

УДК 539.3

ДЕФОРМАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДЫ,
ОСЛАБЛЕННОЙ ТРЕЩИНАМИ СО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ
БЕРЕГАМИ

ЖИТНИКОВ Ю. В., ТУЛИНОВ Б. М.

В [1] был предложен метод расчета матрицы податливости среды, ослабленной плоскими трещинами, в предположении, что напряженное состояние не зависит от пути нагружения. При этом матрица податливости определялась средним скачком смещения на трещине. На примере прямолинейного разреза с неоднородным взаимодействием берегов [2] было показано, что напряженное состояние твердого тела в этом случае существенно зависит от пути нагружения.

В публикуемой работе, используя метод, развитый в [1], вычисляется матрица податливости среды, ослабленной трещинами с плавносмыкающимися берегами (неэллиптическими), в приближении малой их концентрации и с учетом зависимости напряженного состояния от пути нагружения. При этом матрица податливости связывает малые приращения тензоров эффективной деформации и напряжений и является функционалом траектории нагружения. Основой описания деформации пластины, ослабленной трещинами с плавносмыкающимися берегами, является анализ равновесия отдельной трещины при сложном нагружении.

1. Пусть твердое тело ослаблено неэллиптической трещиной длиной $2l$, уравнение которой в системе координат x_1, x_2 в ненагруженном состоянии имеет вид $x_2 = \pm V(x_1) = \pm b(1 - x_1^2/l^2)$, $2b$ — максимальная ширина трещины. Такая форма трещины в твердом теле использовалась в [3] при расчете модуля всестороннего сжатия трещиноватого материала. При этом, полагая $b/l \ll 1$, краевая задача ставилась на линии разреза.

На бесконечности на твердое тело действуют главные напряжения σ_1, σ_2 (фиг. 1), причем σ_1 направлено под углом α к оси x_1 ($\sigma_1 \leq 0, \sigma_2 \leq 0, |\sigma_1| \geq |\sigma_2|$).

Опишем напряженное состояние твердого тела с трещиной комплексными потенциалами $\Phi(z), \Psi(z)$ [4]:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad z = x_1 + ix_2 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\Phi'(z)$$

$$2G(u_1' + iu_2') = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}$$

$$\Omega(z) = \overline{\Phi(\bar{z})} + z\overline{\Phi'(\bar{z})} + \overline{\Psi(\bar{z})}, \quad u_i = \partial u_i(x_1, 0)/\partial x_1 \quad (i=1, 2)$$

где G — модуль сдвига, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напряженного состояния, $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации, ν — коэффициент Пуассона, u_1, u_2 — компоненты смещения вдоль осей x_1, x_2 соответственно. При этом $|z| \rightarrow \infty, \Phi(z) = \Gamma, \Omega(z) = \Gamma + \Gamma', \Psi(z) = \Gamma', \Gamma = (\sigma_1 + \sigma_2)/4, \Gamma' = -(\sigma_1 - \sigma_2) \times \exp(-2i\alpha)/2$.

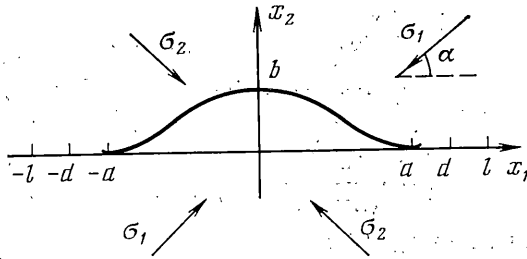
Под действием нормального напряжения берега неэллиптической трещины будут смыкаться и взаимодействовать на участке $[-l, -a]$ и $[a, l]$ (обозначим эту область L_1); область $[-a, a]$ свободна от напряжений и определится из уравнения $\sigma_{22}^{\pm}(\pm a) = 0$.

В результате действия сдвигового напряжения вдоль трещины возни-

кает область $[-l, -d]$ и $[d, l]$, в которой взаимные смещения берегов трещины отсутствуют (зона сцепления) и область взаимной подвижки $[-d, d]$. На участке $[-d, -a]$ и $[a, d]$ (обозначим его L_2) берега разреза взаимодействуют по закону Кулона $\sigma_{12}^{\pm} = \mu \sigma_{22}^{\pm}(x_1, 0)$, где μ — коэффициент трения.

Граница областей сцепления и взаимных смещений будет определяться из условия отсутствия сингулярности на границе этих областей [2]:

$$K_2^{\pm}(\pm d) = \mp \lim_{x_1 \rightarrow \pm d \mp 0} 2G \frac{\partial(u_1^+ - u_1^-)}{\partial x_1} \sqrt{\frac{l^2 - x_1^2}{l}} \frac{1}{(x_1 + 1)} = 0 \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Представим напряженное состояние в виде суперпозиции двух напряженных состояний, соответствующих нормальному и сдвиговому напряжениям вдоль трещины:

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) \quad (1.3)$$

$$|z| \rightarrow \infty, \quad \Phi_1(z) = \Gamma, \quad \Psi_1(z) = 1/2(\Gamma' + \overline{\Gamma'})$$

$$\Omega_1(z) = \Gamma + 1/2(\Gamma' + \overline{\Gamma'}), \quad \Phi_2(z) = 0$$

$$\Psi_2(z) = 1/2(\Gamma' - \overline{\Gamma'}), \quad \Omega_2(z) = -1/2(\Gamma' - \overline{\Gamma'})$$

Краевая задача на разрезе имеет вид

$$\sigma_{22}^{\pm}(x_1, 0) = 0 \quad (|x_1| \leq a) \quad (1.4)$$

$$u_2^+(x_1, 0) - u_2^-(x_1, 0) = \begin{cases} -2V(x_1), & (a \leq |x_1| \leq l) \\ 0, & (|x_1| \geq l) \end{cases}$$

$$\sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0) = \mu \sigma_{22}^{\pm}(x_1, 0) \quad (a \leq |x_1| \leq d) \quad (1.5)$$

$$\sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0) = 0 \quad (|x_1| \leq a)$$

$$u_1^+(x_1, 0) = u_1^-(x_1, 0) \quad (|x_1| \geq d)$$

Комплексные потенциалы $\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$, $\Phi_2(z)$, $\Omega_2(z)$, удовлетворяющие краевой задаче (1.4), (1.5) и условиям на бесконечности (1.3), имеют вид [4]:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i x(z)} \int_{L_1} \frac{\sigma_{22}^+(t, 0) x(t) dt}{t-z} - \frac{\sigma z}{2x(z)} - \frac{\Gamma' + \overline{\Gamma'}}{4} \quad (1.6)$$

$$\Omega_1(z) = \Phi_1(z) + 1/2(\Gamma' + \overline{\Gamma'}), \quad \sigma = -2[\Gamma + 1/4(\Gamma' + \overline{\Gamma'})] \geq 0$$

$$x(z) = (z^2 - l^2)^{1/2}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad x(z) = +z + \dots$$

$$\Phi_2(z) = -\frac{\mu}{2\pi x_1(z)} \int_{L_2} \frac{\sigma_{22}^+(t, 0) x_1(t) dt}{t-z} + \frac{i\tau z}{2x_1(z)} - \frac{\overline{\Gamma'} - \Gamma'}{4} \quad (1.7)$$

$$\Omega_2(z) = \Phi_2(z) + 1/2(\overline{\Gamma'} - \Gamma'), \quad \tau = (\overline{\Gamma'} - \Gamma')/2i \geq 0$$

$$x_1(z) = (z^2 - d^2)^{1/2}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad x_1(z) = z + \dots$$

Для определения неизвестного нормального напряжения в области контакта L_1 подставим выражения для комплексных потенциалов $\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$ (1.6) с использованием (1.1) в краевое условие (1.4), которое приводит к следующему сингулярному интегральному уравнению:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{L_1} \frac{\sigma_{22}^+(t, 0) x(t) dt}{t - x_1} = - \left(\frac{4Gi}{\kappa + 1} x(x_1) V'(x_1) + \sigma x_1 \right) \quad (a \leq |x_1| \leq l) \quad (1.8)$$

Решение уравнения (1.8) будет иметь вид [5]:

$$\sigma_{22}^\pm(x_1, 0) = - \frac{c[x_1^2 - 1/2(a^2 + l^2) + \sigma/c] x_1}{(x_1^2 - l^2)^{1/2}} \text{sign}(x_1) \quad (1.9)$$

$$c = \frac{12Gb}{(\kappa + 1)l^3} \quad (a \leq |x_1| \leq l)$$

Используя уравнение $\sigma_{22}^\pm(\pm a) = 0$, определим границу области контакта и свободной поверхности:

$$a = l \sqrt{1 - \frac{2\sigma}{cl^2}} \quad \left(\sigma \leq \frac{cl^2}{2}, \quad a = 0, \quad \sigma = \frac{cl^2}{2} \right) \quad (1.10)$$

При этом распределение нормального напряжения вдоль оси имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^\pm(x_1, 0) &= -cx_1(x_1^2 - a^2)^{1/2} \text{sign}(x_1) \quad (a \leq |x_1| \leq l) \\ \sigma_{22}^\pm(x_1, 0) &= 0 \quad (|x_1| \leq a) \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\sigma_{22}^\pm(x_1, 0) = -cx_1((x_1^2 - a^2)^{1/2} - (x_1^2 - l^2)^{1/2}) \text{sign}(x_1) \quad (|x_1| \geq l)$$

Подставляя (1.11), с учетом (1.1), (1.7) в (1.2) получим границу области сцепления и взаимных смещений:

$$d = l \sqrt{1 + \frac{2(\tau - \mu\sigma)}{\mu cl^2}} \quad (\tau \leq \mu\sigma) \quad d = l \quad (\tau \geq \mu\sigma) \quad (1.12)$$

Используя (1.1), (1.6), (1.7), (1.10), (1.11), (1.12), получим распределение скачка смещений вдоль оси $x_1(u_1(x_1, 0) = u_1^+ - u_1^-)$:

при $\tau \leq \mu\sigma$:

$$u_1(x_1, 0) = - \frac{(\kappa + 1)}{6\sigma} \mu c (d^2 - x_1^2)^{3/2} \quad (a \leq |x_1| \leq d) \quad (1.13)$$

$$u_1(x_1, 0) = 0 \quad (|x_1| \geq d)$$

$$u_1(x_1, 0) = - \frac{(\kappa + 1)\mu c}{6G} [(d^2 - x_1^2)^{3/2} - (a^2 - x_1^2)^{3/2}] \quad (|x_1| \leq a)$$

при $\tau \geq \mu\sigma$:

$$u_1(x_1, 0) = - \frac{(\kappa + 1)}{2G} \mu c \left[\frac{(l^2 - x_1^2)^{3/2}}{3} + \frac{(\tau - \mu\sigma)}{\mu c} (l^2 - x_1^2)^{1/2} \right] \quad (a \leq |x_1| \leq l) \quad (1.14)$$

$$u_1(x_1, 0) = 0 \quad (|x_1| \geq l)$$

$$\begin{aligned} u_1(x_1, 0) &= - \frac{(\kappa + 1)}{2G} \mu c \left[- \frac{(x_1^2 - a^2)^{3/2}}{3} + \right. \\ &\left. + \frac{(l^2 - x_1^2)^{3/2}}{3} + \frac{(\tau - \mu\sigma)}{\mu c} (l^2 - x_1^2)^{1/2} \right] \quad (|x_1| \leq a) \end{aligned}$$

Из (1.11), (1.13) следует, что при $\tau \geq \mu\sigma$ решение имеет особенность в конце трещины ($x_1 = \pm l$). В [3], используя несингулярное решение задачи сопряжения, для случая всестороннего сжатия было получено выражение для границы области контакта и свободной поверхности, которое совпадает с (1.10).

Таким образом, выражения (1.4), (1.6), (1.7) с учетом (1.10), (1.11), (1.12) определяют напряженное состояние твердого тела, ослабленного неэллиптической трещиной.

2. В п. 1 было рассмотрено равновесие неэллиптической трещины в предположении, что сначала на берега трещины действует нормальное давление, а затем сдвиговое напряжение.

Поскольку напряженное состояние, описываемое комплексными потенциалами $\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$, не зависит от способа нагружения, то зависимость от траектории нагружения будет рассматриваться для напряженного состояния, соответствующего сдвиговым напряжениям и скачкам смещения вдоль трещины и описываемое комплексными потенциалами $\Phi_2(z)$, $\Omega_2(z)$. Траектории нагружения представим в переменных: $\tau = \tau(\theta) = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha \geq 0$, $\tau(0) = 0$; $\sigma = \sigma(\theta)$, $\sigma = -(\sigma_1 + \sigma_2 - (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha) \geq 0$, $\sigma(0) = 0$; $\sigma_1 = \sigma_1(\theta)$, $\sigma_2 = \sigma_2(\theta)$, $\sigma_1(0) = 0$, $\sigma_2(0) = 0$, $\alpha = \text{const}$, где θ — параметр нагружения.

Будем рассматривать напряжения $\sigma \leq \sigma_h = 6Gb/(\kappa + 1)l$, при которых, согласно (1.11), трещина не закрывается. При нагружении твердого тела с трещиной будем различать два случая: $d|u_1|/d\theta \geq 0$ — нагрузка; $d|u_1|/d\theta \leq 0$ — разгрузка; $u_1 = u_1^+ - u_1^-$ — скачок смещения на трещине.

Краевая задача запишется

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0) &= \mu f \sigma_{22}^{\pm}, f = \text{sign}(d|u_1|/d\theta) \quad (a(\theta) \leq |x_1| \leq d(\theta)) \\ \sigma_{12}^{\pm} &= 0 \quad (|x_1| \leq a(\theta)), u_1^+ = u_1^- \quad (|x_1| \geq d(\theta)) \\ \sigma_{22}^{\pm} &= -cx_1(x_1^2 - a^2)^{1/2} \text{sign}(x_1) \quad (a \leq |x_1| \leq l) \quad \sigma_{22}^{\pm} = 0 \quad (|x_1| \leq a). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рассмотрим случай нагрузки $f = +1$. Для описания изменения напряженного состояния предположим, что при $\theta = \theta_1$ известно распределение напряжений $\sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0, \theta_1)$ и смещений $u_1^{\pm}(x_1, 0, \theta_1)$ вдоль разреза (параметры $a_1 = a_1(\theta_1)$, $d_1 = d_1(\theta_1)$).

Рассмотрим два возможных случая: $d' \geq 0$, $d' \leq 0$. Точка над функцией означает производную по θ .

Запишем с учетом (2.1) краевую задачу для приращения напряжений $\Delta\sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0, \theta)$ и смещений $\Delta u_1^{\pm}(x_1, 0, \theta)$ вдоль трещины ($d' \geq 0$):

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0, \theta) &= \mu\sigma_{22}^{\pm}(x_1, 0, \theta) - \sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0, \theta_1) \quad (|x_1| \leq d(\theta)) \\ \Delta(u_1^+ - u_1^-) &= 0 \quad (|x_1| \leq d(\theta)), |z| \rightarrow \infty, \Delta\Phi_2(z, \theta) = 0 \\ \Delta\Omega_2(z, \theta) &= -1/2\Delta(\overline{\Gamma'} - \Gamma'), \Delta\Gamma' = \Gamma'(\theta) - \Gamma'(\theta_1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решение краевой задачи (2.2) имеет вид [4]:

$$\Delta\Phi_2(z, \theta) = \frac{1}{2\pi x_1(z)} \int_{x_2}^d \frac{\Delta\sigma_{12}^{\pm}(t, \theta) x_1(t) dt}{t-z} + \frac{\Delta\tau iz}{2x_1(z)} - \frac{\Delta(\overline{\Gamma'} - \Gamma')}{4} \quad (2.3)$$

$$\Delta\Omega_2(z, \theta) = \Delta\Phi_2(z, \theta) + 1/2\Delta(\overline{\Gamma'} - \Gamma')$$

$$\Delta\tau = \Delta(\overline{\Gamma'} - \Gamma')/2i, x_1(z) = (z^2 - d^2)^{1/2}$$

Используя (1.1), (1.2), (2.3), получим выражение, определяющее границу зоны приращения скачка смещения

$$\pi d(\Delta\tau - \mu\Delta\sigma) = - \int_{d_1}^d \frac{\sigma_1(t, \theta_1) (d^2 - t^2)^{1/2} dt}{t-d} \quad (2.4)$$

$$\sigma_1 = \sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0, \theta_1) - \mu \sigma_{22}^{\pm}(x_1, 0, \theta_1) > 0$$

Как следует из (2.4), при $d' \geq 0$ необходимо, чтобы $\Delta\tau \geq \mu\Delta\sigma$.

Рассмотрим далее случай $d' \leq 0$, в котором область взаимных смещений уменьшается, а $\sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0, \theta_1) = \mu\sigma_{22}^{\pm}(x_1, 0, \theta_1)$ ($|x_1| \leq d(\theta)$). Используя (1.1), (1.2), (2.3), получим $d(\theta) = a(\theta)$. Подставляя (2.3) в (2.2), с учетом (2.6) будем иметь

$$\Delta u_1 = -\Delta\tau (a^2 - x_1^2)^{1/2} \frac{(\kappa+1)}{2G}, \quad u_1 = -\int_a^{x_1} \frac{\tau d\theta}{(a^2 - x^2)^{1/2}} \frac{(\kappa+1)}{2G} \quad (2.5)$$

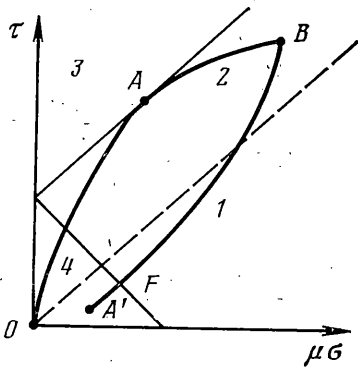
$$\theta^* = \theta \text{ при } |x_1| \leq a(\theta), \quad a(\theta^*) = x_1 \text{ при } |x_1| \geq a(\theta)$$

Как следует из (2.4), (2.5), при $d' \leq 0$ необходимо $\Delta\tau \leq \mu\Delta\sigma$, $d\tau/d\theta \geq 0$.

Таким образом, область L_2 отсутствует и приращение взаимных смещений происходит только на свободной поверхности.

На плоскости $(\tau, \mu\sigma)$ можно выделить две области: при попадании траектории нагружения в область 1 взаимные смещения возникают только на свободной поверхности, а в области 2 — вдоль всей трещины (фиг. 2). Таким образом, при нагружении по траекториям, лежащим в области 1, напряженное состояние твердого тела, ослабленного неэллиптической трещиной, является неспециальным, а в области 2 — сингулярным, определяемым коэффициентом интенсивности напряжений $K_2^{\pm} = \max(\tau - \mu\sigma)l^{1/2}$.

При нагружении по траекториям, входящим в область 2, таким, что $d\tau/d\theta > \mu d\sigma/d\theta$, происходит монотонное увеличение взаимных смещений (OA, фиг. 2), определяемое (1.13). На участке траектории нагружения $d\tau/d\theta < \mu d\sigma/d\theta$ взаимные смещения изменяются только на свободной поверхности. При попадании в область 3



Фиг. 2

($\tau - \tau_A > \mu(\sigma - \sigma_A)$) приращение смещений занимает весь разрез, а коэффициент интенсивности напряжений увеличивается.

Рассмотрим теперь случай разгрузки $f = -1$ в (2.1). Для описания изменения напряженного состояния предположим, что при $\theta = \theta_1$ известны распределение напряжений $\sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0, \theta_1)$ и смещений $u_1^{\pm}(x_1, 0, \theta_1)$ вдоль трещины и параметры $a_1 = a(\theta_1)$, $d_1 = d(\theta_1)$. Рассмотрим два случая: $d' \geq 0$, $d' \leq 0$.

Краевая задача в первом случае ($d' \geq 0$) для приращения напряжений $\Delta\sigma_{12}^{\pm}$ и смещений Δu_1^{\pm} вдоль трещины с учетом (2.1) формулируется так:

$$\Delta\sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0, \theta) = -\mu\sigma_{22}^{\pm}(x_1, 0, \theta) - \sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0, \theta_1) \quad (|x_1| \leq d(\theta))$$

$$\Delta(u_1^+ - u_1^-) = 0 \quad (|x_1| \geq d(\theta)) \quad (2.6)$$

$$|z| \rightarrow \infty, \quad \Delta\Phi_2(z, 0) = 0, \quad \Delta\Omega_2(z, 0) = -1/2\Delta(\Gamma' - \bar{\Gamma}')$$

Решение краевой задачи (2.6) имеет вид (2.3). Используя (1.1), (1.2), получим выражение, определяющее границу зоны приращения взаимных смещений

$$\pi d(\Delta\tau + \mu\Delta\sigma) = -\int_{a_1}^d \frac{\sigma_1(d^2 - t^2)^{1/2}}{t - d} dt \quad (2.7)$$

$$\sigma_1 = \sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0, \theta_1) + \mu\sigma_{22}^{\pm}(x_1, 0, \theta_1) < 0$$

Из (2.7) следует, что условие $d \leq 0$ имеет место для участков траектории, где $\Delta\tau \leq -\mu\Delta\sigma$.

Во втором случае ($d \leq 0$) область взаимных смещений уменьшается, а $\sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0, \theta_1) = -\mu\sigma_{22}^{\pm}(x_1, 0, \theta_1)$, $|x_1| \leq d(\theta)$. Используя (1.1), (1.2), (2.3), с учетом (2.6) получим $d(\theta) = a(\theta)$. В этом случае область L_2 отсутствует и изменение взаимных смещений происходит только на свободной поверхности и определяется выражением (2.5). Траектории, для которых имеет место $d \leq 0$, определяются из (2.5), (2.7) $\Delta\tau \geq -\mu\Delta\sigma$, $d\tau/d\theta < 0$.

Если при разгрузке область возвратных смещений занимает весь разрез, то в (2.1) $d(\theta) = l$. При этом взаимные смещения на трещине определяются выражением (1.13), в котором надо изменить знак перед μ , а коэффициент интенсивности напряжений будет равен $K_2^{\pm} = \min(\tau + \mu\sigma) l^{1/2}$. Условие, при котором возвратные смещения занимают весь разрез, определяется неравенством $\tau_A - \tau \leq \mu(\sigma + \sigma_A)$ (область 4, фиг. 2) из условия $K_2^{\pm} \leq K_2^{\pm}(A)$. Вне этой области размер зоны возвратных смещений $d(\theta) < l$ (участок FA' траектории BFA' , фиг. 2), а в области 4 занимает весь разрез.

Таким образом, при нагружении твердого тела, ослабленного трещиной с исходным раскрытием, изменение взаимных смещений в отличие от случая закрытых трещин [2] происходит на любой траектории нагружения.

3. Рассмотрим деформацию изотропной пластины, ослабленной трещинами со взаимодействующими берегами. Предположим, что трещины между собой не взаимодействуют. Обозначим σ_{lm} — тензор напряжений, а $\delta\sigma_{lm}$ — приращение тензора напряжений. Эффективная деформация среды $\varepsilon_{ik} = (\partial u_i / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_i)$, а $\delta\varepsilon_{ik} = (\partial \delta u_i / \partial x_k + \partial \delta u_k / \partial x_i) / 2$ — приращение тензора эффективной деформации. (u_i — макроскопическое смещение, $i, k, l, m = 1, 2$).

Используя результаты [1], получим выражение приращения тензора деформации как функции среднего скачка смещения на трещине

$$\delta\varepsilon_{ik} = \delta\varepsilon_{ik}^{\circ} + \frac{1}{2} \int [n_i \delta V_k + n_k \delta V_i] F dY \quad (3.1)$$

$$\delta\varepsilon_{ik}^{\circ} = S_{iklm}^{\circ} \delta\sigma_{lm}$$

$$S_{iklm}^{\circ} = -\frac{\nu_0}{E_0} \delta_{ik} \delta_{lm} + \frac{(1 + \nu_0)}{2E_0} (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl})$$

Здесь $\delta\varepsilon_{ik}^{\circ}$ — деформация сплошной среды, ν_0 — коэффициент Пуассона, E_0 — модуль Юнга сплошной среды, Y — совокупность координат центров трещины, $n_i = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$ — нормаль к трещине, φ — угол между осью x_1 и трещиной, δV_k — приращение k -й компоненты скачка смещений на трещине, усредненной по ее длине, F — функция распределения трещин, введенная в [1].

Ставится задача о нахождении матрицы податливости S_{iklm} , связывающей приращения тензоров деформации и напряжений $\delta\varepsilon_{ik} = S_{iklm} \delta\sigma_{lm}$.

Приращение среднего скачка смещения на трещине имеет вид $\delta V_i = -\delta\sigma_{lm} [B_1 n_l n_m n_i + (B_2 \tau_l n_m + \mu B_3 n_l n_m) \tau_i]$, $\tau_i = (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Коэффициенты B_i зависят от пути нагружения и определяются по методу, развитому в п. 2. В случае, если трещина раскрыта, следует положить $\mu = 0$, а B_1, B_2 для разреза $B_1 = B_2 = \pi l^2 / 8E_0$ [1], $B_3 = 0$, а если полностью закрыта, то в δV_i $B_1 = 0$.

Подставляя δV_i в выражение для $\delta\varepsilon_{ik}$, с учетом (3.1) найдем матрицу податливости

$$S_{iklm} = S_{iklm}^{\circ} + S_{iklm}^c \quad (3.2)$$

$$S_{iklm}^c = \frac{1}{4\pi} \int (J_{ilm} n_k + J_{klm} n_i) F(l, \varphi) dl d\varphi$$

$$J_{ilm} = B_1 n_l n_m n_i + (B_2 n_l \tau_m + \mu B_3 n_l n_m) \tau_i$$

Если берега трещины не контактируют, это выражение совпадает с аналогичным в [1].

Рассмотрим случай отсутствия сил трения, когда среда ослаблена разрезами, берега которых контактируют при любой их ориентации. Используя (3.3), при этом $\mu=0$, $B_1=0$, вычислим матрицу податливости для изотропного распределения разрезов с плотностью N :

$$S_{iklm} = -\nu \delta_{ik} \delta_{lm} / E + 1/2 (1+\nu) (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) / E$$

$$E = E_0 (1 - \pi \Omega / 4), \quad \nu = \nu_0 + 1/4 \pi \Omega (1 - \nu_0), \quad \Omega = N l^2$$

В этом случае трещиноватая среда, так же, как и в [1], является изотропной с эффективными модулями ν , E .

4. Рассмотрим деформацию изотропной пластины, ослабленной неэллиптическими трещинами длиной $2l$, распределенными изотропно с плотностью N , под действием одноосной нагрузки $\sigma_{im} = S(\theta) \delta_{i2} \delta_{m2}$, $S(\theta) \leq 0$, $d|S|/d\theta > 0$. Тензор податливости определяется выражением (3.3) через коэффициенты B_i . Используя результаты п. 2, в случае нагрузки получим

$$|S| \leq \frac{c l^2}{2}, \quad c = \frac{12 G b}{(\kappa+1) l^3}, \quad \kappa = \frac{(3-\nu_0)}{(1+\nu_0)} \quad (4.1)$$

$$B_1(\varphi) = \pi a^2 (\kappa+1) / (4G) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

$$B_2(\varphi) = 1/4 \pi l^2 (\kappa+1) / G \quad (\beta \leq \varphi \leq \pi/2)$$

$$B_2(\varphi) = 1/4 \pi a^2 (\kappa+1) / G \quad (0 \leq \varphi \leq \beta, \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi, \beta = \arctg \mu)$$

$$B_3(\varphi) = 1/4 \pi (\kappa+1) (a^2 - l^2) / G \quad (\beta \leq \varphi \leq \pi/2)$$

$$B_3(\varphi) = -1/4 \pi (\kappa+1) (a^2 - l^2) / G \quad (\pi/2 \leq \varphi \leq \pi - \beta)$$

$$B_3(\varphi) = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \beta, \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi)$$

$$c l^2 / 2 \leq |S| \leq c l^2 (1 + \mu^2) / 2$$

$$B_1 = 1/4 \pi a^2 (\kappa+1) / G \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_1)$$

$$B_1 = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \pi - \varphi_1 \leq \varphi \leq \pi, \varphi_1 = \arccos(\sqrt{-c l^2 / 2 S}))$$

$$B_2 = 1/4 \pi l^2 (\kappa+1) / G \quad (\beta \leq \varphi \leq \pi/2, \pi/2 \leq \varphi \leq \pi - \beta)$$

$$B_2 = 1/4 \pi a^2 (\kappa+1) / G \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \beta, \pi - \varphi_1 \leq \varphi \leq \pi - \beta)$$

$$B_3 = 1/4 \pi (a^2 - l^2) (\kappa+1) / G \quad (\beta \leq \varphi \leq \pi/2)$$

$$B_3 = -1/4 \pi (a^2 - l^2) (\kappa+1) / G \quad (\pi/2 \leq \varphi \leq \pi - \beta)$$

$$B_3 = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \beta, \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi), \quad |S| \geq c l^2 (1 + \mu^2) / 2$$

$$B_1(\varphi) = 1/4 \pi a^2 (\kappa+1) / G \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_1)$$

$$B_1(\varphi) = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \pi - \varphi_1 \leq \varphi \leq \pi)$$

$$B_2(\varphi) = 1/4 \pi l^2 (\kappa+1) / G \quad (\beta \leq \varphi \leq \pi - \beta)$$

$$B_2(\varphi) = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \beta, \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi)$$

$$B_3(\varphi) = \pi (a^2 - l^2) (\kappa+1) / (4G) \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \pi/2)$$

$$B_3(\varphi) = -\pi (a^2 - l^2) (\kappa+1) / (4G) \quad (\pi/2 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_1)$$

$$B_3(\varphi) = \pi l^2 (\kappa+1) / (4G) \quad (\beta \leq \varphi \leq \varphi_1)$$

$$B_3(\varphi) = -\pi l^2 (\kappa+1) / (4G) \quad (\beta \leq \varphi \leq \varphi_1)$$

$$B_3(\varphi) = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \beta, \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi)$$

Используя (3.2), (4.1), вычислим изменение объемной деформаций $\delta \varepsilon_v = \delta \varepsilon_{11} + \delta \varepsilon_{22}$ и деформаций $\delta \varepsilon_{11}$, $\delta \varepsilon_{22}$:

$$\delta \varepsilon_{22}^c = \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} (B_1 \cos^4 \varphi + B_2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \mu B_3 \cos^3 \varphi \sin \varphi) d\varphi \delta S \quad (4.2)$$

$$\delta \varepsilon_v^c = \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_1 \cos^2 \varphi d\varphi \delta S, \quad \delta \varepsilon_{11}^c = \delta \varepsilon_v^c - \delta \varepsilon_{22}^c$$

$$\delta \varepsilon_v = \delta \varepsilon_v^0 + \delta \varepsilon_v^c, \quad \delta \varepsilon_{11} = \delta \varepsilon_{11}^0 + \delta \varepsilon_{11}^c, \quad \delta \varepsilon_{22} = \delta \varepsilon_{22}^0 + \delta \varepsilon_{22}^c$$

Подставляя (4.1) в (4.2), получим изменение деформации при нагружении в безразмерных переменных $S' = S/(cl^2)$, $\varepsilon_{ik}' = l\varepsilon_{ik}/b$, $\Omega = Nl^2$:

$$\begin{aligned} & |S'| \leq 1/2, \quad \delta \varepsilon_{22}'^c = {}^3/2 \Omega [\pi + {}^1/2 S' ({}^5/2 \pi + \beta - \\ & \quad - {}^1/4 \sin 4\beta + {}^1/3 \sin^3 2\beta + {}^8/3 \mu \cos^6 \beta)] \delta S' \\ & {}^1/2 \leq |S'| \leq (1 + \mu^2)/2, \quad \delta \varepsilon_{22}'^c = {}^3/2 \Omega (\pi - \sin \varphi_1 \cos^3 \varphi_1 - \\ & \quad - {}^3/2 (\varphi_1 + {}^1/2 \sin 2\varphi_1) - {}^1/2 (\varphi_1 - {}^1/4 \sin 4\varphi_1) + {}^1/2 S' ({}^5/2 \pi - \\ & \quad - {}^8/3 \sin \varphi_1 \cos^5 \varphi_1 - {}^{10}/3 \cos^3 \varphi_1 \sin \varphi_1 - 5(\varphi_1 + {}^1/2 \sin 2\varphi_1) + \\ & \quad + \beta - \varphi_1 - {}^1/4 (\sin 4\beta - \sin 4\varphi_1) + {}^1/3 (\sin^3 2\beta - \sin^3 2\varphi_1) + \\ & \quad + {}^8/3 \mu (\cos^6 \beta)) \delta S' \\ & |S'| \geq (1 + \mu^2)/2, \quad \delta \varepsilon_{22}'^c = {}^3/2 \Omega [\pi - \sin \varphi_1 \cos^3 \varphi_1 - \\ & \quad - {}^3/2 (\varphi_1 + {}^1/2 \sin 2\varphi_1) - {}^1/2 (\beta - {}^1/4 \sin 4\beta) + \\ & \quad + \mu (\cos^4 \varphi_1 - \cos^4 \beta) + {}^1/2 S' ({}^5/2 \pi - \\ & \quad - {}^8/3 \sin \varphi_1 \cos^5 \varphi_1 - {}^{10}/3 \cos^3 \varphi_1 \sin \varphi_1 - 5(\varphi_1 + \\ & \quad + {}^1/2 \sin 2\varphi_1) + {}^8/3 \mu \cos^6 \varphi_1)] \delta S', \\ & \delta \varepsilon_{22} = \delta \varepsilon_{22}^0 + \delta \varepsilon_{22}^c \end{aligned} \quad (4.3)$$

При $|S'| \rightarrow \infty$ $\varphi_1 \rightarrow \pi/2$, что соответствует случаю закрытых трещин. При этом $\delta \varepsilon_{22}'^c = {}^3/2 \Omega ({}^1/4 \pi - \mu \cos^4 \beta - {}^1/2 (\beta - \sin 4\beta/4)) \delta S'$. Объемная деформация $\delta \varepsilon_v'^c = {}^3/4 \Omega \pi (1 + {}^3/2 S') \delta S'$ при $|S'| \leq 1/2$, $\delta \varepsilon_v'^c = {}^3/4 \Omega [\pi - (2\varphi_1 + \sin 2\varphi_1) + S' ({}^3/2 \pi - 2 \sin \varphi_1 \cos^3 \varphi_1 - 3(\varphi_1 + {}^1/2 \sin 2\varphi_1))] \delta S'$ при $|S'| \geq 1/2$.

Рассмотрим теперь траекторию разгрузки: $d|S|/d\theta < 0$. Предположим, что среда была нагружена до значения $S = S_1$. Как следует из результатов п. 2, напряженное состояние при разгрузке зависит от распределения напряжений $\sigma_{12}^\pm(x_1, 0, \theta_1)$ вдоль трещины в конце пути нагружения $S = S_1$. Используя (2.3), (2.4) (2.6), определим σ_{12}^\pm к моменту окончания нагрузки

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^\pm(x_1, 0, \theta_1) &= -\mu x_1 c (x_1^2 - a_1^2)^{1/2} \text{sign}(x_1) \quad (a \leq |x_1| \leq l, \beta \leq \varphi \leq \pi/2) \\ \sigma_{12}^\pm(x_1, 0, \theta_1) &= -\text{tg} \varphi \mu x_1 (x_1^2 - a_1^2)^{1/2} \text{sign}(x_1) \quad (a \leq |x_1| \leq l, 0 \leq \varphi \leq \beta) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\sigma_{12}^\pm(x_1, 0, \theta_1) = 0 \quad (|x_1| \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi) \quad a_1 = l \sqrt{1 - 2S_1 \cos^2 \varphi / (cl^2)}$$

Используя результаты п. 2 в случае разгрузки и (4.4), получим границу областей сцепления и взаимных смещений

$$d=l, \quad \left(\varphi_2 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_2, \quad \varphi_2 = \text{arctg} \left[\frac{S_1 + S}{\mu(S_1 - S)} \right] \right)$$

$$d=l \left(1 - \frac{\mu(\sigma + \sigma_1) + (\tau - \tau_1)}{c\mu l^2} \right)^{1/2} \quad (\beta \leq \varphi \leq \varphi_2, \pi - \varphi_2 \leq \varphi \leq \pi - \beta) \quad (4.5)$$

$$d=a \quad (0 \leq \varphi \leq \beta, \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi)$$

$$\sigma = -S \cos^2 \varphi, \quad \sigma_1 = -S_1 \cos^2 \varphi,$$

$$\tau = -S \sin \varphi \cos \varphi, \quad \tau_1 = -S_1 \sin \varphi \cos \varphi$$

С учетом (3.3), (4.4), (4.5) получим выражение для коэффициентов

$$B_i(\varphi): \quad |S_1| \leq \frac{cl^2}{2}, \quad B_1(\varphi) = \frac{\pi a^2(\chi+1)}{4G} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi) \quad B_2(\varphi) = \frac{\pi d^2(\chi+1)}{4G} \quad (\beta \leq \varphi \leq \pi - \beta) \quad (4.6)$$

$$B_2(\varphi) = \frac{\pi a^2(\chi+1)}{4G} \quad (0 \leq \varphi \leq \beta, \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi) \quad B_3(\varphi) = -\frac{\pi(d^2 - a^2)(\chi+1)}{4G} \quad \left(\beta \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$B_3(\varphi) = \frac{\pi(d^2 - a^2)(\chi+1)}{4G} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi - \beta \right) \quad B_3(\varphi) = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \beta, \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi)$$

$$\frac{cl^2}{2} \leq |S_1| \leq \frac{(1+\mu^2)cl^2}{2}, \quad B_1(\varphi) = \frac{\pi a^2(\chi+1)}{4G} \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_1)$$

$$B_1(\varphi) = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \pi - \varphi_1 \leq \varphi \leq \pi), \quad B_2(\varphi) = 1/4\pi d^2(\chi+1)/G \quad (\beta \leq \varphi \leq \pi - \beta)$$

$$B_2(\varphi) = 1/4\pi a^2(\chi+1)/G \quad (\beta \leq \varphi \leq \varphi_1, \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi - \varphi_1)$$

$$B_2(\varphi) = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \beta, \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi)$$

$$B_3(\varphi) = -1/4\pi(d^2 - a^2)(\chi+1)/G \quad (\beta \leq \varphi \leq \pi/2)$$

$$B_3(\varphi) = 1/4\pi(d^2 - a^2)(\chi+1)/G \quad (\pi/2 \leq \varphi \leq \pi - \beta), \quad B_3(\varphi) = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \beta, \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi)$$

$$|S_1| \geq \frac{(1+\mu^2)cl^2}{2}, \quad B_1(\varphi) = \frac{\pi a^2(\chi+1)}{4G} \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_1)$$

$$B_1(\varphi) = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \pi - \varphi_1 \leq \varphi \leq \pi) \quad B_2(\varphi) = \frac{\pi d^2(\chi+1)}{4G} \quad (\varphi_3 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_3)$$

$$B_2(\varphi) = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_3, \pi - \varphi_3 \leq \varphi \leq \pi) \quad B_3(\varphi) = -\frac{\pi(d^2 - a^2)(\chi+1)}{4G} \quad \left(\varphi_3 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$B_3(\varphi) = \frac{\pi(d^2 - a^2)(\chi+1)}{4G} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi - \varphi_3 \right), \quad B_3(\varphi) = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_3, \pi - \varphi_3 \leq \varphi \leq \pi)$$

$$\varphi = \Psi - \arcsin \left(\frac{2cl^2 + S + S_1}{\sqrt{(S_1 - S)^2 + \mu^2(S + S_1)^2}} \right), \quad \Psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{\mu(S + S_1)}{S_1 - S} \right)$$

Подставляя (4.6) в (4.2), вычислим изменение деформации при разгрузке в безразмерных величинах: $S' = S/(cl^2)$, $\varepsilon_{ik}' = \varepsilon_{ik}b/l$, $\Omega = Nl^2$:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{22}' &= \frac{3\Omega}{2} \left[\pi - \frac{3}{2} \left(A' + \frac{\sin 2A}{2} \right) - \sin A \cos^3 A - \frac{1}{2} \left(B - \frac{\sin 4B}{4} \right) + \right. \\ &+ \mu (\cos^4 A - \cos^4 B) + \frac{S'}{2} \left(\frac{5\pi}{2} - \frac{8 \sin A \cos^5 A}{3} - \frac{10 \sin A \cos^3 A}{3} - \right. \\ &- 5 \left(A + \frac{\sin 2A}{2} \right) + (C - B) - \frac{\sin 4C - \sin 4B}{4} + \frac{\sin^3 2C - \sin^3 2B}{3} + \\ &+ \left. \frac{8\mu \cos^6 C}{3} + \frac{8\mu}{3} (\cos^6 A - \cos^6 B) \right] + \frac{(S_1' - S')}{2} \left(C - D - \frac{\sin 4C - \sin 4D}{4} + \right. \\ &+ \left. \frac{\sin^3 2C - \sin^3 2D}{3} - \frac{4(1 - \mu^2)}{3\mu} (\cos^6 C - \cos^6 D) + \frac{2}{\mu} (\cos^4 C - \cos^4 D) \right) \delta S' \end{aligned}$$

$$|S_1'| \leq 1/2, \quad A=0, \quad B=0, \quad C=\varphi_2, \quad D=\beta,$$

$$1/2 \leq |S_1'| \leq (1 + \mu^2)/2, \quad A=\varphi_1, \quad B=\varphi_1, \quad C=\varphi_2, \quad D=\beta,$$

$$|S_1'| \geq (1 + \mu^2)/2, \quad A=\varphi_1, \quad B=\varphi_3, \quad C=\varphi_2, \quad D=\varphi_3$$

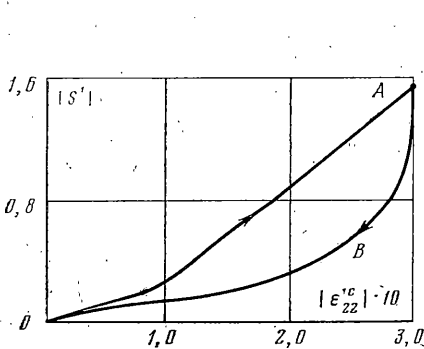
Интегрируя (4.3), (4.7) с учетом (4.2) вдоль траектории нагрузка — разгрузка, получим зависимость деформации ε_{22} от пути нагружения.

На фиг. 3 (кривая OAB) приведена зависимость $\varepsilon_{22}'^c$ при следующих параметрах нагружения: $\mu=0,6$; $\Omega=0,2$. Таким образом показано, что деформация среды, ослабленной неэллиптическими трещинами с взаимодействующими берегами, является нелинейной и необратимой, что отличается от результатов [1, 3, 6].

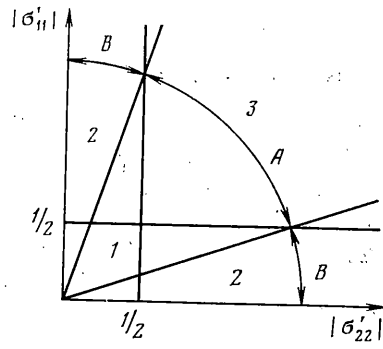
5. Рассмотрим изменение напряженного состояния в случае двухосного нагружения $\sigma_{ij}=\sigma_{11}(\theta)\delta_{i1}\delta_{j1}+\sigma_{22}(\theta)\delta_{i2}\delta_{j2}$, $\sigma_{11}\leq\sigma_{22}\leq 0$ в классе траекторий

$$\left| \frac{d\sigma_{11}}{d\theta} + \frac{d\sigma_{22}}{d\theta} \right| \geq \left| \frac{d\sigma_{11}}{d\theta} - \frac{d\sigma_{22}}{d\theta} \right| \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\mu}, \quad \left| \frac{d\sigma_{11}}{d\theta} \right| \geq \left| \frac{d\sigma_{22}}{d\theta} \right|$$

В этом случае взаимные смещения на трещине, согласно (2.5), имеют



Фиг. 3



Фиг. 4

место только на свободной поверхности. Используя результаты пп. 2, 3, вычислим коэффициенты $B_i(\varphi)$, а по соотношениям (3.2) — матрицу податливости:

$$B_3=0 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi), \quad |\sigma_{11}| \leq \frac{cl^2}{2}, \quad B_1=B_2 = \frac{\pi a^2(\kappa+1)}{4G} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

$$S_{1111}^c = \frac{\Omega(\kappa+1)}{4G} \pi \left(1 + \frac{3\sigma_{11}'}{2} + \frac{\sigma_{22}'}{2} \right), \quad S_{1211}^c = S_{1222}^c = 0 \quad (5.1)$$

$$S_{2222}^c = \frac{\Omega(\kappa+1)}{4G} \pi \left(1 + \frac{\sigma_{11}'}{2} + \frac{3\sigma_{22}'}{2} \right)$$

$$|\sigma_{22}| \leq \frac{cl^2}{2} \leq |\sigma_{11}|, \quad B_1=B_2 = \frac{\pi a^2(\kappa+1)}{4G} \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \pi - \varphi_1 \leq \varphi \leq \pi)$$

$$S_{1111}^c = \frac{\Omega(\kappa+1)}{4G} \left[2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1 + \left[3 \left(\varphi_1 - \frac{\sin 2\varphi_1}{2} \right) - 2 \cos \varphi_1 \sin^3 \varphi_1 \right] \sigma_{11}' + \sigma_{22}' \left(\varphi_1 - \frac{\sin 4\varphi_1}{4} \right) \right]$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1 + \sigma_{11}' + \sigma_{22}'}{\sigma_{11}' - \sigma_{22}'} \right)$$

$$S_{2222}^c = \frac{\Omega(\kappa+1)}{4G} \left[2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1 + \left(3 \left(\varphi_1 - \frac{\sin 2\varphi_1}{2} \right) - 2 \cos \varphi_1 \sin^3 \varphi_1 \right) \sigma_{22}' + \sigma_{11}' \left(\varphi_1 - \frac{\sin 4\varphi_1}{4} \right) \right]$$

$$S_{1211}^c = S_{1222}^c = - \frac{\Omega(\kappa+1)}{2G} (\sin 2\varphi_1 + \sigma_{11}' \sin 4\varphi_1 - \sigma_{22}' \cos 4\varphi_1)$$

$$|\sigma_{22}| \geq \frac{c\ell^2}{2}, \quad S_{iklm}^c = 0, \quad S_{iklm} = S_{iklm}^0 + S_{iklm}^c, \quad \sigma_{ik}' = \frac{\sigma_{ik}}{c\ell^2}$$

На фиг. 4 показаны характерные области, возникающие при таком нагружении (в силу симметрии и область $|\sigma_{22}| \geq |\sigma_{11}|$). В области 1 все трещины имеют свободную поверхность, в 2 — часть трещин закрытого типа, а в 3 — все трещины закрыты. В пределах сектора $A [|\sigma_{11} + \sigma_{22}| \geq |\sigma_{11} - \sigma_{22}| ((1 + \mu^2)/\mu)^{1/2}]$ возможно существование траекторий, вдоль всего протяжения которых выполняется неравенство $\Delta t \leq \mu \Delta \sigma (d = a)$ и диссипации энергии на трещине не происходит. Для любых траекторий нагружения в секторе B характерно наличие диссипации энергии на трещине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салганик Р. Л. Механика тел с большим числом трещин. — Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4, с. 149–158.
2. Житнико́в Ю. В., Тулино́в Б. М. Взаимодействие между берегами разреза в сложно-напряженном состоянии. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 4, с. 168–172.
3. Mavko G. M., Nur A. The effect of noneleptical cracks on the compressibility of rocks. — J. Geophys. Res., 1978, v. 83, No. 9, p. 4459–4468.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 648 с.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
6. Walsh J. B. The effect of cracks on the uniaxial elastic compression of rocks. — J. Geophys. Res., 1965, v. 70, No. 2, p. 389–411.

Москва

Поступила в редакцию
30.XII.1984