

УДК 539.3

## ПОСТРОЕНИЕ НЕЙТРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

ВОРОВИЧ Е. И., СОКОЛОВА В. Ф., ТУКОДОВА О. М.,  
ФЕДАНОВА Ю. В.

В работе рассматриваются установившиеся колебания упругой анизотропной полосы с разными условиями закрепления на границе. Разработан численный метод построения нейтральных кривых  $\mu(\lambda)$ , где  $\mu$  характеризует частоту колебаний,  $\lambda$  — волновое число. Метод не требует предварительного нахождения дисперсионного уравнения. На его основе произведены детальные исследования влияния упругих характеристик, угла поворота главных осей анизотропии и граничных условий на вид нейтральных кривых.

Основной динамической характеристикой упругой полосы как волновода является зависимость параметра  $\mu$ , соответствующего частоте собственных колебаний  $\omega$  от волнового числа  $\lambda$ . Соотношение между параметрами  $\lambda$  и  $\mu$  ниже будет называться дисперсионным уравнением или нейтральной кривой.

Существующие методы требуют предварительного составления дисперсионного уравнения и последующего его численного решения, что в общем случае анизотропной полосы с различными условиями закрепления представляет значительную трудность. В публикуемой работе предложен метод прямого построения нейтральных кривых. На его основе проведены детальные исследования влияния упругих характеристик, угла поворота главных осей анизотропии и граничных условий на вид нейтральных кривых.

1. Рассмотрим плоское деформированное состояние полосы  $S(-\infty < x_1 < +\infty, 0 \leq x_2 \leq h)$  (фиг. 1), где  $x_1', x_2'$  — главные оси ортотропии.

При отсутствии массовых сил колебания полосы описываются уравнением ( $\rho$  — плотность полосы):

$$\rho u_i'' = \partial \sigma_{ij} / \partial x_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (1.1)$$

В системе координат  $x_1 x_2$  закон Гука имеет вид

$$\sigma_{11} = \alpha_{11} u_{1,x_1} + \alpha_{12} u_{2,x_2} + \alpha_{13} (u_{1,x_2} + u_{2,x_1}) \quad (1.2)$$

$$\sigma_{12} = \alpha_{31} u_{1,x_1} + \alpha_{32} u_{2,x_2} + \alpha_{33} (u_{1,x_2} + u_{2,x_1})$$

$$\alpha_{11} = \frac{E_1 \cos^4 \varphi + E_2 \sin^4 \varphi + 2\nu_1 E_2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{1 - \nu_1 \nu_2} + G \sin^2 2\varphi$$

$$\alpha_{12} = \frac{(E_2 + E_1) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + E_2 \nu_1 (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)}{1 - \nu_1 \nu_2} - G \sin^2 2\varphi$$

$$\alpha_{13} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi (E_2 \sin^2 \varphi - E_1 \cos^2 \varphi + E_2 \nu_1 \cos 2\varphi)}{1 - \nu_1 \nu_2} + G \sin 2\varphi \cos 2\varphi \quad (1.3)$$

$$\alpha_{33} = \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (E_2 + E_1 - 2E_1 \nu_2)}{1 - \nu_1 \nu_2} + G \cos^2 2\varphi, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21}, \quad \alpha_{13} = \alpha_{31}$$

Здесь выражение для  $\sigma_{22}$  получается из формулы для  $\sigma_{11}$  перестановкой индексов,  $E_1, E_2, G, \nu_1, \nu_2$  — модули упругости,  $\varphi$  — угол поворота

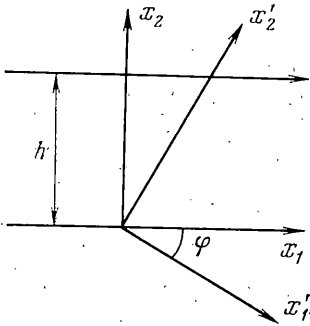
главных осей анизотропии, коэффициенты  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{23}$  следуют из формул (1.3) заменой  $\varphi$  на  $1/2\pi - \varphi$ .

Пусть  $u_i(x_1, x_2)$  — перемещения точек полосы при установившихся колебаниях с частотой  $\omega$ . Положив  $u_i(x_1, x_2) = v_i(x_2) \exp(i\lambda x_1)$ , для  $v_i(x_2)$  получим систему

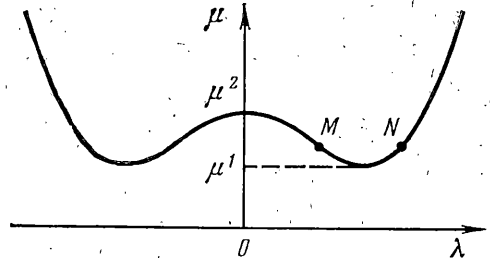
$$\begin{aligned} \beta_{33}v_1'' + \beta_{23}v_2'' + 2\beta_{13}i\lambda v_1' + (\beta_{12} + \beta_{33})i\lambda v_2' + [\mu f(\xi_2) - \beta_{11}\lambda^2]v_1 - \lambda^2\beta_{13}v_2 &= 0 \\ \beta_{23}v_1'' + \beta_{22}v_2'' + (\beta_{12} + \beta_{33})i\lambda v_1' + 2\beta_{23}i\lambda v_2' - \beta_{13}\lambda^2v_1 + [\mu f(\xi_2) - \lambda^2\beta_{33}]v_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\mu = \frac{\rho_0 \omega^2 h^2}{E_1}, \quad \beta_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{E_1}, \quad \lambda = \lambda_i h, \quad \xi = \frac{x_h}{h} \quad (i, j=1, 2, 3; h=1, 2)$$

где для массовой плотности полосы принято  $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2) = \rho_0 f(x_2)$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассматривается три типа граничных условий:  
жесткое защемление по обеим сторонам

$$v_1 = v_2 = 0 \quad (\xi_2 = 0, \xi_2 = 1) \quad (1.5)$$

жесткое защемление по одной стороне и отсутствие напряжений на другой

$$v_1 = v_2 = 0 \quad (\xi_2 = 0) \quad (1.6)$$

$$\beta_{12}i\lambda v_1 + \beta_{22}v_2' + \beta_{23}(v_1' + i\lambda v_2) = 0 \quad (1.7)$$

$$\beta_{13}i\lambda v_1 + \beta_{23}v_2' + \beta_{33}(v_1' + i\lambda v_2) = 0$$

отсутствие напряжений по обеим сторонам полосы (при этом граничное условие (1.7) будет уже выполнено также и при  $\xi_2 = 0$ ).

Краевые задачи (1.4)–(1.7), в которых содержится два параметра  $\lambda$  и  $\mu$ , всегда имеют тривиальное решение  $v_i = 0$ . Далее будем рассматривать те сочетания  $\lambda$ ,  $\mu$ , для которых имеются нетривиальные решения. Соответствующую зависимость

$$D(\lambda, \mu) = 0 \quad (1.8)$$

назовем дисперсионным уравнением, зависимость  $\mu = \mu(\lambda)$  — нейтральной кривой. Построение нейтральных кривых имеет существенное практическое значение. Тем не менее оно затруднено даже в случае однородного изотропного тела, так как сводится к отысканию корней трансцендентного уравнения сложного вида (1.8). Само составление трансцендентного уравнения (1.8) также громоздко и не всегда выполнимо в аналитической форме, если плотность  $\rho$  переменна. Поэтому представляет интерес разработка численного алгоритма на ЭЦВМ, который бы автоматически разрешал обе задачи в совокупности. На основе этого алгоритма проведено исследование нейтральных кривых в рассматриваемой задаче.

Приведем некоторые общие свойства нейтральных кривых [1]:  $D(\lambda, \mu)$  — целая функция комплексных параметров  $\lambda, \mu$ , действительное множество решений уравнения (1.8) распадается на счетное множество ветвей  $\mu_k = \mu_k(\lambda)$  ( $-\infty < \lambda < +\infty$ ), причем  $\mu_k(\lambda) \rightarrow \infty$ , если  $\lambda \rightarrow \infty$ ;  $\mu_k(\lambda)$  — четная функция  $\lambda$ .

2. Предварительно рассмотрим поведение  $\mu_k(\lambda)$  на начальных участках при малых  $\lambda$ . Применение метода возмущений [2] приводит к соотношениям  $\mu = \mu_0 + \sigma \mu_1 + \sigma^2 \mu_2 + \dots$ ,  $\sigma = \lambda^2$ , где, например, для краевой задачи (1.4), (1.5) в случае изотропного тела имеем ( $\lambda^*$ ,  $\mu^*$  — постоянные Ламе):

I ветвь — продольные волны

$$\mu_{0n} = (1+k) \pi^2 n^2$$

$$\mu_{1n} = 1+k + \frac{4(-1)^n \sqrt{1+k}}{\pi n \sin \sqrt{\mu_{0n}}} [1 - (-1)^n \sqrt{\mu_{0n}}], \quad k = \frac{\lambda^* + \mu^*}{\mu^*} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

II ветвь — поперечные волны

$$\mu_{0n} = \pi^2 n^2,$$

$$\mu_{1n} = 1 + \frac{4(-1)^n \sqrt{1+k}}{\sqrt{\mu_{0n}} \sin \sqrt{\mu_{0n}/(1+k)}} \left[ 1 - (-1)^n \cos \sqrt{\frac{\mu_{0n}}{1+k}} \right], \quad n=1, 2, \dots \quad (2.2)$$

В некоторых случаях формулы (2.1), (2.2) теряют силу. Например, в задаче (1.4), (1.5) это случится, если  $\mu_{0n} = \pi^2 n^2$  или  $\mu_{0n} = (1+k) \pi^2 n^2$  ( $n=1, 2, \dots$ ). В этих случаях картина ветвления имеет более сложный характер и решение нужно искать в виде ряда по дробным степеням  $\sigma$ .

Анализ результатов показал, что некоторым  $n$  соответствуют отрицательные значения  $\mu_1$ . Соответствующие отрицательные значения  $\mu_1$  нейтральные кривые имеют немонотонный характер (фиг. 2). Это означает, что для любого значения  $\mu$  из  $(\mu^1, \mu^2]$  существуют два значения параметра  $\lambda$ , каждому из которых соответствует своя волна. Причем в точке типа  $M$  производная  $d\mu/d\lambda < 0$ , а в точке типа  $N$  производная  $d\mu/d\lambda > 0$ .

Известно [4], что энергия, переносимая волной, прямо пропорциональна  $d\mu/d\lambda$ . Следовательно, точке  $N$  соответствует волна, распространяющаяся в бесконечность и переносящая энергию в бесконечность, а точке типа  $M$  — волна, распространяющаяся в бесконечность, но приносящая энергию из бесконечности. Этот вывод очень важен при выборе решения задачи о вынужденных колебаниях полосы, так как волны, приносящие энергию из бесконечности, не могут существовать, если возбуждение полосы происходит в конечной области.

3. Перейдем к изложению численной схемы построения нейтральных кривых, которое проведем на примере краевой задачи (1.4), (1.5).

При помощи замены  $v_1 = a_1$ ,  $v_1' = a_2$ ,  $v_2 = a_3$ ,  $v_2' = a_4$  в системе (1.4) получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными

$$a_i' = \sum_{j=1}^4 m_{ij}(\lambda, \mu) a_j \quad (i=1, \dots, 4) \quad (3.1)$$

где  $m_{ij}$  — коэффициенты, зависящие от параметров  $\lambda, \mu$  и коэффициентов  $\beta_{kl}$  ( $k, l=1, 2, 3$ ).

Введем две системы канонических решений для уравнений (3.1), удовлетворяющих граничным условиям (1.5) при  $\xi_2 = 0$ :

$$a_1^{(1)}(0) = 0, \quad a_2^{(1)}(0) = 1, \quad a_3^{(1)}(0) = 0, \quad a_4^{(1)}(0) = 0$$

$$a_1^{(2)}(0) = 0, \quad a_2^{(2)}(0) = 0, \quad a_3^{(2)}(0) = 0, \quad a_4^{(2)}(0) = 1 \quad (3.2)$$

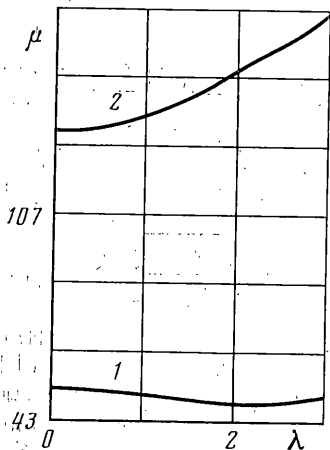
Решение системы (3.1) ищется в виде линейной комбинации канони-

ческих решений  $a_k = \sum c_i a_k^{(i)}$  ( $k=1, \dots, 4$ ), где  $c_i$  — произвольные постоянные ( $i=1, 2$ ). Это решение удовлетворяет граничным условиям (1.5) при  $\xi_2=0$ : граничные условия (1.5) при  $\xi_2=1$  удовлетворяются за счет выбора  $c_i$ .

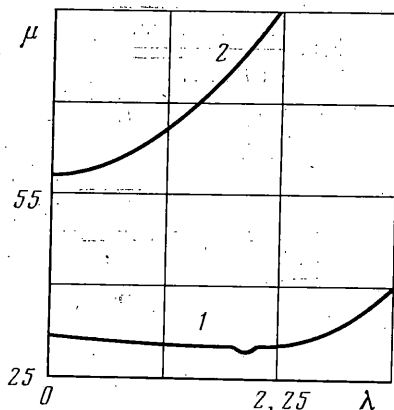
Для  $c_i$  получаем однородную систему, а приравняв ее детерминант нулю, имеем дисперсионное уравнение

$$a_1^{(1)}(1, \lambda, \mu) a_2^{(2)}(1, \lambda, \mu) = a_1^{(2)}(1, \lambda, \mu) a_2^{(1)}(1, \lambda, \mu) \quad (3.3)$$

Непосредственное нахождение зависимости  $\mu(\lambda)$  из этого уравнения



Фиг. 3



Фиг. 4

сложно. Поэтому здесь используется прием дифференцирования по параметру. Продифференцировав уравнение (3.3) по параметру  $\lambda$ , получаем

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \Phi(\lambda, \mu) = \frac{a_{1,\lambda}^{(1)} a_3^{(2)} - a_1^{(1)} a_{3,\lambda}^{(2)} - a_{3,\lambda}^{(1)} a_1^{(2)} - a_3^{(1)} a_{1,\lambda}^{(2)}}{a_{3,\mu}^{(1)} a_1^{(2)} + a_3^{(1)} a_{1,\mu}^{(2)} - a_{1,\mu}^{(1)} a_3^{(2)} - a_1^{(1)} a_{3,\mu}^{(2)}} \quad (3.4)$$

Решая уравнение (3.4) на ЭВМ методом Рунге — Кутты, получаем зависимость  $\mu(\lambda)$ . При определении  $\Phi(\lambda, \mu)$  необходимо знать  $d/d\lambda a_k^{(i)}(1, \lambda, \mu)$ ,  $d/d\mu a_k^{(i)}(1, \lambda, \mu)$  ( $i, k=1, 2$ ). Их можно найти продифференцировав систему (3.1) соответственно по  $\lambda$  и  $\mu$ . В результате получим три системы уравнений для определения канонических решений и их производных

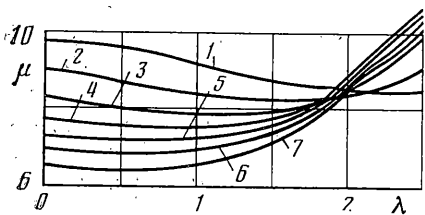
$$a_i' = \sum_{j=1}^4 m_{ij} a_j, \quad a_{i,\lambda}' = \sum_{j=1}^4 m_{ij} a_{j,\lambda} + \sum_{j=1}^4 m_{ij,\lambda} a_j$$

$$a_{i,\mu}' = \sum_{j=1}^4 m_{ij} a_{j,\mu} + \sum_{j=1}^4 m_{ij,\mu} a_j \quad (i=1, \dots, 4)$$

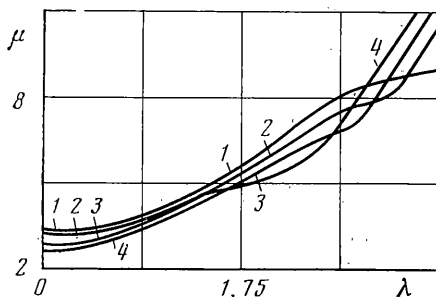
К начальным условиям (3.2) добавляются начальные условия  $a_{i,\lambda}^{(j)}(0) = 0$ ,  $a_{i,\mu}^{(j)}(0) = 0$ .

Решение системы двенадцати уравнений для нахождения канонических решений осуществляется также методом Рунге — Кутты.

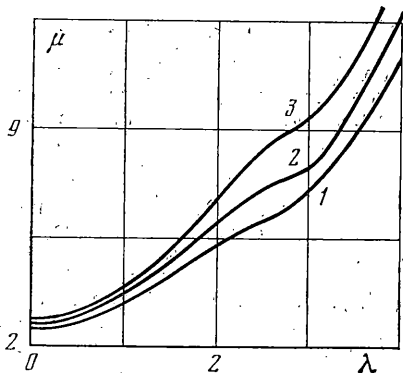
Результаты расчета для изотропной упругой полосы представлены на фиг. 3, 4. Из графиков видно, что нейтральные кривые при больших значениях  $\lambda$  хорошо аппроксимируются параболой. Например, для задачи



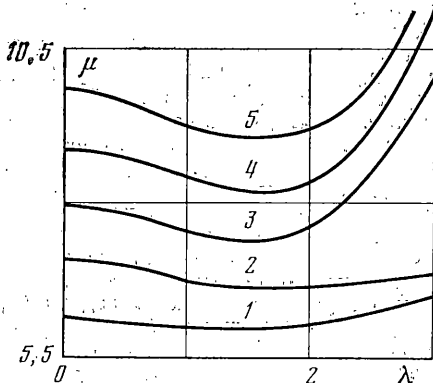
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

(1.4) (третий тип граничных условий) первая ветвь нейтральной кривой при  $n=1$  и  $k=5$  (см. фиг. 4, кривая 2) аппроксимируется параболой  $\mu=55,672+7,0099\lambda+3,718\lambda^2$  с погрешностью  $\delta \approx 1,37\%$ .

Приведем далее асимптотическое представление нейтральных кривых  $\mu(\lambda)$  при больших значениях параметра  $\lambda$ , полученное для случая  $\mu > (1+k)\lambda^2$ .

Для краевой задачи (1.4), (1.5) асимптотическое разложение имеет вид

$$\mu_n = \lambda^2(1+k) \left\{ 1 + \frac{\pi^2 n^2}{\lambda^2} + \frac{(-1)^n \pi^2 n^2 [1 - (-1)^n \cos(\lambda \sqrt{k})]}{\lambda^3 \sin(\lambda \sqrt{k})} + \dots \right\} \quad (n=1,2,\dots)$$

для краевой задачи (1.4), (1.6):

$$\mu_n = \lambda^2(1+k) \left\{ 1 + \pi^2 n^2 / \lambda^2 + \frac{2\pi^2 n^2 \sqrt{k} [(-1)^n (k^2 - 2k + 5) \cos(\lambda \sqrt{k}) + 4(k-1)]}{\lambda^3 (-1)^n (k-1)^2 \sin(\lambda \sqrt{k})} + \dots \right\} \quad (n=1,2,\dots)$$

для краевой задачи (1.4) (третий тип граничных условий):

$$\mu_n = \lambda^2(1+k) \left\{ 1 + \pi^2 n^2 / \lambda^2 + \frac{16\pi^2 n^2 \sqrt{k} [\cos(\lambda \sqrt{k}) - (-1)^n]}{\lambda^3 (k-1)^2 \sin(\lambda \sqrt{k})} + \dots \right\} \quad (n=1,2,\dots)$$

4. На основе изложенных методов была проведена серия расчетов для выяснения влияния упругих характеристик, анизотропии материала и граничных условий на вид нейтральных кривых для однородной полосы.

Первые ветви нейтральных кривых для  $n=1$  (задачи (1.4), третий тип граничных условий) при фиксированных упругих характеристиках ( $G/E_1=0,4$ ,  $\nu_1/E_1=0,3$ ,  $\nu_2/E_1=0,15$ ,  $E_2/E_1=0,5$ ) и при разных углах поворота главных осей анизотропии  $\varphi$

приведены на фиг. 5. Кривые 1-7 соответствуют значениям  $\varphi = \pi/3, \pi/4, \pi/5, \pi/6, \pi/7, \pi/8, \pi/10$ . Из этих графиков видно, что при малых углах  $\varphi$  для данного случая нейтральные кривые монотонны. С ростом угла  $\varphi$  монотонность нарушается, причем это нарушение начинает происходить в точках  $\lambda \approx 0$ . Таким образом, с некоторого достаточно малого угла  $\varphi$  в системе появляются обратные волны, которые, однако, несут энергию в бесконечность от источника возбуждения. Наличие таких волн существенным образом влияет на математическую постановку задачи. Их существование также следует учитывать при анализе механических свойств колебательной системы.

Нейтральные кривые, соответствующие второй ветви, при  $n=1$  и тех же упругих характеристиках и углах поворота главных осей анизотропии  $\varphi$  изображены на фиг. 6; кривые 1-4 соответствуют значениям  $\varphi = \pi/3, \pi/4, \pi/5, \pi/10$ . Здесь также наблюдается тенденция к потере монотонности нейтральными кривыми с ростом угла  $\varphi$ , однако обратные волны начинают образовываться при некотором конечном значении  $\lambda$  в отличие от нейтральных кривых первой ветви. При этом нейтральные кривые, соответствующие второй ветви, располагаются ниже нейтральных кривых первой ветви.

Нейтральные кривые первой ветви для  $n=1$  при фиксированном значении угла поворота главных осей анизотропии  $\varphi = \pi/4$  и при фиксированных упругих характеристиках ( $\nu_1/E_1=0,3, \nu_2/E_1=0,15, E_2/E_1=0,5$ ), но при разных значениях модуля сдвига  $G$  приводятся на фиг. 7; кривые 1-5 соответствуют значениям  $G/E_1=0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$ . Можно отметить, что с ростом модуля сдвига  $G$  наблюдается тенденция к образованию обратных волн, причем в момент образования обратные волны также имеют бесконечно большую длину.

Нейтральные кривые при тех же данных, но для второй ветви, показаны на фиг. 8; кривые 1-3 соответствуют значениям  $G/E_1=0,3; 0,4; 0,5$ . И здесь с ростом модуля сдвига  $G$  наблюдается тенденция к образованию обратных волн, но в данном случае в момент образования они уже имеют конечную длину волны.

Рассмотрим изотропный случай. На фиг. 3 приведены первые ветви нейтральных кривых для случая  $n=1$  краевой задачи (1.4), (1.6). Нейтральная кривая 1 соответствует случаю  $k=1, 4$ , кривая 2 -  $k=5$ . На фиг. 4 показаны первые ветви нейтральных кривых для случая  $n=1$  краевой задачи (1.4) (третий случай); кривая 1 соответствует значению  $k=1, 4$ , кривая 2 -  $k=5$ . Видно, что с уменьшением параметра  $k$  наблюдается тенденция к образованию обратных волн.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
2. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 527 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
17.III.1983