МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1984

УДК 539.3

О ПОСТРОЕНИИ ЭФФЕКТИВНОГО ВОЛНОВОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ СРЕДЫ С ИЗОЛИРОВАННЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

КАНАУЛ С. К., ЛЕВИН В. М.

Рассматривается задача о распространении упругих волн в композитных материалах, состоящих из однородной матрицы и случайного множества включений эллипсоидальной формы. Материалы матрицы и включений считаются анизотропными. При помощи метода эффективного поля [1], позволяющего учесть взаимодействие включений, получено осредненное уравнение движения такой среды (эффективный волновой оператор) в длинноволновом приближении. Показано, что этот оператор описывает распространение волн в некоторой однородной среде, обладающей пространственной и временной дисперсией. Построен и исследован тензор Грина эффективного волнового оператора, найдены выражения для скоростей распространения и коэффициентов затухания упругих волн в композитных материалах.

Различные вопросы, связанные с распространением волн в средах с включениями, рассматривались в целом ряде работ (например, [2–5]). Как правило, в них вычислялись эффективные скорости распространения и коэффициенты затухания. В публикуемой работе в рамках единой схемы дано описание как нелокальных свойств композитной среды, так и эффектов затухания упругих волн вследствие рассеивания на неоднородностях.

1. Рассеяние на одном включении. Пусть в неограниченной упругой среде с тензором упругих модулей C и плотностью ρ имеется область V с упругими характеристиками $C+C_1$ и плотностью $\rho+\rho_1$. Если среда с неоднородностью совершает гармонические колебания с частотой ω, то амплитуда вектора смещения $u_i(x)$ в произвольной точке $x(x_1, x_2, x_3)$ среды удовлетворяет интегродифференциальному уравнению [6]:

$$u_i(x)=u_i^\circ(x)+C^1_{kjlm}\int\limits_V g_{ik,j}(x-x')\,u_{l,m}(x')\,dx'+\rho_1\omega^2\int\limits_V g_{ik}(x-x')\,u_k(x')\,dx' \qquad (1.1)$$

Здесь $u_i^\circ(x)$ — «падающее» поле, которое существовало бы в однородной среде со свойствами C, ρ при заданных условиях на бесконечности, $g_{ik}(x)$ — тензор Грина для этой среды, являющийся решением уравнения

$$L_{ik}g_{kj}(x)=-\delta(x)\delta_{ij},\quad L_{ik}\equiv\partial_j C_{ijkl}\partial_l+\rho\omega^2\delta_{ik} \qquad (1.2)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. При произвольной анизотропии среды этот тензор можно представить в виде следующего ряда [5]:

$$g(x)=g_0(x)+\frac{1}{|x|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(i\omega|x|)^k}{(k-1)!}g_k(n) \qquad (1.3)$$

$$g_0(x)=\frac{1}{4\pi^2|x|}\int\limits_{|\xi|=1}L^{-1}(\xi)\delta(n\xi)\,dS_\xi,\quad n=\frac{x}{|x|} \qquad (1.4)$$

$$g_k(x)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{|\xi|=1} L^{-\frac{1}{2}(k+2)}(\xi)\,|n\xi|^{k-1}dS_\xi \qquad L_{ik}(\xi)=-C_{ijkl}\xi_j\xi_l+\rho\omega^2\delta_{ik}$$

где ξ_i — вектор на единичной сфере S.

Соотношение (1.1) позволяет найти амплитуду рассеянного поля и вычислить потерю мощности падающей волны (полное сечение рассеяния) [6], если известна функция $u_i(x)$ внутри включения, которая является решением уравнения (1.1) при $x\in V$. Если длина падающей волны существенно превышает характерные геометрические размеры включения, то это уравнение может быть решено приближенно заменой ряда (1.3) конечным числом его членов. В частности, можно ограничиться лишь «статической» частью $g_0(x)$ полного динамического тензора Грина $g(x)$ (квазистатическое приближение [7]). Однако при этом величина полного сечения рассеяния при определении ее с помощью оптической теоремы [6, 8] оказывается равной нулю. Как показано в [9], для правильного описания эффектов рассеяния в неоднородной среде в представлении тензора Грина (1.3) следует сохранить первые члены разложения $\operatorname{Im} g(x)$ в ряд по ω. Поэтому здесь при решении уравнения (1.1) в длинноволновом приближении тензор Грина $g(x)$ будет аппроксимирован выражением

$$g(x,\omega)=g_0(x)+i\omega g_1-i\omega^3x^2g_3(n) \tag{1.5}$$

Разложим падающее поле $u_i^\circ(x)$ в ряд Тэйлора в окрестности центра тяжести включения и ограничимся двумя членами в этом разложении. Поместив начало координат в указанную точку, получим

$$u_i^\circ(x)=u_i^\circ(0)+\overset{\circ}{u}_{i,j}(0)x_j \quad (x\in V) \tag{1.6}$$

Будем считать, что область V — эллипсоид с полуосями a_i $(i=1,2,3)$. Как известно [10], при $g(x)=g_0(x)$ поле смещений внутри V для внешнего поля (1.6) является линейным. Если же в уравнении (1.1) тензор Грина $g(x)$ имеет вид (1.5), то с принятой точностью его решение в области V и в этом случае останется линейным, т. е.

$$u_i(x)=\alpha_i+\beta_{ij}x_j \quad (x\in V) \tag{1.7}$$

Подставляя (1.6) и (1.7) в уравнение (1.1), найдем, что коэффициенты α_i и β_{ij} выражаются через коэффициенты разложения (1.6) следующим образом:

$$\alpha_i=\lambda_{ik}(\omega,a)u_k^\circ(0),\qquad \beta_{ij}=\Lambda_{ijkl}(\omega,a)\overset{\circ}{u}_{k,l}(0) \tag{1.8}$$

$$\lambda_{ik}(\omega,a)=\delta_{ik}+i\omega^3\rho_1vg_{ik}^1,\qquad \Lambda(\omega,a)=A(a)\,(I-i\omega^3vHC_1A(a))$$

$$A(a)=(I+P(a)C_1)^{-1},\qquad P_{ijkl}(a)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S K_{ijkl}(a^{-1}k)\,dS$$

$$K_{ijkl}=k_{(i}\overset{\circ}{g}_{j)(k}(k)k_{l)},\qquad H_{ijkl}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \xi_{(j}L^{-5/2}_{i)(k}(\xi)\xi_{l)}\,dS$$

Здесь $g_{ik}^\circ(k)$ — фурье-образ статической части тензора Грина $g_{ik}^\circ(x)$, a^{-1} — линейное преобразование, переводящее эллипсоид в единичный шар, $I_{ijkl}=\delta_{i(k}\delta_{l)j}$, v — объем эллипсоида. Заметим, что при выводе этих формул, так же как и в (1.5), отбрасывались члены порядка ω^2 в вещественных частях и порядка ω^5 — в мнимых.

Если материалы среды и включения изотропны, а область V имеет форму шара, то явные выражения для величин, входящих в (1.8), принимают вид

$$g_{ik}^1=g_1\delta_{ik},\quad g_1=(2+\eta^3)/12\pi\rho v_T^3$$

$$P_{ijkl}=P_1\delta_{ij}\delta_{kl}+P_2\left(I_{ijkl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)$$

$$H_{ijkl}=H_1\delta_{ij}\delta_{kl}+H_2\left(I_{ijkl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)$$

$$P_1=\frac{3-4\eta^2}{9K},\quad P_2=\frac{3+2\eta^2}{15\mu},\quad K=\lambda+\frac{2}{3}\mu,\quad H_1=\frac{\eta^5}{36\pi\rho v_T^5} \tag{1.9}$$

$$H_2=\frac{3+2\eta^5}{60\pi\rho v_T^5},\quad \eta=\frac{v_T}{v_L},\quad v_T=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},\quad v_L=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$$

где v_T, v_L — скорости распространения поперечных и продольных волн в среде с коэффициентами Ламе λ и μ.

Итак, при справедливости представлений (1.6) и (1.7) поле смещений внутри включения связано с падающим полем $u_i^\circ(x)$ соотношениями

$$u_i(x)=\lambda_{ik}(\omega,\ a)u_k^\circ(x)+\Lambda'_{ijkl}(\omega,\ a)x_j\overset{\circ}{u}_{k,l}(x) \tag{1.10}$$

$$u_{i,j}(x)=\Lambda_{ijkl}(\omega,a)\overset{\circ}{u}_{k,l}(x)\quad (x\in V)\qquad \Lambda'_{ijkl}(\omega,a)=\Lambda_{ijkl}(\omega,a)-\lambda_{ik}(\omega,a)\delta_{jl}$$

2. Рассеяние на случайном множестве включений. Рассмотрим неограниченную среду, содержащую однородное случайное множество эллипсоидальных включений. Будем считать для простоты, что включения одинаковы по величине, но различно ориентированы в пространстве. Пусть V_k — область, занятая k-м включением. Характеристическую функцию области $V=\bigcup\limits_k V_k$ обозначим через $V(x)$. В случае гармонических колебаний амплитуда поля смещений $u(x)$ в такой среде удовлетворяет уравнению, аналогичному (1.1)

$$u_i(x)=u_i^\circ(x)+C^1_{kjlm}\int g_{ik,j}(x-x')V(x')u_{m,n}(x')dx'+$$
$$+\rho_1\omega^2\int g_{ik}(x-x')V(x')u_k(x')dx' \tag{2.1}$$

Введем для произвольного включения с номером k локальное внешнее поле $u^*_{(k)}(x)$, в котором находится это включение. Поле $u^*_{(k)}(x)$ определено в области V_k и складывается из падающего поля $u^\circ(x)$ и полей, рассеянных на всех остальных включениях. Обозначим через $u^*(x)$ поле, определенное в области V и совпадающее с $u^*_{(k)}(x)$ при $x\in V_k$. Как следует из (2.1), это поле можно представить в форме

$$u_i^*(x)=u_i^\circ(x)+C^1_{kjlm}\int g_{ik,j}(x-x')V(x,x')u_{m,l}(x')dx'+$$
$$+\rho_1\omega^2\int g_{ik}(x-x')V(x,x')u_k(x')dx'\quad (x\in V) \tag{2.2}$$

Здесь через $V(x,x')$ обозначена характеристическая функция области V_x, определенной следующим образом: $V_x\bigcup\limits_{i\neq k} V_i$ при $x\in V_k$.

Предположим, что поле $u^*(x)$ имеет одинаковую структуру в каждой из областей V_k и представляется линейной функцией, аналогичной (1.6). Тогда поле $u(x)$ $(x\in V)$ выражается через $u^*(x)$ по формулам вида (1.10):

$$u_i(x)=\lambda_{ik}(\omega,x)u_k^*(x)+\Lambda'_{ijkl}(\omega,x)H_j(x)u^*_{k,l}(x)$$
$$u_{i,j}(x)=\Lambda_{ijkl}(x,\omega)u^*_{k,l}(x)\qquad (x\in V) \tag{2.3}$$

Здесь функции $\lambda(\omega,x)$ и $\Lambda(\omega,x)$ при $x\in V_k$ совпадают с величинами $\lambda(\omega,a_k)$ и $\Lambda(\omega,a_k)$, определенными формулами (1.8) (a_k^{-1} — линейное преобразование, переводящее эллипсоид V_k в единичный шар), а функция

$H_j(x)$ в системе координат с началом в центре области V_k равна x_j ($k=1, 2, \ldots$).

Подставляя выражения (2.3) в правую часть (2.2), получим самосогласованное уравнение, которому должно удовлетворять поле $u_i^*(x)$:

$$u_i^*(x)=u_i^\circ(x)+C_{kjlm}^1\int g_{ik,j}(x-x')V(x,x')\Lambda_{lmrs}(x')u_{r,s}^*(x')dx'+$$
$$+\rho_1\omega^2\int g_{ik}(x-x')V(x,x')[\lambda_{kl}(x')u_l^*(x')+\Lambda_{kjrs}'(x')H_j(x')u_{r,s}^*(x')]dx' \tag{2.4}$$

Если решение этого уравнения известно, то поле $u(x)$ в среде с включениями может быть найдено при помощи соотношений (2.1) и (2.3). Таким образом, поле $u^*(x)$ является основным неизвестным задачи.

Так как положение центров и ориентация включений случайны, то $u^*(x)$ — случайная функция. Уравнение (2.4) является отправным для построения статистических моментов этой функции, через которые выражаются статистические моменты решения [1]. Рассмотрим построение первого момента $U_i^*(x)$, определенного соотношением $U_i^*=\langle u_i^*(x)|x\rangle$, где символ $\langle\ldots|x\rangle$ означает осреднение по всем реализациям случайного множества включений при условии $x\in V$. Поле $U_i^*(x)$ в дальнейшем будем называть эффективным.

Предположим далее, что значение случайной функции $u_*(x)$ статистически не зависит от свойств и геометрических характеристик включения, в котором находится точка x. Осредняя затем уравнение (2.4) по ансамблю реализаций случайного множества включений при условии $x\in V$, получим

$$U_i(x)=u_i^\circ(x)+C_{kjlm}^1\Lambda_{lmrs}\int g_{ik,j}(x-x')\Psi(x,x')\langle u_{r,s}^*(x')|x',x\rangle dx'+$$
$$+\rho_1\omega^2\int g_{ik}(x-x')[\Psi(x,x')\lambda_{kl}\langle u_l^*(x')|x',x\rangle+$$
$$+\Lambda_{kjrs}'\theta_j(x,x')\langle u_{r,s}^*(x')|x',x\rangle]dx' \tag{2.5}$$
$$\Psi(x,x')=\langle V(x,x')|x\rangle,\qquad \theta_j(x,x')=\langle V(x,x')H_j(x')|x\rangle$$

где $\Lambda=\langle\Lambda(x)|x\rangle$, $\lambda=\langle\lambda(x)|x\rangle$ — постоянные тензоры (предполагается, что ориентация включений статистически не зависит от положения их центров), а символ $\langle\ldots|x,x'\rangle$ означает операцию осреднения при x, $x'\in V$.

Заметим, что условные средние под знаком интегралов в (2.6) отличаются от $\langle u_i^*(x)|x\rangle$ и $\langle u_{i,j}^*(x)|x\rangle$. Чтобы получить замкнутое уравнение относительно этих величин, воспользуемся так называемым квазикристаллическим приближением [11], в силу которого

$$\langle u_i^*(x)|x',x\rangle=\langle u_i^*(x)|x\rangle=U_i^*(x),\quad \langle u_{i,j}^*(x)|x',x\rangle=\langle u_{i,j}^*(x)|x\rangle=U_{ij}^*(x) \tag{2.6}$$

Уравнение (2.5) при этом принимает вид

$$U_i^*(x)=u_i^\circ(x)+C_{kjlm}^1\Lambda_{lmrs}\int g_{ik,j}(x-x')\Psi(x,x')U_{rs}^*(x')dx'+$$
$$+\rho_1\omega^2\int g_{ik}(x-x')[\Psi(x,x')\lambda_{kl}U_l^*(x')+\Lambda_{kjrs}'\theta_j(x,x')U_{rs}^*(x')]dx' \tag{2.7}$$

Для однородного случайного поля включений функции $\Psi(x,x')$ и $\theta_j(x,x')$, входящие в это уравнение, зависят только от разности аргументов и, кроме того, из определения $\Psi(x,x')$ следует $\Psi(0)=0$, $\Psi(\infty)=$ $=\langle V(x)\rangle=p$, где p — объемная концентрация включений.

Среднее волновое поле $U_i(x)$ в среде с включениями можно выразить через эффективное поле $U_i^*(x)$. Для этого в правую часть уравнения (2.1) подставим выражения (2.3) и осредним результат по ансамблю реализаций случайного множества включений. С учетом сделанных ранее предположений получим

$$U_i(x)=u_i^\circ(x)+pC^1_{hjlm}\Lambda_{lmrs}\int g_{ik,j}(x-x')U_{rs}^*(x')\,dx'+$$

$$+p\rho_1\omega^2\lambda_{kl}\int g_{ik}(x-x')U_l^*(x')\,dx',\qquad U_i(x)=\langle u_i(x)\rangle \tag{2.8}$$

Исключая поле $u_i^\circ(x)$ из уравнений (2.7) и (2.8), получаем искомую зависимость между величинами $U_i(x)$, $U_i^*(x)$, $U_{ij}^*(x)$:

$$U_i^*(x)=U_i(x)-pC^1_{hjlm}\Lambda_{lmrs}\int g_{ik,j}(x-x')\Phi(x-x')U_{rs}^*(x')\,dx'-$$

$$-\rho_1\omega^2\int g_{ik}(x-x')\left[p\Phi(x-x')\lambda_{kl}U_l^*(x')-\Lambda'_{hjrs}\theta_j(x-x')U_{rs}^*(x')\right]dx' \tag{2.9}$$

$$\Phi(x)=1-\Psi(x)/p$$

Для статистически изотропных множеств включений $\Phi(x)$ — гладкая функция, быстро стремящаяся к нулю вне области с линейным размером l порядка среднего расстояния между центрами неоднородностей [12].

Переходя в (2.9) к преобразованию Фурье и учитывая свойства свертки, получим

$$U_i^*(k)=U_i(k)-T_{irs}(k)U_{rs}^*(k)-t_{ik}(k)U_k^*(k)$$

$$T_{irs}(k)=pC^1_{hjmn}\Lambda_{mnrs}\int g_{ik,j}(x)\Phi(x)\exp(-ikx)\,dx-$$

$$-\rho_1\omega^2\Lambda'_{hjrs}\int g_{ik}(x)\theta_j(x)\exp(-ikx)\,dx \tag{2.10}$$

$$t_{ik}(k)=p\rho_1\omega^2\lambda_{lk}\int g_{il}(x)\Phi(x)\exp(-ikx)\,dx$$

В правую часть уравнения (2.8) входит величина $U_{rs}^*(k)$, которая не равна $-ik_rU_s^*(k)$, поскольку операции дифференцирования и условного осреднения для функции $u_i^*(x)$ не перестановочны. Следовательно, для определения двух независимых функций $U_i^*(x)$ и $U_{ij}^*(x)$ требуется еще одно уравнение, которое можно получить исходя из уравнения (2.1), продифференцированного по координатам. Совершенно аналогично предыдущему будем иметь

$$U_{ij}^*(k)=U_{ij}(k)-\Pi_{ijrs}(k)U_{rs}^*(k)-\pi_{ijk}(k)U_k^*(k)$$

$$\Pi_{ijrs}(k)=pC^1_{hlmn}\Lambda_{mnrs}\int g_{ik,lj}(x)\Phi(x)\exp(-ikx)\,dx- \tag{2.11}$$

$$-\rho_1\omega^2\Lambda'_{hlrs}\int g_{ik,j}(x)\theta_l(x)\exp(-ikx)\,dx \tag{2.11}$$

$$\pi_{ijk}(k)=p\rho_1\omega^2\lambda_{lk}\int g_{il,j}(x)\Phi(x)\exp(-ikx)\,dx$$

В длинноволновом приближении ($kl\ll 1$) функцию $\exp(-ikx)$ в области $|x|<l$ можно аппроксимировать отрезком ряда

$$\exp(-ikx)\approx 1-ik_ix_i-{}^1/_2k_ik_jx_ix_j \tag{2.12}$$

В этом приближении решение уравнений (2.10) и (2.11) примет вид

$$U_i^*(k)=d_{ik}(\omega)U_k(k),\qquad U_{ij}^*(k)=D_{ijkl}(k,\omega)(-ik_l)U_k(k)$$

$$d_{ik}=\delta_{ik}-i\omega^3p\rho_1g_{ik}{}^1J,\qquad J=\int\Phi(x)\,dx$$

$$D=D_0\{I-p[k^2\Gamma(l)C_A-i\omega^3(HJC_A+\Gamma_0\Lambda_1)]\} \tag{2.13}$$

$$D_0=(I+p\Gamma_0 C_1 A)^{-1}, \qquad A=\langle A(a)\rangle, \qquad C_A=\langle C_A(a)\rangle$$

$$C_A(a)=C_1 A(a) D_0, \qquad \Lambda_1=v\langle C_1 A(a) H C_A(a)\rangle$$

$$\Gamma_0=(\overset{\circ}{\Gamma}_{ijkl})=\int \overset{\circ}{g}_{i)(k,l)(j}(x)\,\Phi(x)\,dx, \qquad l_i=\frac{k_i}{k}$$

$$\Gamma(l)=(\Gamma_{ijkl}(l))=l_m l_n \int \overset{\circ}{g}_{i)(k,l)(j}(x)\,\Phi(x)\,x_m x_n\,dx$$

Переходя в уравнении (2.8) к k-представлению и подставляя в результат формулы (2.13), имеем

$$u_i^\circ(k)=U_i(k)-p[(-ik_j)g_{ik}(k)C^1_{hjrs}\Lambda_{rsmn}D_{mnkl}(-ik_l)U_k(k)+ +\rho_1\omega^2 g_{ir}(k)\lambda_{rs}d_{sh}U_h(k)] \tag{2.14}$$

Свернем обе части этого уравнения с тензором $L_{ih}=-k_j C_{ijhl} k_l+\rho\omega^2\delta_{ih}$. Учитывая равенства

$$L_{ih}(k,\omega)u_h^\circ(k)=0, \qquad L_{ih}(k,\omega)g_{hj}(k)=-\delta_{ij} \tag{2.15}$$

получим, что фурье-образ среднего поля смещений $U_i(k)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} L_{ih}{}^*(k,\omega)U_h(k)=0, \qquad L_{ih}{}^*(k,\omega)\equiv -k_j \overset{*}{C}_{ijhl}(k,\omega)k_l+\rho_{ih}{}^*(\omega)\omega^2 \\ C^*(k,\omega)=C_s-p^2k^2 C_A\Gamma(l)C_A-i\omega^3 p C_D, \qquad C_s=C+pC_A \\ C_D=\langle C_A(a)HC_A(a)\rangle v-pJC_AHC_A, \qquad \rho_{ih}{}^*=\rho_s\delta_{ih}+i\omega^3 p\rho_1{}^2 f g_{ih}{}^1 \\ \rho_s=\rho+p\rho_1, \qquad f=v-pJ \end{gathered} \tag{2.16}$$

где $L_{ih}{}^*(k,\omega)$ — эффективный волновой оператор композитной среды.

Таким образом, среднее волновое поле в композитном материале удовлетворяет уравнению, которое по виду совпадает с уравнением движения однородной среды. Однако величины C^* и ρ^* в (2.16) являются функциями k и ω и, следовательно, эта среда обладает временной и пространственной дисперсией [13]. Заметим, что в x-представлении вещественная часть тензора C^* состоит из двух слагаемых: постоянного тензора C_s и дифференциального оператора второго порядка [1]. В случае статики ($\omega=0$) такую структуру имеет оператор упругих модулей среды со слабой пространственной дисперсией [13], а уравнение (2.16) по существу не отличается от уравнения равновесия моментной теории упругости со стесненным вращением (см., например, [14]).

Отметим, что выражение для тензора C_s совпадает с формулой для тензора эффективных упругих модулей, полученной в [15] в предположении об однородности внешнего поля.

3. Изотропный композитный материал со сферическими включениями. Рассмотрим в качестве примера композитный материал, состоящий из изотропной матрицы и изотропных включений сферической формы. Будем, кроме того, считать, что случайное множество включений статистически однородно и изотропно в пространстве. В этом случае при не слишком больших концентрациях включений функция $\Phi(x)$ зависит только от $|x|$, тензоры $g_{ik}{}^1$, P_{ijkl} и H_{ijkl} определяются формулами (1.9), $\overset{\circ}{\Gamma}_{ijkl}=-P_{ijkl}$; а тензор $\Gamma_{ijkl}(l)$ имеет вид

$$\Gamma_{ijkl}(l)=l^2[(3+4\eta^2)(I_{ijkl}-3E_{ijkl})+ +(1-\eta^2)(3\delta_{ij}l_k l_l+3l_i l^j\delta_{kl}-2\delta_{ij}\delta_{kl})]/105\mu \tag{3.1}$$

$$E_{ijkl}=\delta_{i)(k}l_{l)}l_{(j}, \qquad l^2=\int\limits_0^\infty \Phi(r)\,r\,dr$$

Подстановка указанных выражений в (2.16) позволяет привести оператор $L_{ik}^*(k,\omega)$ к виду, обычному для изотропной среды

$$\begin{gathered} L_{ik}^*(k,\omega)=-k^2[(k^*-2/3\mu^*)l_il_k+\mu^*\delta_{ik}]+\rho^*\omega^2\delta_{ik} \\ K^*=K_s+p^2k^2l^2K_R-i\omega^3pfK_D, \qquad K_s=K+pK_A \\ \mu^*=\mu_s+p^2k^2l^2\mu_R-i\omega^3pf\mu_D, \qquad \mu_s=\mu+p\mu_A \\ K_A=(1/K_1+3(1-p)P_1)^{-1}, \qquad \mu_A=(1/\mu_1+2(1-p)P_2)^{-1} \\ K_R=\frac{4\mu_A}{105\mu}\left[14K_A\eta^2+\frac{1}{3}\mu_A(3+4\eta^2)\right], \qquad \mu_R=\frac{\mu_A{}^2}{105\mu}(3+4\eta^2) \\ K_D=9K_A{}^2H_1, \qquad \mu_D=2\mu_A{}^2H_2, \qquad \rho^*=\rho_s+i\omega^3pf\rho_D, \qquad \rho_D=\rho_1{}^2g_1 \end{gathered} \tag{3.2}$$

Введем операторы проектирования $\pi_{ik}(k)$ и $\vartheta_{ik}(k)$, которые позволяют выделить продольную и поперечную составляющие волнового поля [13]: $\pi_{ik}(k)=l_il_k$, $\vartheta_{ik}(k)=\delta_{ik}-l_il_k$. Тогда оператор L_{ik}^* можно представить в виде суммы двух ортогональных составляющих

$$L_{ik}^*(k,\omega)=L_L^*(k,\omega)\pi_{ik}(k)+L_T^*(k,\omega)\vartheta_{ik}(k) \tag{3.3}$$

$$L_L^*=-k^2(K^*+{}^4/{}_3\mu^*)+\rho^*\omega^2, \qquad L_T^*=-k^2\mu^*+\rho^*\omega^2$$

причем скалярный оператор $L_L^*(k,\omega)$ определяет закон распространения продольных, а $L_T^*(k,\omega)$ — поперечных волн.

Приступим к построению тензора Грина этого оператора. Разложению (3.3) для L_{ik}^* соответствует представление тензора Грина $g_{ik}^*(k,\omega)$ в форме

$$g_{ik}^*(k,\omega)=g_L^*(k,\omega)\pi_{ik}(k)+g_T^*(k,\omega)\vartheta_{ik}(k)$$

$$g_L^*(k,\omega)=-[L_L^*(k,\omega)]^{-1}, \quad g_T^*(k,\omega)=-[L_T^*(k,\omega)]^{-1} \tag{3.4}$$

Рассмотрим сначала продольную составляющую g_{ik}^{*L} этого тензора $g_{ik}^{*L}=g_L^*(k,\omega)\pi_{ik}(k)$. Переходя к x-представлению, получим

$$\begin{gathered} g_{ik}^{*L}(x,\omega)=-\frac{1}{(2\pi)^3}\partial_i\partial_k\int\frac{\exp(-ikx)\,dk}{k^2(-k^2\varkappa^*+\omega^2\rho^*)} \\ \varkappa^*=\varkappa_s+p^2k^2l^2\varkappa_R-i\omega^3pf\varkappa_D, \qquad \varkappa_s=K_s+{}^4/{}_3\mu_s \\ \varkappa_R=K_R+{}^4/{}_3\mu_R, \qquad \varkappa_D=K_D+{}^4/{}_3\mu_D \end{gathered} \tag{3.5}$$

Для вычисления интеграла в (3.5) введем сферическую систему координат (r,θ,φ) с полярной осью, направленной по вектору x. Интегрируя по углам, приведем его к одномерному интегралу

$$g_{ik}^{*L}(x,\omega)=\frac{1}{4\pi^2}\partial_i\partial_k\left[\frac{1}{ir}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ikr)}{kL_L^*(k,\omega)}dk\right] \tag{3.5}$$

который следует понимать в смысле главного значения по Коши [13]. Значение этого интеграла найдем при помощи теории вычетов. В результате получим

$$\frac{1}{ir}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-ikr)}{kL_L^*(k,\omega)}dk=$$

$$=\frac{\pi}{p^2l^2\varkappa_R(k_1{}^2-k_3{}^2)}\left[\frac{1-\exp(ik_3r)}{k_3{}^2r}-\frac{1-\exp(ik_1r)}{k_1{}^2r}\right] \tag{3.7}$$

Здесь k_1 и k_3 — корни уравнения $L_L^*(k,\omega)=0$, лежащие в верхней полуплоскости комплексной плоскости k. С принятой выше точностью имеем

$$k_1=\omega\sqrt{\frac{\rho_s}{\varkappa_s}}\left[1+\frac{1}{2}i\omega^3pf\left(\frac{\rho_D}{\rho_s}+\frac{\varkappa_D}{\varkappa_s}\right)\right]$$

$$k_3=\frac{f\omega^3}{2l}\frac{\varkappa_D}{\sqrt{\varkappa_s\varkappa_R}}+\frac{i}{pl}\sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_R}} \tag{3.8}$$

Окончательное выражение для функции $g_{ik}{}^{*L}(x,\omega)$ принимает вид

$$g_{ik}{}^{*L}(x,\omega)=\frac{1}{4\pi}\partial_i\partial_k\left[\frac{1}{\rho_s\omega^2r}(1-\exp(ik_1r))-\frac{p^2l^2\varkappa_R}{\varkappa_s{}^2r}(1-\exp(ik_3r))\right] \tag{3.9}$$

Аналогично вычисляется и поперечная составляющая тензора Грина

$$g_{ik}{}^{*T}(x,\omega)=\frac{1}{4\pi\mu_s}\left\{\frac{1}{r}(\exp(ik_2r)-\exp(ik_4r))\delta_{ik}-\right.$$

$$\left.-\partial_i\partial_k\left[\frac{\mu_s}{\rho_s\omega^2r}(1-\exp(ik_2r))-\frac{p^2l^2\mu_R}{\mu_sr}(1-\exp(ik_4r))\right]\right\} \tag{3.10}$$

$$k_2=\omega\sqrt{\frac{\rho_s}{\mu_s}}\left[1+\frac{1}{2}i\omega^3pf\left(\frac{\rho_D}{\rho_s}+\frac{\mu_D}{\mu_s}\right)\right]$$

$$k_4=\frac{f\omega^3}{2l}\frac{\mu_D}{\sqrt{\mu_s\mu_R}}+\frac{i}{pl}\sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_R}}$$

Заметим, что если в выражении для $g_{ik}{}^*(x,\omega)$ перейти к пределу при $\omega\to0$, то получим статическую функцию Грина

$$g_{ik}{}^{*s}(r)=\frac{1}{4\pi\mu_s}\left\{\frac{1}{r}\left(1-\exp\left(-\frac{r}{pl}\sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_R}}\right)\right)\delta_{ik}-\frac{1}{2}\partial_i\partial_k\left[\left(1-\frac{\mu_s}{\varkappa_s}\right)r+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2l^2p^2\mu_R}{\mu_sr}\left(1-\exp\left(-\frac{r}{pl}\sqrt{\frac{\mu_s}{\mu_R}}\right)\right)-\frac{2l^2p^2\varkappa_R\mu_s}{\varkappa_s^2r}\left(1-\exp\left(-\frac{r}{pl}\sqrt{\frac{\varkappa_s}{\varkappa_R}}\right)\right)\right]\right\} \tag{3.11}$$

которая характерна для нелокальной теории упругости (она не имеет особенности в нуле, а на бесконечности ведет себя, как r^{-1}) [14].

4. Эффекты затухания упругих волн в композитах. Проанализируем полученное выше выражение для динамического тензора Грина. Очевидно, как продольная (3.9), так и поперечная (3.10) его составляющие описывают два вида волн, расходящихся от точечного источника. Первый из них с волновыми числами k_1 и k_2 представляет собой затухающие волны с коэффициентами затухания, пропорциональными $(\omega l)^4$. Волны второго типа, характеризующиеся волновыми числами k_3 и k_4, затухают значительно быстрее, чем первые (их затухание происходит на расстоянии порядка радиуса корреляции l). Поэтому в ряде случаев волны второго типа можно не рассматривать и считать, что эффективный динамический тензор Грина $g_{ik}{}^*$ определяется выражением

$$g_{ik}{}^*(r,\omega)=\frac{1}{4\pi\mu_s}\left[\frac{\exp(ik_2r)}{r}\delta_{ik}+\frac{\mu_s}{\rho_s\omega^2}\partial_i\partial_k\left(\frac{\exp(ik_2r)}{r}-\frac{\exp(ik_1r)}{r}\right)\right] \tag{4.1}$$

т. е. имеет тот же вид, что и тензор Грина однородной изотропной среды с упругими модулями k_s, μ_s и плотностью ρ_s. Волновые числа k_1 и k_2 —

в данном случае комплексные величины. Их действительные части определяют эффективные скорости распространения продольных $v_L^*=(\varkappa_s/\rho_s)^{1/2}$ и поперечных $v_T^*=(\mu_s/\rho_s)^{1/2}$ волн в среде с включениями. Как следует из соотношений (3.2), величины v_L^* и v_T^* не зависят от частоты и, следовательно, дисперсия скорости здесь отсутствует. Это связано с тем, что в вещественных частях всех предыдущих соотношений члены порядка ω^2 считались малыми по сравнению с единицей и отбрасывались.

Мнимые части волновых чисел k_1 и k_2 являются коэффициентами затухания, отнесенными к единице длины. Рассмотрим эти величины более подробно.

Используя формулы для коэффициентов в (3.2), выражения для $\operatorname{Im} k_1=\gamma_L$ и $\operatorname{Im} k_2=\gamma_T$ можно записать в виде

$$\gamma_L=\frac{pf}{24\pi\rho\rho_s}\left(\frac{\omega}{v_L^*}\right)^4\left\{\frac{3v_L^*}{v_L^5}\left[K_A^2+\frac{8\mu_A^2}{15}\left(\frac{1}{\eta^5}+\frac{2}{3}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{v_L^*}{v_L}\right)^3\rho_1^2\left(1+\frac{2}{\eta^3}\right)\right\}$$
$$\gamma_T=\frac{pf}{24\pi\rho\rho_s}\left(\frac{\omega}{v_T^*}\right)^4\left[\frac{2v_T^*}{5v_T^5}\mu_A^2(2+3\eta^5)+\left(\frac{v_T^*}{v_T}\right)^3\rho_1^2(2+\eta^3)\right] \tag{4.2}$$

Эти формулы совпадают с полученными в [5] другим методом.

В соответствии с их физическим смыслом коэффициенты затухания являются положительными величинами. Следовательно, множитель f в предыдущих соотношениях должен удовлетворять условию

$$f=v-4\pi p\int_0^\infty \Phi(r)r^2\,dr>0 \tag{4.3}$$

Это накладывает ограничения на величину объемной концентрации p, при которой полученные формулы остаются физически непротиворечивыми. Так, например, для функции $\Phi(r)$ вида [5]:

$$\Phi(r)=1\quad (r\leqslant 2a),\qquad \Phi(r)=0\quad (r>2a) \tag{4.4}$$

где a — радиус включений, γ_L и γ_T положительны лишь при $p<{}^1/_8$.

Заметим, что выражение (4.4) является довольно грубой аппроксимацией среднего $\Phi(r)$, определенного соотношениями в (2.5) и (2.9). В ряде работ (их обзор можно найти в [12]) предлагались более точные выражения для аналогичных средних, соответствующих реальным стохастическим моделям распределения шаровых областей в трехмерном пространстве. При использовании уточненных выражений для $\Phi(r)$ область концентрации включений p, для которой формулы (4.2) дают физически непротиворечивые результаты, существенно расширяются (см. [5]). В то же время, как это следует из соотношений в (3.2), формулы для эффективных скоростей распространения продольных и поперечных волн в композите для любой сферически-симметричной функции $\Phi(r)$ оказываются непротиворечивыми во всем диапазоне изменения концентрации включений.

Если объемная концентрация включений столь мала, что их взаимодействием можно пренебречь, то в выражениях (4.2) следует отбросить члены, имеющие порядок выше, чем p. При этом формулы для γ_L и γ_T принимают вид

$$\gamma_L={}^1/_2 n_0P_L,\qquad \gamma_T={}^1/_2 n_0P_T$$

$$P_L=\frac{4\pi a^2}{9}\left(\frac{\omega a}{v_L}\right)^4\left\{\frac{1}{(\rho v_L^2)^2}\left[K_A^2+\frac{8\mu_A^2}{15}\left(\frac{1}{\eta^5}+\frac{2}{3}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2\left(1+\frac{2}{\eta^3}\right)\right\} \tag{4.5}$$

$$P_T = \frac{4\pi a^2}{9}\left(\frac{\omega a}{v_T}\right)^4\left[\frac{2\mu_A{}^2}{15(\rho v_T{}^2)^2}(3+2\eta^5)+\frac{1}{3}\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2(2+\eta^3)\right]$$

где n_0 — числовая концентрация включений.

Полученные формулы совпадают с выражениями для рэлеевского предела полных сечений рассеяния продольных P_L и поперечных P_T волн на одном сферическом включении радиуса a [5, 16, 17]. Таким образом, формулами (4.5), в которые переходят (4.2) при малой концентрации включений, даются точные значения коэффициентов затухания длинных волн на невзаимодействующих включениях [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канаун С. К.* Метод эффективного поля в линейных задачах статики композитной среды.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 655—665.
2. *Mal A. K., Knopoff L.* Elastic wave velocities in two-component systems.— J. Inst. Math. Appl., 1967, v. 3, No. 4, p. 376—387.
3. *Datta S. K.* Diffraction of plane elastic waves by ellipsoidal inclusions.— J. Acoust. Soc. Amer., 1977, v. 61, No. 6, p. 1432—1437.
4. *Kuster G. T., Toksöz M. N.* Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media. P. I. Theoretical formulations.— Geophysics, 1974, v. 39, No. 5, p. 587—606.
5. *Willis J. R.* A polarisation approach to the scattering of elastic waves.— II. Multiple scattering from inclusions.— J. Mech. Phys. Solids, 1980, v. 28, No. 5—6, p. 307—327.
6. *Gubernatis J. E., Domeny E., Krumhansl J. A.* Formal aspects of the theory of the scattering of ultrasound by flaws in elastic materials.— J. Appl. Phys., 1977, v. 48, No. 7, p. 2804—2811.
7. *Gubernatis J. E.* Long-wave approximations for the scattering of elastic waves from flaws with applications to ellipsoidal voids and inclusions.— J. Appl. Phys., 1979, v. 50, No. 6, p. 4046—4058.
8. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах. Т. 1. М.: Мир, 1981. 280 с.
9. *Лифшиц И. М., Пархомовский Г. Д.* Поглощение ультразвука в поликристаллах.— Уч. зап. Харьков. ун-та, 1948, т. 27, с. 25—36.
10. *Кунин И. А., Соснина Э. Г.* Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде.— Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 3, с. 571—575.
11. *Lax M.* Multiple scattering of waves.— Rev. Modern Phys., 1951, v. 23, No. 4, p. 287—310.
12. *Займан Дж.* Модели беспорядка. М.: Мир, 1982. 591 с.
13. *Кунин И. А.* Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975. 415 с.
14. *Mindlin R. D.* Microstructure in linear elasticity.— Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, v. 16, No. 1, p. 51—78.— Рус. перев: Механика: Период. сб. перев. иностр. статей. М.: Мир, 1964, № 4, 86, с. 129—160.
15. *Левин В. М.* К определению упругих и термоупругих постоянных композитных материалов.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6, с. 137—145.
16. *Труэлл Л., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир, 1972. 307 с.
17. *Gubernatis J. E., Domeny E., Krumhansl J. A., Huberman M.* The Born approximation in the theory of the scattering of elastic waves by flaws.— J. Appl. Phys., 1977, v. 48, No. 7, p. 2812—2819.

Ленинград, Петрозаводск

Поступила в редакцию 14.III.1983