

УДК 539.374

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ДЛЯ ОДНОГО ВАРИАНТА
ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

ИСАЕВ Ф. К., МОСКВИТИН В. В.

В работах, посвященных устойчивости упругопластических систем, большей частью используются теория малых упругопластических деформаций и теория течения [1-6].

В опубликованной работе дается постановка задачи устойчивости в случае обобщенного плоского напряженного состояния с использованием одного варианта соотношений теории упругопластических процессов [7-9]. Приводятся решения задач об устойчивости пластины и сжато-скрученной трубки.

1. Рассмотрим обобщенное плоское напряженное состояние оболочки, характеризуемое компонентами тензора напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} и тензора деформаций ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} , ε_{12} ; оси X_1 и X_2 расположены в срединной поверхности оболочки; ось $X_3 \equiv Z$ направлена по нормали к срединной поверхности. В срединной плоскости действуют усилия T_{11} , T_{22} , T_{12} . Материал считается несжимаемым.

Предположим, что в каждой точке области активного нагружения элемента имеют место траектории деформации малой кривизны. Воспользуемся следующими соотношениями [9]:

$$\sigma_{ij} = \sigma \left[f \frac{d}{ds} (\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \varepsilon_{hh}) + \frac{(1-f)}{l} (\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \varepsilon_{hh}) \right] \quad (i, j, h=1, 2) \quad (1.1)$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{3} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2), \quad l^2 = 2 (\varepsilon_{11}^2 \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{12}^2)$$

$$s = \sqrt{2} \int_0^l (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{12}^2) dt \quad (1.2)$$

где s — длина дуги траектории деформации.

В предельных случаях имеем: $f=0$ и $\sigma = \sigma(l)$, то из (1.1) следует соотношение теории малых упругопластических деформаций; если $f=1$, то $\sigma = \sigma(s)$ — физические соотношения для траектории малой кривизны.

На границе области упругих и пластических деформаций $l=l^s = \text{const}$. За условие нагружения принимается $\delta l > 0$, на границе зон догружения и разгрузки принимается $\delta l = 0$.

Воспользуемся гипотезой Киргофа — Лява $\delta \varepsilon_{ij} = e_{ij} + Z \kappa_{ij}$, где e_{ij} и κ_{ij} — малые вариации соответственно деформаций, кривизны и кручения срединной поверхности оболочки.

Варируя формулы (1.1) для вариации напряжений, получим

$$\delta \sigma_{ij} = \sigma (1-f) [e_{ij} + \delta_{ij} e_{hh} + z(\kappa_{ij} + \delta_{ij} \kappa_{hh})] / l + F_{ij} [\Pi(\varepsilon, e) + z \Pi(\varepsilon, \kappa)] \quad (1.3)$$

$$\Pi(\varepsilon, e) \equiv (\varepsilon_{mn} + \delta_{mn} \varepsilon_{hh}) e_{mn}, \quad \Pi(\varepsilon, \kappa) \equiv (\varepsilon_{mn} + \delta_{mn} \varepsilon_{hh}) \kappa_{mn} \quad (1.4)$$

В формулах (1.3) через F_{ij} обозначен оператор¹

$$F_{ij} = \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{\sigma}{l} (1-f) \right] (\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \varepsilon_{hk}) + \frac{d}{ds} (\sigma f) \frac{d}{ds} (\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \varepsilon_{hk}) + \sigma f \frac{d^2}{ds^2} (\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \varepsilon_{hk}) \right\} \frac{1}{dl/ds} \quad (1.5)$$

В области упругой разгрузки соответствующие зависимости имеют вид

$$\delta \sigma_{ij} = 2G [e_{ij} + \delta_{ij} e_{hk} + z (\kappa_{ij} + \delta_{ij} \kappa_{hk})] \quad (1.6)$$

С учетом выражения для $\delta \sigma_{ij}$ вариации усилий и моментов вычисляются по формулам

$$\delta T_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_{ij} dz, \quad \delta M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_{ij} z dz \quad (1.7)$$

Следуя [1], введем вспомогательные величины $\delta R_{ij} = 1/2 (\delta T_{ij} - \delta_{ij} \delta T_{hk})$, $\delta m_{ij} = 1/2 (\delta M_{ij} - \delta_{ij} \delta M_{hk})$ или, учитывая (1.3), (1.6), (1.7):

$$\delta R_{ij}^* = \delta R_{ij} / (3Gh) = \alpha e_{ij} - \beta \kappa_{ij}^* + \Omega_{ij}^{(0)} \quad (1.8)$$

$$\delta m_{ij}^* = \delta m_{ij} / (9D) = \beta e_{ij} / h + \gamma \kappa_{ij} - \Omega_{ij}^{(4)} / h \quad (1.9)$$

$$\alpha = z_0^* + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\sigma^*}{l} (1-f) \left(\frac{1}{2} - z_0^* \right), \quad \beta = \frac{1}{2} \left[z_0^{*2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{\sigma^*}{l} (1-f) \left(\frac{1}{4} - z_0^{*2} \right) \right]$$

$$\gamma = \frac{1}{3} \left[z_0^{*3} + \frac{1}{8} + \frac{3}{2} \frac{\sigma^*}{l} (1-f) \left(\frac{1}{8} - z_0^{*3} \right) \right], \quad D = \frac{Gh^3}{3} \quad (1.10)$$

$$\Omega_{ij}^{(N)} = \int_{\xi_p} F_{ij}^* [\Pi(\varepsilon, e) + z^* \Pi(\varepsilon, \kappa^*)] z^{*N} dz^* \quad (N=0,1)$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{3G}, \quad F_{ij}^* = \frac{F_{ij}}{3G}, \quad z_0^* = \frac{z_0}{h}, \quad \kappa_{ij}^* = \kappa_{ij} h, \quad z_0 = \frac{-\Pi(\varepsilon, e)}{\Pi(\varepsilon, \kappa)}$$

где ξ_p — область пластических деформаций оболочки, z_0 — граница зон разгрузки и догрузки ($\delta l(z_0) = 0$).

Для постановки задач устойчивости следует, как обычно, к выписанным соотношениям присоединить три уравнения равновесия, одно условие совместной деформаций

$$\partial^2 e_{11} / \partial x_2^2 + \partial^2 e_{22} / \partial x_1^2 = 2\partial^2 e_{12} / \partial x_1 \partial x_2 \quad (1.11)$$

и соответствующие граничные условия.

Учитывая (1.8), уравнение (1.11) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \right) - \frac{\beta}{\alpha} h \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\alpha} \Omega_{11}^{(0)} \right] +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\beta}{\alpha} h \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} - \frac{1}{\alpha} \Omega_{22}^{(0)} \right] =$$

$$= - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[\frac{3}{\alpha} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\beta}{\alpha} h \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{2}{\alpha} \Omega_{12}^{(0)} \right] \quad (1.12)$$

¹ В дальнейшем рассматриваются лишь случаи траекторий малой докритической кривизны, в связи с чем последним членом в фигурной скобке можно пренебречь.

где функция напряжений Φ введена соотношениями

$$\delta T_{11} = 3Gh\delta^2\Phi/\partial x_2^2, \quad \delta T_{22} = 3Gh\delta^2\Phi/\partial x_1^2, \quad \delta T_{12} = -3Gh\delta^2\Phi/\partial x_1\partial x_2 \quad (1.13)$$

и использовано, что $\kappa_{ij} = \partial W/\partial x_i\partial x_j$.

Уравнение равновесия элемента

$$\delta M_{ij,ij} + T_{ij}\kappa_{ij} = 0 \quad (1.14)$$

вместе с соотношениями (1.9), (1.13) приводится к уравнению относительно прогиба

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[\gamma \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[\gamma \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\gamma \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \frac{1}{h} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{3}{4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \beta h \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \Omega_{11}^{(0)} \right] + \Omega_{11}^{(1)} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{3}{4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \beta h \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \right) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \Omega_{22}^{(0)} \right] + \Omega_{22}^{(1)} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left\{ \frac{\beta}{2\alpha} \left[-3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} - \beta h \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\Omega_{12}^{(0)} \right] + \Omega_{12}^{(1)} \right\} \right] + \\ & + \frac{1}{12D} \left(T_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + T_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + 2T_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Таким образом получены основные уравнения устойчивости в виде (1.12) и (1.15).

Приведенные уравнения для определения критических значений параметров являются достаточно сложными, поэтому далее будут рассмотрены некоторые частные случаи.

2. Будем исследовать устойчивость в рамках концепции продолжающегося нагружения [3]. В этом случае отсутствуют зоны разгрузки и область активного нагружения ξ_p распространяется по всей толщине оболочки. При этом из (1.9), (1.10) следует

$$\delta m_{ij}^* = {}^1/{}_8 \sigma^* (1-f) \kappa_{ij} / l + {}^1/{}_{12} F_{ij} \Pi(\varepsilon, \kappa) \quad (2.1)$$

Как видно из (2.1), уравнения (1.11) и (1.14) в рассматриваемом случае распадаются на два самостоятельных уравнения для определения функции напряжения Φ и уравнения для определения прогиба W . Уравнение для прогиба W имеет вид

$$\frac{\sigma^*}{l} (1-f) W_{,ijij} + \frac{1}{3} [\Pi(\varepsilon, \kappa) (F_{ij}^* + \delta_{ij} F_{hk}^*)]_{,ij} + \frac{2}{3D} T_{ij} W_{,ij} = 0 \quad (2.2)$$

3. Рассмотрим далее устойчивость состояния (постановка А. А. Ильюшина [4]). Предполагается, что вариации усилий равны нулю ($\delta T_{ij} = 0$), тогда $\delta R_{11} = \delta R_{22} = \delta R_{12} = 0$.

При этом условии приведенные соотношения (п. 1) значительно упрощаются. Уравнения для определения границы зон разгрузки и догрузки z_0 получим умножив соотношения (1.8) соответственно на $(\varepsilon_{11} + {}^1/{}_2 \varepsilon_{22})$, $(\varepsilon_{22} + {}^1/{}_2 \varepsilon_{11})$, ε_{12} . После суммирования находим

$$\alpha z_0^* - ({}^1/{}_2 - z_0^*)^2 [(\varepsilon_{11} + {}^1/{}_2 \varepsilon_{22}) F_{11}^* + (\varepsilon_{22} + {}^1/{}_2 \varepsilon_{11}) F_{22}^* + \varepsilon_{12} F_{12}^*] / l - \beta = 0 \quad (3.1)$$

Определим ε_{ij} из системы (1.8) и внесем в (1.9)

$$\delta m_{ij} / (9D) = (\gamma - \beta^2 / \alpha) \kappa_{ij} - \beta \Omega_{ij}^{(0)} / (\alpha h) + \Omega_{ij}^{(1)} / h \quad (3.2)$$

С учетом (3.2) для вариации моментов имеем

$$\frac{\delta M_{ij}}{3D} = 2 \left\{ \left(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha} \right) (\kappa_{ij} + \delta_{ij} \kappa_{hh}) - \frac{\beta}{\alpha h} [\Omega_{ij}^{(0)} + \delta_{ij} \Omega_{hh}^{(0)}] + \frac{1}{h} [\Omega_{ij}^{(1)} + \delta_{ij} \Omega_{hh}^{(1)}] \right\} \quad (3.3)$$

С учетом (3.3) уравнение устойчивости (1.15) приводится к виду

$$2 \left(\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha} \right) W_{,ijj} - \frac{\beta}{\alpha h} [\Omega_{ij}^{(0)} + \delta_{ij} \Omega_{hh}^{(0)}]_{,ij} + \frac{1}{h} [\Omega_{ij}^{(1)} + \delta_{ij} \Omega_{hh}^{(1)}]_{,ij} + \frac{1}{6D} T_{ij} W_{,ij} = 0 \quad (3.4)$$

Заметим, что при $f=0$ и $\sigma=\sigma(l)$ уравнения (1.12), (1.15), (2.2), (3.4) совпадают с известными уравнениями, полученными на основе теории малых упругопластических деформаций [1, 2].

4. Рассмотрим двухстороннее сжатие пластин. Допустим, что шарнирно-закрепленная по краям пластинка сжата усилиями σ_1 и σ_2 , равномерно распределенными вдоль соответствующих сторон. Эффектом разгрузки пренебрегаем. Уравнения (2.3) для рассматриваемого случая преобразуются:

$$A_{11}^* \frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} + A_{12}^* \frac{\partial^4 W}{\partial x_2^4} + A_{13}^* \frac{\partial^4 W}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{2h}{3D} \left(\sigma_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \sigma_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (4.1)$$

$$A_{11}^* = \frac{\sigma^*}{l} (1-f) + \frac{2}{3} F_{11}^* \frac{\varepsilon_{11} + 1/2 \varepsilon_{22}}{l}, \quad A_{12}^* = \frac{\sigma^*}{l} (1-f) + \frac{2}{3} F_{22}^* \frac{\varepsilon_{22} + 1/2 \varepsilon_{11}}{l}$$

$$A_{13}^* = 2 \frac{\sigma^*}{l} (1-f) + \frac{2}{3} F_{11}^* \frac{\varepsilon_{22} + 1/2 \varepsilon_{11}}{l} + \frac{2}{3} F_{22}^* \frac{\varepsilon_{11} + 1/2 \varepsilon_{22}}{l}$$

Решение уравнения (4.1) ищем в виде $W = W_{mn} \sin(m\pi x_1/a) \sin(n\pi x_2/b)$. При этом из (4.1) получим

$$A_{11}^* \left(\frac{m}{a} \right)^4 + A_{13}^* \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + A_{12}^* \left(\frac{n}{b} \right)^4 = \frac{2h}{3D\pi^2} \left[\sigma_1 \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \sigma_2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]$$

Значение критических напряжений определяется из следующего нелинейного уравнения:

$$\sigma_1 = \sigma_1^y K(\sigma_1), \quad \sigma_1^y = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \frac{[(m/\alpha)^2 + n^2]^2}{(m/\alpha)^2 + \varphi n^2} \quad (4.2)$$

$$K(\sigma_1) = \frac{3 A_{11}^* (m/\alpha)^4 + A_{13}^* m^2 n^2 / \alpha^2 + A_{12}^* n^4}{2 [(m/\alpha)^2 + n^2]^2}, \quad \alpha = \frac{a}{b}, \quad \varphi = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

где σ_1^y — критическое напряжение в случае линейно-упругого материала [2]. При $f=0$ и $\sigma=2Gl$ имеем $K=1$.

Для численной реализации функция f принималась в виде

$$f(s) = 1 - \exp[-\mu(s/s_T - 1)] \quad \mu = \text{const} > 0, \quad s_T \approx l^s$$

Результаты расчета в случае линейного упрочнения $[\sigma = \lambda \sigma^2 + 2G(1-\lambda)s]$ при $\eta = b/h = 20$ ($\alpha=1$) и различных значениях параметров λ и μ представлены на фиг. 1.

Здесь штрихпунктирная линия соответствует чисто упругой задаче, штриховые кривые получены с использованием теории малых упругопластических деформаций.

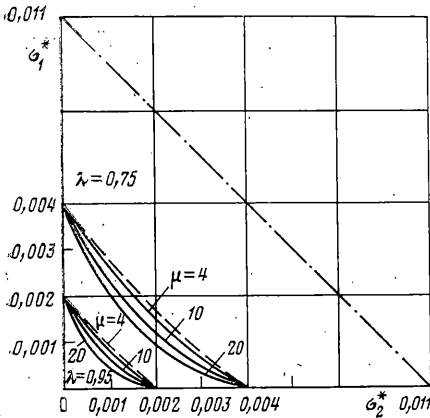
5. Рассмотрим равновесие сжато-скрученной трубки за пределом упругости. При некотором значении крутящего момента (M^*) и сжимающей силы (P^*) тонкостенная трубка теряет устойчивость; ось трубки образует при этом пространственную кривую.

Ставится задача определения в постановке Кармана ($\delta P=0$, $\delta M=0$) критического момента и критической нагрузки, соответствующих точке

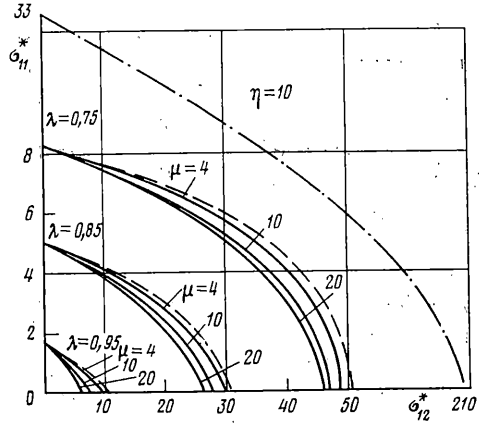
бифуркации форм равновесия сжато-скрученной трубки. Разгрузка не учитывается. Систему координат выбираем следующим образом: ось X_1 совпадает с осью трубки, оси X_2 и X_3 поместим в поперечном сечении трубки.

Как известно [2], уравнение возмущенного состояния имеет вид

$$\begin{aligned} \delta P = \int_F \delta \sigma_{11} dF = 0, \quad \delta M = \int_F r \delta \sigma_{12} dF = 0 \quad (5.1) \\ \delta M_{X_2} + M u' - P v = 0, \quad \delta M_{X_3} + M v' - P u = 0 \\ \delta M_{X_2} = \int_F X_3 \delta \sigma_{11} dF, \quad \delta M_{X_3} = - \int_F X_2 \delta \sigma_{11} dF \end{aligned}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где u и v — перемещения в направлениях X_2 и X_3 , $u' = \partial u / \partial x_1$, $v' = \partial v / \partial x_1$. Уравнения состояния (1.1) для рассматриваемого случая запишутся так:

$$\sigma_{11} = \frac{3}{2} \sigma(s) \left[f \frac{d\varepsilon_{11}}{ds} + (1-f) \frac{\varepsilon_{11}}{l} \right], \quad \sigma_{12} = \sigma(s) \left[f \frac{d\varepsilon_{12}}{ds} + (1-f) \frac{\varepsilon_{12}}{l} \right] \quad (5.2)$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{3} \sigma_{11}^2 + 2 \sigma_{12}^2, \quad l^2 = \frac{3}{2} \varepsilon_{11}^2 + 2 \varepsilon_{12}^2$$

Варьируя (5.2), имеем

$$\delta \sigma_{11} = A_{11} \delta \varepsilon_{11} + A_{12} \delta \varepsilon_{12}, \quad \delta \sigma_{12} = A_{21} \delta \varepsilon_{11} + A_{22} \delta \varepsilon_{12} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} A_{11} = \frac{3}{2} \left\{ \left[\frac{\partial \sigma}{\partial s} \left[f \frac{d\varepsilon_{11}}{ds} + (1-f) \frac{\varepsilon_{11}}{l} \right] \right] \frac{1}{\partial l / \partial s} - \frac{\sigma}{l} (1-f) \frac{\varepsilon_{11}}{l} + \right. \\ \left. + \frac{\sigma}{\partial l / \partial s} \left[\left(\frac{d\varepsilon_{11}}{ds} - \frac{\varepsilon_{11}}{l} \right) F_1(s) + f \frac{d^2 \varepsilon_{11}}{ds^2} \right] \right\} \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{11}}{l} + \frac{\sigma}{l} (1-f) \left. \right] \\ A_{12} = \frac{3}{2} \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial s} \left[f \frac{d\varepsilon_{11}}{ds} + (1-f) \frac{\varepsilon_{11}}{l} \right] \frac{1}{\partial l / \partial s} - \frac{\sigma}{l} (1-f) \frac{\varepsilon_{11}}{l} + \right. \\ \left. + \frac{\sigma}{\partial l / \partial s} \left[\left(\frac{d\varepsilon_{11}}{ds} - \frac{\varepsilon_{11}}{l} \right) F_1(s) + f \frac{d^2 \varepsilon_{11}}{ds^2} \right] \right\} 2 \frac{\varepsilon_{12}}{l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{21} &= \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial s} \left[f \frac{d\varepsilon_{12}}{ds} + (1-f) \frac{\varepsilon_{12}}{l} \right] \frac{1}{\partial l / \partial s} - \frac{\sigma}{l} (1-f) \frac{\varepsilon_{12}}{l} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma}{\partial l / \partial s} \left[\left(\frac{d\varepsilon_{12}}{ds} - \frac{\varepsilon_{12}}{l} \right) F_1(s) + f \frac{d^2 \varepsilon_{12}}{ds^2} \right] \right\} \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{11}}{l} \\
A_{22} &= \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial s} \left[f \frac{d\varepsilon_{12}}{ds} + (1-f) \frac{\varepsilon_{12}}{l} \right] \frac{1}{\partial l / \partial s} - \frac{\sigma}{l} (1-f) \frac{\varepsilon_{12}}{l} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma}{\partial l / \partial s} \left[\left(\frac{d\varepsilon_{12}}{ds} - \frac{\varepsilon_{12}}{l} \right) F_1(s) + f \frac{d^2 \varepsilon_{12}}{ds^2} \right] \right\} 2 \frac{\varepsilon_{12}}{l} + \frac{\sigma}{l} (1-f) \\
&\quad F_1(s) = (\mu/s_T) \exp[-\mu(s/s_T - 1)] \tag{5.4}
\end{aligned}$$

С учетом известной гипотезы теории тонкостенных стержней получа- ем систему уравнений относительно u и v :

$$A_{11} I \frac{d^2 v}{dx_1^2} - M \frac{du}{dx_1} - Pv = 0, \quad A_{11} I \frac{d^2 u}{dx_1^2} + M \frac{dv}{dx_1} - Pu = 0 \tag{5.5}$$

где $I = \pi R^3 t$ — момент инерции трубки, R — радиус, t — толщина стенки. Решая систему (5.8) и удовлетворяя граничным условиям шарнирного закрепления, для определения критических значений параметров будем иметь следующее нелинейное уравнение (A_{11} определяется по форму- ле (5.4)):

$$(\pi/l)^2 = (M/(2A_{11}I))^2 + P/(A_{11}I) \tag{5.6}$$

Отметим, что при $f=0$ и $\sigma = \sigma(l)$ из формулы (5.6) следует зависимость в случае теории малых упругопластических деформаций. При этом для линейно-упрочняющегося материала $\sigma = \lambda \sigma^s + 2G(1-\lambda)l$ уравнение (5.6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{\eta^2} &= \sigma_{12}^{*2} \varepsilon_s^2 \frac{(\sqrt{\sigma_{11}^{*2} + 3\sigma_{12}^{*2}} - \lambda)^2}{(1-\lambda)^2 [V \sigma_{11}^{*2} + 3\sigma_{12}^{*2} - \lambda \sigma_{11}^{*2} / (\sigma_{11}^{*2} + 3\sigma_{12}^{*2})]^2} + \\
&\quad + 2\sigma_{11}^* \varepsilon_s \frac{V \sigma_{11}^{*2} + 3\sigma_{12}^{*2} - \lambda}{(1-\lambda) [V \sigma_{11}^{*2} + 3\sigma_{12}^{*2} - \lambda \sigma_{11}^{*2} / (\sigma_{11}^{*2} + 3\sigma_{12}^{*2})]} \tag{5.7} \\
\sigma_{11} &= \frac{P}{2\pi R t}, \quad \sigma_{12} = \frac{M}{2\pi R^2 t}, \quad \sigma_{11}^* = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_s}, \quad \sigma_{12}^* = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_s} \\
\eta &= \frac{l}{R}, \quad \sigma_s = \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma^s, \quad \varepsilon_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma^s}{2G}
\end{aligned}$$

В случае $\sigma_{11}^* = 0$ (чистое кручение) из (5.7) находим критическое ка- сательное напряжение [10]: $\sigma_{12}^* = 1/\sqrt{3\lambda + (1-\lambda)\pi/(\varepsilon_s \eta)}$.

При разных значениях параметров λ , μ произведен расчет, его резуль- таты представлены на фиг. 2.

Здесь штрихпунктирная линия соответствует упругой задаче, штрихо- вые кривые построены на основе теории малых упругопластических де- формаций. Остальные кривые построены с использованием уравнения (5.9) при различных значениях параметра μ .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. *Клюшников В. Д.* Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
4. *Клюшников В. Д.* Неустойчивость пластических конструкций (Обзор).— В кн.: Проблемы теории пластичности. М.: Мир, 1976, с. 148—177.
5. *Зубчанинов В. Г.* Об устойчивости пластин за пределом упругости.— Упругость и неупругость: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1971, вып. 2, с. 145—157.
6. *Зубчанинов В. Г.* О современных проблемах неупругой устойчивости.— В кн.: Устойчивость в механике деформируемого твердого тела. Матер. всес. симпозиума. Калинин: Изд-е Калинин. ун-та, 1981, с. 12—60.
7. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
8. *Ленский В. С.* Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах.— Упругость и неупругость: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1978, вып. 5, с. 65—96.
9. *Москвитин В. В.* Циклические нагружения элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с.
10. *Исаев Ф. К.* Об устойчивости тонкостенной трубки за пределом упругости при кручении.— Изв. АН Аз. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. н., 1981, № 2, с. 42—46.

Баку, Москва

Поступила в редакцию
27.XII.1982