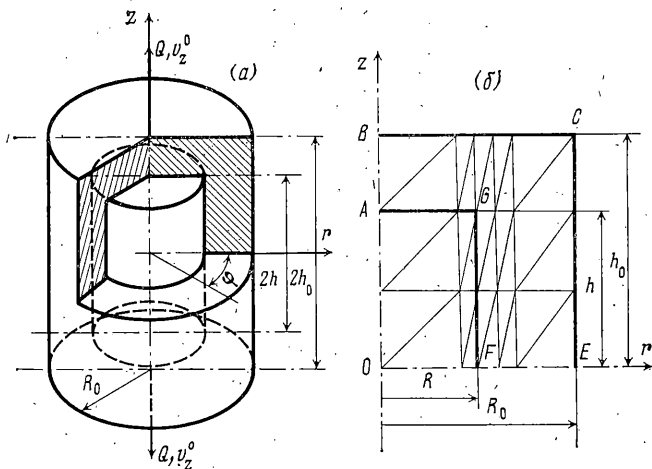
$$J_{2v} \approx \sum_{K=1}^M \left\{ \sum_{e=1}^{\sigma_K} \int_{\Omega_e} [\tau_{sK} H_e^* + |\lambda_i| |\sigma_{ij^e, j}| + |\lambda_i| |v_{i, i}| + |\lambda_5| |\vartheta_e U_+(\vartheta_e)|] d\omega \right\} \quad (3.1)$$

$$J_{2p} \approx \sum_{p=1}^N \int_{S_p^*} \tau_{sp} [v_p^*] ds, \quad J_{2F} \approx \sum_{c=1}^L \int_{S_c} F_{ic}^0 v_{ic} ds \quad (3.2)$$

$$J_{2v} \approx \sum_{m=1}^{M_v} \int_{S_m} \left(\frac{2\tau_{sK}}{H_e^*} \xi_{ij}^* + \sigma_e^* \delta_{ij} \right) n_j v_{im}^0 ds \quad (3.3)$$

Здесь S_c — поверхность грани симплекс-элемента, прилегающего к S_F , S_m — поверхность грани симплекс-элемента, прилегающего к S_v ; L — количество поверхностей граней симплекс-элементов, которые прилегают к S_F ; M_v — количество поверхностей граней симплекс-элементов, которые прилегают к S_v .

Вследствие достаточной малости симплекс-элементов подходящие функции для v_{ic}^* и σ_e^* выбирались в виде многочленов так, что они образуют сплайн-полиномы, обладающие непрерывностью внутри Ω . В част-



Фиг. 1

ности, в случае сплайн-многочленов первой степени в пределах Ω_k под-
ходящие функции имеют вид

$$f_e = A_{e1} + A_{e2}x_1 + A_{e3}x_2 + A_{e4}x_3$$

$$F_{ei} = A_{e1} + A_{e2}X_{1i} + A_{e3}X_{2i} + A_{e4}X_{3i} \quad (3.4)$$

где x_1, x_2, x_3 — координаты $x \in \Omega_e$, A_{e1}, \dots, A_{e4} — константы e -симплекса, являющиеся решениями системы уравнений, F_{ie} — заданные значения варьируемой функции в вершинах i ($i=1, \dots, 4$) симплекс-элемента (e), X_{1i}, X_{2i}, X_{3i} — координаты i -й вершины симплекс-элемента (e).

Таким образом, задача поиска кинематически допустимых скоростей и статически возможных напряженных состояний сведена к поиску значений F_{ei} , минимизирующих $J_2(v_i^*, \sigma^*)$. Количество варьируемых параметров определяется формулой $k_p = (k_m + 1)k_s - k_v$, где k_s — количество узлов сетки, k_v — количество компонентов скорости, определенных в узлах сетки граничными условиями, $k_m = 2$ в случае двумерного пластического течения и $k_m = 3$ при трехмерной деформации.

4. В качестве примера, иллюстрирующего применение изложенного аппарата, рассмотрены процессы растяжения и сжатия образца, матрица которого пронизана дискретными волокнами более твердого материала. Волокна ориентированы вдоль одной оси и равномерно распределены по объему образца, вследствие чего композит можно разделить на идентичные ячейки, материал которых испытывает одинаковое напряженно-деформированное состояние; зоны неравномерной деформации локализируются вблизи волокон.

Принятым допущением соответствует модель композита, предложенная в [12]. В локальной системе координат r, φ, z рассматривается пластическая деформация материала ячейки цилиндрической формы (фиг. 1, а) с радиусом наружной поверхности $R_0 = (S/\pi)^{1/2}$, где S — площадь поперечного сечения реальной ячейки композита, выделенной из прямоугольного бруса, $2h_0$ — высота ячейки. Матрица пронизана волокон аналогичной формы с радиусом R и длиной $2h$. Так как ячейка осесимметричная, осуществляется дискретизация четвертой части продольного сечения модели.

Описанная модель композита изучалась [12–15] методом верхней оценки. При этом рассматриваемая часть сечения ячейки делилась на четыре прямоугольные зоны. Предлагаемый вариант вариационно-разностного метода позволяет уточнить полученные ранее верхние оценки за счет дискретизации сечения большим количеством элементов (фиг. 1, б); дополнить верхние оценки нижними и либо оценить точность решений, либо найти предельную нагрузку с наперед заданной точностью.

1. В условиях осевой симметрии $v_\varphi = 0, \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = 0, \xi_{r\varphi} = 0, \varepsilon_{z\varphi} = 0$. Отличающиеся от нуля скорости v_r и v_z и среднее нормальное напряже-

¹ Здесь и далее при обозначении допустимых скоростей и напряжений звездочка опускается.

ние σ в пределах симплекс-элемента с индексом (e) задаются подходящими функциями ²

$$\begin{aligned}v_{rc} &= A_{e1} + A_{e2}r + A_{e3}z \\v_{ze} &= B_{e1} + B_{e2}r + B_{e3}z \\ \sigma_e &= C_{e1} + C_{e2}r + C_{e3}z\end{aligned}\quad (4.1)$$

Граничные условия задачи для случая сжатия образца следующие:

$$v_z(z=0) = v_r(r=0) = 0, \quad v_z(z=h_0) = 0$$

Так как деформация принята однородной, то образующая (фиг. 1, б) внешней цилиндрической поверхности матрицы в процессе растяжения не искривляется, т. е. $v_r(r=R_0) = v_r^0 = \text{const}$.

При принятых допущениях усредненные по поверхности CE внешние нагрузки равны нулю и в силу этого поверхность CE является поверхностью S_F с нулевыми нагрузками и $J_{2F} = 0$. На граничной поверхности матрица — волокно (на фиг. 1, б обозначена линиями AG и GF) допускается разрыв касательной составляющей скорости и $\sigma_{rz} = \tau_{sm}$.

С учетом допущений имеем

$$J_{2v} = 2\pi \sum_{k=1}^2 \left\{ \sum_{e=1}^{G_k} [(\tau_{sk} H_e + |v_{ie}| |\sigma_{ije,j}| + |\sigma_e| |v_{i,i}| + |H_e| |\vartheta_e U_+(\vartheta)|) r_e S_e] \right\} \quad (4.2)$$

$$J_{2p} = 2\pi \tau_{sm} \left(\sum_{P=1}^{N_z} [v_z] R_P l_P + \sum_{P=N_z+1}^N [v_r] r_P l_P \right) \quad (4.3)$$

$$J_{2v} = 2\pi \sum_{m=1}^{M_v} \left[v_z \left(\frac{2\tau_{sm}}{H_m} \xi_{zm} + \sigma_m \right) r_m l_m \right] \quad (4.4)$$

Здесь S_e — площадь симплекс-элемента e , r_e — радиус центра тяжести симплекс-элемента, σ_e , v_{ie} — усредненные по элементу среднее нормальное напряжение и скорости v_r и v_z , l_P , l_m — длина стороны симплекс-элемента (P) или (m), прилегающая к соответствующей поверхности AG , GF или BC (фиг. 1, б); N , M_v — количество сторон симплекс-элементов, входящих в AGF , BC .

Для проходящих функций (4.1) (z_e — координаты центра тяжести элемента)

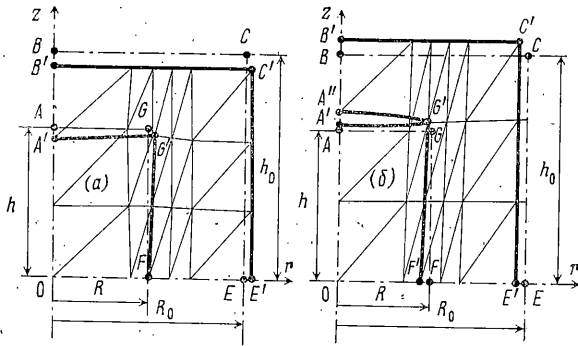
$$\begin{aligned}H_e &= \{2[A_{e2} - B_{e3}]^2 + (B_{e3} - D_e)^2 + \\ &+ (D_e - A_{e2})^2\} / 3 + (A_{e3} + B_{e2})^2\}^{1/2}\end{aligned}\quad (4.5)$$

$$D_e = (A_{e1} + A_{e2}r_e + A_{e3}z_e) r_e^{-1}$$

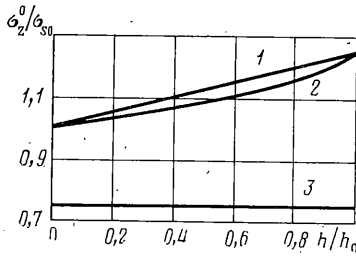
$$\begin{aligned}v_{i,i} &= A_{e2} + B_{e3} + D_e, \quad |v_{ie}| |\sigma_{ije,j}| = |v_{re}| \left| C_{e3} + \frac{2\tau_{se}}{H_e} (A_{e2} - D_e) r_e^{-1} \right| + \\ &+ |v_{ze}| \left| \frac{2\tau_{se}}{H_e} (A_{e3} + B_{e2}) r_e^{-1} + C_{e3} \right|\end{aligned}\quad (4.6)$$

Для вычислений J_{2v} по формуле (4.4) H_m , σ_m определяются по (4.1) и (4.5) с соответствующей заменой индекса на индекс m . После замены индекса e на m $\xi_{zm} = B_{m3}$.

² Применение функций (4.1) обуславливает разрыв напряжений на гранях элементов, что в общем случае может потребовать корректировки процедуры вычислений.



Фиг. 2



Фиг. 3

На основе алгоритма, приведенного в п. 3, с использованием формул (4.2)–(4.6) на языке FORTRAN для ЭВМ ЕС-1022 разработана программа PLFCM определения напряженно-деформированного состояния в начальной стадии развитого пластического течения композиционных материалов. При разработке программы использованы подпрограммы: триангуляции GRID [16], решения систем линейных уравнений SIMQ [17] и прямой минимизации методом Нелдера – Мида SIMPL [11].

С использованием программы PLFCM выполнены расчеты напряженно-деформированного состояния и предельной нагрузки для сжатия ячейки композита (фиг. 1). Результаты вычислений представлены на фиг. 2, 3 (кривая 2). На фиг. 2 показано формоизменение образца, характерное для состояния общей текучести композита с дискретными однонаправленными волокнами.

На фиг. 3 приводится зависимость $\sigma_z^0/\sigma_{s0} = f(\sigma_{s0}/\sigma_s, R/R_0, h/h_0)$, где σ_z^0 – усредненное по поперечному сечению ячейки (плоскость $z=h_0$, см. фиг. 1) нормальное напряжение, соответствующее общей текучести композита, σ_{s0} , σ_s – пределы текучести материала матрицы и волокна при растяжении (сжатии), h/h_0 – относительная высота волокна, R/R_0 – относительный радиус волокна.

Величина $\sigma_z^0 = (Q_+ + Q_-) (2\pi R_0^2)^{-1}$ вычислена при $\Delta_Q \leq 0,05$. Расчеты, результаты которых представлены на фиг. 2, 3, выполнены при $\sigma_s/\sigma_{s0} = 2$, $R/R_0 = 0,5$.

2. Для случая растяжения образца $v_z(z=0) = v_r(r=0) = 0$, $v_z(z=h_0) = -v_z^0$, $v_r(r=R_0) = -v_r^0$.

Предполагается, что поверхность S_F состоит из S_{F1} , обозначенной на фиг. 1, 2 прямой CE , и S_{F2} , обозначенной прямой AG . Поверхности S_{F1} и S_{F2} являются поверхностями с нулевыми нагрузками (S_{F1} не нагружена, так как деформация равномерная, а S_{F2} не нагружена, так как предполагается, что сопротивление отрыву для материала граничной поверхности «матрица – волокно» равно нулю)³. Остальные допущения отно-

³ В общем случае сопротивление отрыву $0 \leq \sigma_t \leq \sigma_s$, если $\sigma_s > \sigma_{s0}$. При $\sigma_t = \sigma_s$ результаты, полученные при растяжении, практически не отличаются от результатов, получаемых для сжатия.

сительно схемы пластического течения соответствуют случаю сжатия композита.

Формулы (4.1), (4.2), (4.4)–(4.6) для случая растяжения остаются такими же, как и для сжатия. Формула (4.3) приобретает вид $J_{2p} = -2\pi\tau_{sm}\sum_i [v_z]Rl_p$ ($p=1, 2, \dots, N$).

С использованием программы PLFCM выполнены расчеты, соответствующие описанным в случае сжатия, для случая растяжения той же (см. фиг. 1) ячейки. Результаты вычислений представлены на фиг. 2, 6 и фиг. 3 (кривая 3). Для сравнения на фиг. 3 (кривая 1) показана зависимость σ_z^0/σ_{s0} от h/h_0 , полученная на основе [12].

Представленные результаты показывают, что формоизменение и предельные нагрузки при принятых схемах пластического течения при растяжении и сжатии различаются. Установлено также, что существенное влияние на результаты оказывают параметры граничной поверхности «матрица — волокно», в частности сопротивление отрыву σ_t и коэффициент ψ в (1.7); неоднородность деформации при статическом сжатии и растяжении приводит к значительным концентрациям напряжений на граничной поверхности, в частности в точках G и F .

Выражаю признательность В. Л. Колмогорову за помощь при подготовке работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ржаницын А. Р. Доказательство ассоциированного закона текучести для дисперсных жесткопластических систем.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4, с. 173–175.
2. Работнов Ю. Н. Прочность слоистых композитов.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 1, с. 113–119.
3. Дудукаленко В. В., Лысач Н. Н. О пластических свойствах материала, содержащего пластинчатые включения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 1, с. 103–109.
4. Власенко Ю. Е., Кузменко В. И., Фень Г. А. Контактная задача для упругопластического многослойного пакета с учетом отставания слоев.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 67–73.
5. Темис Ю. М. Вариационный метод решения задач неоднородной теории пластичности.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5, с. 74–81.
6. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
7. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
8. Койгер В. Т. Общие теоремы теории упругопластических сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 79 с.
9. Залазинский А. Г., Ляшков В. Б. Расчет силовых параметров и допустимых вытяжек при волочении волокнистых композиционных материалов.— Сб. науч. тр. Магнитогорск. горно-металлург. ин-та, 1975, вып. 11, с. 139–144.
10. Залазинский А. Г., Ляшков В. Б., Катрюк В. П. Расчет силовых параметров и ресурса пластичности при прессовании композиционных материалов волокнистого строения.— В кн.: Обработка металлов давлением. Вып. 3. Свердловск.: Изд-е Уральск. политехн. ин-та, 1976, с. 81–85.
11. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 534 с.
12. Avitzur B. Tensile strength of composite materials. Pt. 1. Upper bound analysis.— Trans. ASME. Ser. B. J. Eng. for Industry, 1973, v. 95, No. 3, p. 827–834.— Рус. перев.: Механика: Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1973, № 3, с. 164–172.
13. Avitzur B. Tensile strength of composite materials. Pt. 2. Interaction of analysis.— Trans. ASME. Ser. B. J. Eng. for Industry, 1973, v. 95, No. 3, p. 835–843.— Рус. перев.: Механика: Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1973, № 3, с. 172–180.
14. Iscovici S., Avitzur B. Necessary conditions for nonhomogeneous plastic deformation of composite materials in uniaxial tension.— Trans. ASME. Ser. B. J. Eng. for Industry, 1975, v. 97, No. 1, p. 182–189.— Рус. перев.: Механика: Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1975, № 1, с. 171–178.
15. Iscovici S., Avitzur B. Necessary conditions for ductile flow of a tensile composite rod.— Trans. ASME. Ser. B. J. Eng. for Industry, 1976, v. 98, No. 1, p. 272–278.— Рус. перев.: Механика: Сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1976, № 1, с. 227–234.
16. Сегерлинд Л. Дж. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
17. Сборник научных программ на фортране. Вып. 2. Матричная алгебра и линейная алгебра. М.: Статистика, 1974. 221 с.

Свердловск

Поступила в редакцию
7.11.1983