МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1984

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЕ

СУРКОВ В. В.

Нелинейные свойства сред со сложной реологией существенно отражаются на закономерностях распространения упругих волн. Так, в естественных материалах возбуждаются механические колебания неоднородных включений, пустот, зерен и т. п., что приводит к нелокальной зависимости давления от плотности [1–3]. При проведении взрывов в таких средах возможно формирование упругого предвестника с осциллирующей структурой, обусловленной неравновесным характером деформаций [3]. Принципиальный интерес представляет учет нелинейности для геофизических исследований [4].

В публикуемой работе изучаются особенности взаимодействий волн на основе релаксационного уравнения состояния гетерогенных сред [3], которое обобщается на случай неколлинеарных волн. Рассматриваются интенсивная продольная волна, процессы генерации продольных гармоник поперечной волной, анализируются возможности параметрического усиления ультразвука за счет нелинейности релаксационных процессов.

1. Усредненный тензор напряжений в гетерогенной среде, учитывающий неравновесный характер деформаций, можно представить в виде суммы [3]:

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}{}^{e}+\sigma_{ij}{}^{d},\qquad \sigma_{ij}{}^{d}=-(aq^{\cdot\cdot}+bq^{\cdot 2}+\mu q^{\cdot})\delta_{ij},\qquad q=\rho/\rho_0 \tag{1.1}$$

Здесь $\sigma_{ij}{}^{e}$ — равновесная часть тензора напряжений, а $\sigma_{ij}{}^{d}$ — динамическая, зависящая от производных от плотности ρ, параметры $a\sim\delta^2$, $b\sim\delta^2$ и $\mu\sim\eta/\rho_0$ определяются геометрией и концентрацией включений, δ — характерный размер неоднородностей, причем $\delta\ll\lambda$ (λ — длина волны), η — коэффициент сдвиговой вязкости матрицы, ρ_0 — начальная плотность среды. Первые два члена в выражении для $\sigma_{ij}{}^{d}$ учитывают инерцию среды, обусловленную внутренними степенями свободы. Диагональный вид тензора $\sigma_{ij}{}^{d}$ выбран из условий, что объемные деформации включений слабо влияют на девиаторную часть тензора напряжений.

Уравнения движения второго приближения в эйлеровых координатах записываются следующим образом:

$$qu_i^{\cdot\cdot}+2u_k^{\cdot}\frac{\partial u_i^{\cdot}}{\partial x_k}+u_k^{\cdot\cdot}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=c_t^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k}+$$

$$+(c_l^2-c_t^2)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k\,\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}(aq^{\cdot\cdot}+bq^{\cdot 2}+\mu q^{\cdot})+f_i \tag{1.2}$$

$$q=1-I_1+2I_2-0{,}5I_1^2$$

где в выражении для q, представленном через инварианты I_1, I_2, следует учитывать члены, порядок которых не выше второго. Слагаемое f_i учитывает геометрическую и физическую нелинейность среды и зависит от упругих модулей матрицы второго и третьего (A, B, C) порядков [5], c_l и c_t — продольная и поперечная скорости звука, зависящие от состава среды.

Для плоской продольной волны, распространяющейся вдоль оси x, уравнение (1.2) принимает вид

$$u^{\cdot\cdot}=c_l^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-u^{\cdot 2}+a\frac{\partial u^{\cdot\cdot}}{\partial x}+b\left(\frac{\partial u^{\cdot}}{\partial x}\right)^2+\mu\frac{\partial u^{\cdot}}{\partial x}\right] \quad (1.3)$$

$$\tau=3c_l^2+2(A+3B+C)/\rho_0$$

Если нелинейные искажения волнового профиля накапливаются медленно, так что в системе координат $\xi=x-c_lt$, $t'=t$, движущейся вместе с волной, производную по времени можно считать малой величиной, то уравнение (1.3) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t'}+\frac{(\tau-2c_l^2)}{4c_l}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+\frac{ac_l}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3}-\frac{\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}=0 \quad (1.4)$$

Здесь учтено, что скорости и смещения в бесконечности обращаются в нуль. В отсутствие дисперсии ($a=0$) уравнение (1.4) подстановкой $u=2\mu c_l \ln y/(\tau-2c_l^2)$ сводится к уравнению теплопроводности для функции $y(\xi, t')$. В общем случае удобно перейти в (1.4) от смещения к скорости v. Тогда при сделанных приближениях получаем, как и в работе [3], уравнение Бюргерса — Кортевега — де Вриза

$$\frac{\partial v}{\partial t'}+\frac{(2c_l^2-\tau)}{2c_l^2}v\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{ac_l}{2}\frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3}-\frac{\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}=0 \quad (1.5)$$

характер решений которого хорошо изучен [6]. Так, учитывая, что для большинства сред $2c_l^2>\tau$ (по данным [4]), находим, что профиль ударного фронта, описываемый стационарными решениями (1.5), имеет колебательную структуру, если $\mu<[2(2c_l^2-\tau)av_*]^{1/2}$, где v_* — скорость среды за ударным фронтом. Согласно оценкам, наблюдение солитонов в естественных материалах маловероятно ввиду их большой вязкости ($\eta\sim10$—10^4 Па·с). В средах, где $2c_l^2<\tau$, резкий фронт с осцилляторным характером будет иметь волна разгрузки.

Если диссипация энергии мала ($\mu=0$), то можно ожидать эффективного взаимодействия продольных и поперечных волн за счет нелинейности динамического члена σ_{ij}^d. С учетом только этого вида нелинейности уравнения второго приближения для волн, распространяющихся в одном направлении, записываются в виде (лагранжевые координаты):

$$u_x^{\cdot\cdot\prime\prime}=c_l^2\frac{\partial^2 u_x''}{\partial x^2}+a\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial t^2}\left[\frac{\partial u_x''}{\partial x}-\left(\frac{\partial u_x'}{\partial x}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_y'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z'}{\partial x}\right)^2\right\}\right]-b\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x^{\cdot\prime}}{\partial x}\right)^2 \quad (1.6)$$

$$u_y^{\cdot\cdot\prime}=c_t^2\partial^2 u_y'/\partial x^2,\quad u_z^{\cdot\cdot\prime}=c_t^2\partial^2 u_z'/\partial x^2$$

Если в первом приближении (величины со штрихами) присутствует только поперечная волна, т. е. $u_x'=u_z'=0$, $u_y'\neq0$, то при граничных условиях [5] $u_y'(0, t)=u_0(1-\cos\omega t)$, $u_x''(0, t)=0$ получаем следующее решение системы (1.6):

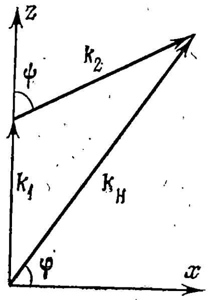
$$u_y'=u_0[1-\cos(\omega t-k_tx)],\quad k_t=\omega/c_t$$

$$u_x''=\frac{au_0^2k_l^2k_t^3}{k_t^2-k_l^2}\sin[(k_l-k_t)x]\cos[2\omega t-(k_t+k_l)x] \quad (1.7)$$

где $k_l=\omega[c_l^2-4a\omega^2]^{-1/2}$ — модуль волнового вектора второй гармоники. В отсутствие синхронизма решение (1.7) описывает пространственные биения, а в случае $k_l\sim k_t$, что соответствует частотам $\sim\omega_*=\frac{1}{2}[(c_l^2-c_t^2)/$

$/a]^{1/2}$, происходит усиление возникающей продольной волны, причем ее амплитуда при $\omega=\omega_*$ равна $u_0^2(c_l^2-c_t^2)^2x/(16c_t^4a)\sim xu_0^2/\delta^2$, т. е. увеличивается при уменьшении размера неоднородностей. Вообще будут заметны те гармоники, фазовые скорости которых близки к скорости возбуждающей волны, при условии, что их частоты не лежат в области резонансной частоты $\omega_0=c_l/(a)^{1/2}$, где существенны эффекты поглощения энергии.

Значительным ограничением проведенного анализа может оказаться учет затухания. Максимальное значение V амплитуды генерируемой волны достигается на расстояниях $x\sim\varkappa^{-1}$ (если $\varkappa\gg(k_l-k_t)$), где $\varkappa$ — коэффициент затухания. Используя для u_0 оценку $u_0^2\sim E/(\rho c_t\omega_*^2)$ (E — подаваемая мощность), получим для этих расстояний



$$V\sim u_0(c_l^2-c_t^2)^{3/2}[E/(\rho c_t)]^{1/2}/(8c_t^4\varkappa\delta)$$

При значениях параметров: $E=10^5$ Вт/м^2, $c_l=2c_t=2\cdot10^3$ м/с, $\rho=2\cdot10^3$ кг/м^3 находим, что $V/u_0\sim1{,}5\cdot10^{-4}(\varkappa\delta)^{-1}$, причем следует учесть, что, вообще говоря, $\varkappa=\varkappa(\omega_*(\delta))$.

2. Особенности взаимодействия неколлинеарных волн рассмотрим на примере параметрического усиления ультразвука. Пусть в среде распространяются две продольные волны: слабая — сигнальная и волна накачки, фазовые скорости которых близки к значению c_l, входящему в (1.2). При трехчастотном взаимодействии в среде образуется поперечная волна, причем условия фазового синхронизма волн имеют вид [7]:

$$\omega_1+\omega_2=\omega_3,\quad \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_3$$
$$k_1=\omega_1/c_l,\quad k_2=\omega_2/c_t,\quad k_3=\omega_3/c_l \tag{2.1}$$

Волновые вектора сигнала $\mathbf{k}_1$ волн разностной частоты $\mathbf{k}_2$ и накачки $\mathbf{k}_3$ изображены на фигуре, причем поперечная волна поляризована в плоскости zx. Решение ищем в виде суперпозиции трех волн

$$u_j=Z_j+Z_j^*,\ Z_j=P_j\exp[i(\omega_1t-k_1z)]+Q_j\exp[i(\omega_2t-\mathbf{k}_2r)]+U_j\exp[i(\omega_3t-\mathbf{k}_3r)]$$
$$P=P(0,0,1),\quad Q=Q(-\cos\psi,0,\sin\psi),\quad U=U(\cos\varphi,0,\sin\varphi) \tag{2.2}$$

где углы φ и ψ связаны условием (2.1). Если волны падают на полупространство $z>0$, то комплексные амплитуды P_j, Q_j будем считать медленно меняющимися функциями z. Учитывая также, что $|P_j|$, $|Q_j|\ll|U_j|$, полагаем $U_j=\text{const}$ [7]. Подстановка (2.2) в (1.2) с учетом нелинейности σ_{ij}^d, обусловленной релаксационными процессами, приводит к системе укороченных уравнений (лагранжевые координаты):

$$\alpha\left[D\frac{dQ^*}{dz}+i\beta_1k_1k_2\sin2(\psi-\varphi)\frac{Q^*}{2}\right]+k_1\left[\beta_1k_1P+2(\beta_1-1)i\frac{dP}{dz}\right]=0$$
$$ik_2FdQ/dz+\alpha H[ik_1k_2\cos(\varphi+\psi)P^*-LdP^*/dz]=0 \tag{2.3}$$
$$F=m^2[\sin\varphi+\cos\psi\sin(\varphi+\psi)]+(1-\beta_2m^2)\sin\psi\cos(\varphi+\psi)$$
$$H=\beta_2m^2(2-\cos^2\varphi)-\gamma_1,\quad L=k_1\cos\varphi-k_2\cos(\varphi+\psi)$$
$$D=\gamma_2k_1m\sin\psi-\beta_1[k_1\{\cos\varphi\sin(\varphi-\psi)+2\sin\psi\}+k_2\sin2(\psi-\varphi)/2]$$
$$m=c_t/c_l,\quad \alpha=k_3U,\quad \beta_1=ak_1^2,\quad \beta_2=ak_2^2$$
$$\gamma_1=2bk_1k_3,\quad \gamma_2=2bk_2k_3,\quad \zeta=k_2/k_1$$
$$\cos\psi=m-{}^1/_2\zeta(1-m^2),\quad \sin\varphi=1-{}^1/_2\zeta^2(1-m^2)/(1+m\zeta)$$

Исключая из (2.3) Q, получаем линейное уравнение

$$d^2P/dz^2-2iMdP/dz-NP=0 \tag{2.4}$$

характер решений которого зависит от параметра $R=N-M^2$, где

$$\begin{gathered}N=4\alpha^2\beta_1k_1^2k_2^2H\sin 2(\varphi-\psi)\cos(\varphi+\psi)/G\\ M=k_1k_2\{\alpha^2H[2D\cos(\varphi+\psi)+\beta_1L\sin 2(\psi-\varphi)]-2k_1\beta_1F\}/G\\ G=4[2k_1k_2F(1-\beta_1)-\alpha^2DHL]\end{gathered} \tag{2.5}$$

Так, для $R>0$ при граничных условиях $P(0)=P_0$, $Q(0)=0$ получаем решение, описывающее усиление волны

$$P=P_0\exp(iMz)[\operatorname{ch}(\sqrt{R}z)+(iM/\sqrt{R})\operatorname{sh}(\sqrt{R}z)] \tag{2.6}$$

Проанализируем условия, при которых возможно решение вида (2.6). Параметр $\alpha\sim U/\lambda_3\ll 1$, что касается параметров β_1, $\beta_2\sim\delta^2/\lambda^2$, то они ограничены значением $\leqslant 1$, поскольку для более коротких волн исходное уравнение (1.1) не применимо. В области $\beta_1\sim 1$, как видно из (2.5), параметр $R<0$, т. е. существенна дисперсия. Поэтому указанные условия следует искать, когда преобладает нелинейное слагаемое в σ_{ij}^d, т. е. $\gamma_1\sim 1$, $\beta_1\ll 1$. Последнее соотношение выполнимо, например, для пористой среды с несжимаемой матрицей [8], где по оценкам $\beta_1/\gamma_1\sim a/b\sim n\ll 1$ (n — коэффициент пористости). В этом случае, раскладывая R по малым параметрам α^2 и β_1, получаем, что усиление волны возможно в диапазоне $A_-<\alpha^2/\beta_1<A_+$, где

$$A_\pm=\frac{-k_1F}{\gamma_1^3k_2m^2\sin^2\psi\cos(\varphi+\psi)}\{\gamma_1m\sin\psi+ +4\sin 2(\varphi-\psi)\pm 2\sqrt{2\sin 2(\varphi-\psi)[\gamma_1m\sin\psi+2\sin 2(\varphi-\psi)]}\} \tag{2.7}$$

Это неравенство ввиду положительности α^2/β_1 справедливо, если $F/\cos(\varphi+\psi)<0$ и $\sin 2(\varphi-\psi)>0$. Условия усиления наиболее благоприятны, если нижний предел A_- мал. Так, например, при $m=0{,}65$ соответствующий подбор параметров (при $\gamma_1=1$) дает оптимальное значение $\zeta=0{,}49$, при котором $A_-\approx 5\cdot 10^{-4}$, $A_+\approx 3\cdot 10^{-2}$. Для пористой среды с $n=10^{-4}$ отсюда получаем, необходимые амплитуду $U\sim{}^1/_2\lambda(nA_-)^{1/2}/\pi$ и мощность накачки $E\sim nA_-\rho c_l^3\sim 8\cdot 10^5$ Вт/м^2. Характерный масштаб, на котором амплитуда увеличивается в e раз, $\sim R^{-1/2}\sim\lambda^3/\delta^2$. Множитель $\exp(iMz)$ в (2.6) приводит к слабым пространственным колебаниям, так как $M\sim\beta_1R^{1/2}\ll R^{1/2}$.

Таким образом, параметрическое усиление волны возможно, если параметры волн удовлетворяют условию (2.7), а размеры и концентрация включений малы. Проведенный анализ справедлив, если нелинейные члены, связанные с неравновесностью деформаций, много больше гидродинамической и физической нелинейности. Грубая оценка соответствующих членов в (1.2) показывает, что размер неоднородностей ограничен в этом случае снизу условием $\lambda^2\gg\delta^2\gg U\lambda$ ($\lambda\gg U$).

Покажем, что в обратном пределе ($\delta^2\ll U\lambda$) релаксационные процессы препятствуют усилению и приводят к пространственным биениям. В этом диапазоне слагаемое σ_{ij}^d мало и в производных от плотности достаточно учесть линейные слагаемые. Рассмотрим по-прежнему продольные волны сигнала и накачки (фигура), связанные условием синхронизма (2.1), в средах, где гидродинамическая нелинейность играет основную роль (слабосвязанные и неплотные вещества, спресованные порошки и т. п.). Подстановка (2.2) в (1.2) при $f_i=0$ приводит к системе укороченных уравнений

$$\alpha(k_2d-k_3p)\frac{dQ^*}{dz}+i\alpha k_2(k_2s-k_3r)Q^*+k_1\cos\varphi\left[2i(1-\beta_1)\frac{dP}{dz}-k_1\beta_1P\right]=0$$

$$k_2F\frac{dQ^*}{dz}+\alpha^*k_1(k_1g-k_3h)P+i\alpha^*(k_1l-k_3h)\frac{dP}{dz}=0 \tag{2.8}$$

$$g=\sin 2\varphi-\cos\varphi+\gamma_2\cos(\varphi+\psi),\quad h=\sin\varphi\cos\varphi$$

$$l=\sin 2\varphi+\gamma_2\cos(\varphi+\psi)-\gamma_1\cos\varphi,\quad p=\sin\varphi\sin(\varphi+\psi)$$

$$d=m[2\sin\varphi\sin(\varphi+\psi)+\gamma_1\cos\varphi\sin\psi],\quad r=\sin^2(\varphi+\psi)$$

$$s=m\sin(\varphi+\psi)[2\sin(\varphi+\psi)-m]$$

которая сводится к уравнению вида (2.4) с параметрами (F определено в (2.3)):

$$N=2\alpha^2k_1(k_2s-k_3r)(k_1g-k_3r)/w,\quad w=4Fk_2\cos\varphi(1-\beta_1)$$

$$M=\frac{1}{w}\left\{\frac{\alpha}{k_1^2}[(k_2s-k_3r)(k_1l-k_3h)k_2-(k_1g-k_3h)(k_2d-k_3p)k_1]-\beta_1k_2F\cos\varphi\right\} \tag{2.9}$$

Из (2.9) видно, что решение типа (2.6) при $R=N-M^2>0$ можно получить, если $\alpha\gg\beta_1$ или $(\delta/\lambda_1)^2\ll U/\lambda_3$. Аналогичный результат ($\alpha\gg\beta_2$) получается при взаимодействии с накачкой поперечного сигнала, поляризованного в плоскости zx (при поляризации разностной волны и сигнала вдоль оси y дисперсионные свойства среды, как следует из (1.2), не отражаются на закономерностях распространения волн). Анализ уравнений (1.2) с учетом другого вида нелинейности ($f_i\neq0$), связанного с нелинейностью деформаций и закона Гука показывает, что определяющий параметр нелинейности по-прежнему равен $\alpha=k_3U$, в то время как дисперсия характеризуется величинами β_1 и $\beta_2\sim\delta^2k^2$.

Простые оценки ($k_3\sim k_1$) показывают, что для усиления сигнала в этом случае необходимо выполнение условия $\delta\ll\nu_3^{-1}(Ec/\rho)^{1/4}$. Так, при $E=10^5$ Вт/м^2, $\nu_3=100$ МГц [7] и параметрах среды: $c=(1-10)\cdot10^3$ м/с, $\rho=(1-10)\cdot10^3$ кг/м^3 получаем, что $\delta\ll10^{-7}$ м. Таким образом, диапазон частот, в котором возможно усиление сигнала (при заданной мощности накачки) за счет гидродинамической нелинейности и нелинейности матрицы, ограничен сверху величиной, обратно пропорциональной размеру неоднородностей.

Проведенный анализ показал, что в случае $\lambda^2\gg\delta^2\gg U\lambda$ основную роль играют нелинейные эффекты, обусловленные релаксационным характером установления равновесия среды и включений. При амплитуде накачки $U\sim{}^1/_2\lambda(nA_-)^{1/2}/\pi$ и условии (2.7) возможно параметрическое усиление сигнала. При малых отклонениях от равновесия возмущения скорости нелинейной продольной волны описываются уравнением Бюргерса — Кортевега — де Вриза. Показаны также возможности генерации продольных гармоник при совпадении их фазовых скоростей со скоростью возбуждающей поперечной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goodman M. A., Cowin S. C.* A continuum theory for granular materials.— Arch. Rat. Mech. Analysis, 1972, v. 44, No. 4, p. 249—266.
2. *Nunziato J. W., Walsh E. K.* Small-amplitude wave behavior in one-dimensional granular solids.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1977, v. E44, No. 4, p. 559—564.
3. *Дунин С. З., Сурков В. В.* Нелинейные упругие волны в многокомпонентных средах.— Акуст. ж., 1980, т. 26, № 5, с. 700—707.
4. *Садовский М. А., Николаев А. В.* Новые методы сейсмической разведки. Перспективы развития.— Вестн. АН СССР, 1982, № 1, с. 57—64.
5. *Зарембо Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 519 с.
6. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
7. *Заболотская Е. А., Солуян С. И., Хохлов Р. В.* Параметрический усилитель ультразвука.— Акуст. ж., 1966, т. 12, № 2, с. 188—191.
8. *Дунин С. З., Сурков В. В.* Динамика закрытия пор во фронте ударной волны.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 511—518.

Москва

Поступила в редакцию 20.IV.1983