

УДК 539.3.01

## О ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

ГЕРМАНОВИЧ Л. Н.

Последнее время широкое распространение получили способ термического разрушения хрупких тел [1]. При этом важное место занимает анализ полей температурных напряжений в разрушаемой области. А так как время разрушения обычно весьма невелико, то получение простых асимптотических выражений для температуры и напряжений при малых временах приобретает большое значение. Тем более, что реальный расчет по формулам, выражающим точное решение, как правило, практически невозможен из-за необходимости интегрирования для бесконечных областей и суммирования для конечных громоздких выражений, содержащих особенности.

При исследовании термического разрушения с макроскопических позиций критериев прочности весьма распространена модель упругого полупространства с местным нагревом поверхности [1, 2]. Нахождение точных решений задач термоупругости для полупространства не представляет затруднений, так как имеются хорошо разработанные методы [3, 4], которые, однако, приводят к столь сложным выражениям, что обычно сразу решают численными методами систему уравнений термоупругости [5] или ищут асимптотики при малых временах [6].

Случай осесимметричного гауссова распределения температуры вблизи поверхности исследован в [6]. Представляет интерес и рассмотрение плоского случая, так как, во-первых, он, по-видимому, позволяет понять все особенности разрушения (см., например, [5], где напряжения в полупространстве исследуются численными методами) и, во-вторых, в плоском случае получаются существенно более простые формулы, чем в осесимметричном.

1. В декартовых координатах  $x, y, z$  рассмотрим упругое полупространство  $z \geq 0$ , на границе которого происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой  $z < 0$ . Температура среды  $\Theta = \Theta_0 f(y)$ , где область значений  $f(y)$  — отрезок  $[0, 1]$ . Требуется найти температуру и напряжения внутри полупространства, если поля температуры и напряжений не связаны и условия квазистатики считаются выполненными.

Найдем сначала такую форму точного решения, которая позволяет выделить асимптотику при малых временах. Предварительно функцию  $f(y)$  представим в виде  $f_1(y) + f_2(y)$ , где  $f_1(y) = [f(y) + f(-y)]/2$  — четная функция  $y$ , а  $f_2(y) = [f(y) - f(-y)]/2$  — нечетная. В силу линейности описанной задачи термоупругости достаточно найти ее решения при  $\Theta = \Theta_0 f_1(y)$  и  $\Theta = \Theta_0 f_2(y)$  по отдельности, а результаты для температуры и напряжений сложить.

Краевую задачу теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (z > 0), \quad T < \infty \quad (y, z \leq \infty) \quad (1.1)$$

$$\partial T / \partial z = h [T - \Theta_0 f_1(y)] \quad (z = 0), \quad T = 0 \quad (t = 0)$$

удобно привести к безразмерным величинам, положив  $\Theta' = \Theta / \Theta_0$ ,  $T' = T / \Theta_0$ ,  $x' = x / \delta$ ,  $z' = z / \delta$ ,  $h' = h \delta$ ,  $t' = at / \delta^2$ , где  $\delta$  — некоторый характерный размер. Тогда в (1.1) следует положить  $a' = 1$  и  $\Theta_0 = 1$ . Штрихи далее для краткости опускаются.

Применяя преобразования Лапласа по  $t$ , получим

$$sT^* = \partial^2 T^* / \partial z^2 + \partial^2 T / \partial y^2 \quad (1.2)$$

$$\partial T^* / \partial z |_{z=0} = h [T^* |_{z=0} - f_1(y) / s] \quad (T^* = L_s [T])$$

где  $L_s$  — оператор преобразования Лапласа с параметром  $s$ . Так как  $f_1(y)$  — четная функция, то тепловой поток через плоскость  $y=0$  отсутствует, т. е. в (1.2) можно применить косинус-преобразования Фурье по  $y$ . Имеем

$$\frac{d^2 T^{*F}}{dz^2} = (s + \lambda^2) T^{*F}, \quad \frac{dT^{*F}}{dz} \Big|_{z=0} = h \left[ T^{*F} \Big|_{z=0} - \frac{f_1^F(\lambda)}{s} \right] \quad (1.3)$$

где  $T^{*F} = \Phi_{\lambda^c} [T^*]$ ,  $\Phi_{\lambda^c}$  — оператор косинус-преобразования Фурье с параметром  $\lambda$ :

$$f_1^F(\lambda) = \Phi_{\lambda^c} [f_1(y)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_1(y) \cos(\lambda y) dy$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (1.3) и обращая косинус-преобразования Фурье, найдем

$$T^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_1^F(\lambda) \cos(\lambda y) \frac{h \exp(-z\sqrt{s+\lambda^2})}{s(\sqrt{s+\lambda^2}+h)} d\lambda \quad (1.4)$$

Для нахождения изображений напряжений воспользуемся методом термоупругого потенциала [7], изображение которого в данном случае имеет вид

$$\Phi^* = \alpha h \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_0^{\infty} f_1^F(\lambda) \frac{\cos(\lambda y)}{s^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{\exp(-z\sqrt{s+\lambda^2})}{h+\sqrt{s+\lambda^2}} - \frac{\exp(-\lambda z)}{\lambda+h} \right\} d\lambda \quad (1.5)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения.

Используя бигармоническую функцию Эри

$$H^*(y, z, s) = \int_0^{\infty} [A(s, \lambda)z + B(s, \lambda)] \cos(\lambda y) e^{-\lambda z} d\lambda \quad (1.6)$$

граничные условия  $\sigma_{zz} = 0$ ,  $\sigma_{yz} = 0$  ( $z=0$ ), формулу (1.5) и соотношения из [7], найдем следующие изображения напряжений ( $E$  — модуль Юнга):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}^*}{D} &= -T^* - 2\nu h \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_1^F(\lambda) \frac{\cos(\lambda y)}{s^2} \left[ \frac{\lambda^2 + \lambda h}{h + \omega} - \lambda \right] e^{-\lambda z} d\lambda \\ \frac{\sigma_{yy}^*}{D} &= -T^* - h \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_1^F(\lambda) \frac{\cos(\lambda y)}{s^2} \left[ \frac{\lambda^2 e^{-\omega z}}{h + \omega} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \lambda^2 z - 2\lambda + \frac{-\lambda^3 z + \lambda^2(1 + hz) + 2h\lambda}{h + \omega} \right) e^{-\lambda z} \right] d\lambda \\ \frac{\sigma_{zz}^*}{D} &= h \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_1^F(\lambda) \frac{\cos(\lambda y)}{s^2} \left[ \frac{\lambda^2 e^{-\omega z}}{h + \omega} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \lambda^2 z - \frac{\lambda^3 z + \lambda^2(1 + hz)}{h + \omega} \right) e^{-\lambda z} \right] d\lambda \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\frac{\sigma_{yz}^*}{D} = h \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_1^F(\lambda) \frac{\sin(\lambda y)}{s^2} \left[ \left( \lambda - \frac{\lambda h}{h+\omega} \right) e^{-\omega z} + \left( \lambda^2 z - \lambda + \frac{-\lambda^3 z - \lambda^2 h z + h \lambda}{h+\omega} \right) e^{-\lambda z} \right] d\lambda, \quad w = \sqrt{s + \lambda^2}$$

где  $D = \alpha E / (1 - \nu)$ . В дальнейшем для сокращения записи положим  $D = 1$ . Обращение выражений (1.4), (1.7) осуществляется при помощи соотношений из [6, 8].

При этом получаются формулы, которые имеют чисто теоретический интерес и здесь не приводятся вследствие невысокой практической ценности, так как требуют вычисления несобственных интегралов от громоздких выражений, содержащих устранимые особенности, что затруднительно даже при помощи вычислительных машин. Обратимся поэтому к выделению асимптотик при малых временах.

2. Рассмотрим сначала температуру. Обращение (1.4) приводит к соотношению

$$T = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_1^F(\lambda) \cos(\lambda y) d\lambda \int_0^t e^{-\lambda \tau} L_{\tau}^{-1} \left[ \frac{h \exp(-z \sqrt{s})}{h + \sqrt{s}} \right] d\tau \quad (2.1)$$

где  $L_{\tau}^{-1}$  — оператор, обратный к оператору  $L_s$  (нижний индекс указывает аргумент оригинала).

Вводя обозначения

$$f_m(z, t) = L_t^{-1} \left[ \frac{h \exp(-z \sqrt{s})}{s^m (h + \sqrt{s})} \right] \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

и применяя к  $\exp(-\lambda^2 \tau)$  формулу Тейлора, найдем, что

$$T = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_1^F(\lambda) \cos(\lambda y) d\lambda \int_0^t d\tau f_0(z, \tau) \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{\lambda^{2n} \tau^n}{n!} + \delta_T^N \quad (2.3)$$

$$\delta_T^N = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_1^F(\lambda) \cos(\lambda y) d\lambda \int_0^t d\tau f_0(z, \tau) (-1)^{N+1} \frac{\lambda^{2N+2} \tau^{N+1}}{(N+1)!} e^{-\lambda^2 \tau} \\ (N=0, 1, 2, \dots, \quad 0 < \xi < t)$$

В определении асимптотического разложения [9, 10] для приближения и сравнения выберем одну и ту же систему функций

$$\mu_n(t) = (-1)^n \int_0^t f_0(z, \tau) \tau^n d\tau \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

Очевидно, что  $\mu_{n+1}(t) = o(\mu_n(t))$ , а  $\delta_T^N = O(\mu_n(t))$  при  $t \rightarrow 0$ . Поэтому, вводя обозначение

$$A_i(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_1^F(\lambda) \cos(\lambda y) \lambda^i d\lambda \quad (2.5)$$

приходим к искомому асимптотическому разложению

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{2n}}{n!} \mu_n(t) \quad (t \rightarrow 0) \quad (2.6)$$

и методом индукции можно доказать, что

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+n}}{(n-k)!} t^{n-k} A_{2n} f_{k+1}(z, t) \quad (t \rightarrow 0) \quad (2.7)$$

Для функций  $f_{k+1}(z, t)$  при помощи формул [11] можно получить значительно более простое соотношение, чем (2.2):

$$\begin{aligned}
 f_n(z, t) &= f_{n-1}(z, t)/h^2 - \varphi_{2n-1}(z, t)/h + \varphi_{2n}(z, t) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\
 f_0(z, t) &= \frac{h}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right) - h \exp(h^2 t + hz) \operatorname{erfc} \frac{z+2ht}{2\sqrt{t}} \\
 \varphi_m(z, t) &= L_t^{-1} \left[ \frac{e^{-z\sqrt{s}}}{s^{m/2}} \right] = (4t)^{(m-1)/2} t^{m-1} \operatorname{erfc} \frac{z}{2\sqrt{t}} \quad (m=2, 3, 4, \dots) \quad (2.8) \\
 \varphi_1(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right), \\
 i^k \operatorname{erfc} x &= -\frac{x}{k} i^{k-1} \operatorname{erfc} x + \frac{1}{2k} i^{k-2} \operatorname{erfc} x \quad (k=1, 2, 3, \dots) \\
 i^{-1} \operatorname{erfc} x &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2), \quad i^0 \operatorname{erfc} x = \operatorname{erfc} x
 \end{aligned}$$

Ошибка  $N$ -го приближения температуры ( $N=0, 1, 2, \dots$ ), которое получается, если под знаком бесконечной суммы оставить члены до номера  $N$  включительно, определяется из (2.3). Ее нетрудно найти воспользовавшись тем фактом, что

$$f_1(z, t) = \operatorname{erfc}(z/2\sqrt{t}) - \exp(h^2 t + hz) \operatorname{erfc}(z/2\sqrt{t} + h\sqrt{t}) \quad (2.9)$$

— решение одномерной задачи теплопроводности для полупространства с первоначально нулевой температурой и с конвективным теплообменом на поверхности со средой единичной температуры [12]. Поэтому  $0 \leq f_1(z, t) \leq 1$ , а  $f_0(z, t) \geq 0$ . Учитывая, что  $|\cos(\lambda y)| \leq 1$ ,  $\exp(-\lambda^2 \zeta) \leq 1$  и интегрируя в (2.3) по частям (по  $\tau$ ), найдем оценку погрешности  $N$ -го приближения температуры

$$|\delta_T^N| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{t^{N+1} f_1(z, t)}{(N+1)!} \int_0^\infty |f_1^F(\lambda)| \lambda^{2N+2} d\lambda, \quad \delta_T^N = o(t^{N+1}) \quad (t \rightarrow 0). \quad (2.10)$$

Асимптотические разложения напряжений при малых временах можно построить аналогичным образом, используя формулы (1.7). Опуская довольно громоздкие преобразования, приведем окончательный результат:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= -T + 2\nu h t B_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^{k+m+n}}{(n-k-m)!} \times \\
 &\quad \times t^{n-k-m} \{-2\nu [B_{2n+2} + h B_{2n+1}] f_{k+m+2}(0, t)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} &= -T - h t (z B_2 - 2B_1) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^{k+m+n}}{(n-k-m)!} \times
 \end{aligned}$$

$$\times t^{n-k-m} \{-A_{2n+2} f_{k+m+2}(z, t) - [-z B_{2n+3} + (1-hz) B_{2n+2} + 2h B_{2n+1}] f_{k+m+2}(0, t)\}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz} &= z h t B_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^{k+m+n}}{(n-k-m)!} t^{n-k-m} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \{A_{2n+2} f_{k+m+2}(z, t) - [zB_{2n+3} + (1+hz)B_{2n+2}] f_{k+m+2}(0, t)\} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} = & ht(zD_2 - D_1) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^{k+m+n}}{(n-k-m)!} \times \\ & \times t^{n-k-m} \{hC_{2n+1} [\psi_{k+m+2}(z, t) - f_{k+m+2}(z, t)] + \\ & + [-zD_{2n+3} - hzD_{2n+2} + hD_{2n+1}] f_{k+m+2}(0, t)\} \quad (t \rightarrow 0) \\ & \psi_m(z, t) = -\partial \varphi_{2m+1}(z, t) / \partial z \quad (m=2, 3, 4, \dots) \\ B_i(y, z) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda^i f_1^F(\lambda) \cos(\lambda y) e^{-\lambda z} d\lambda, \quad C_i(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda^i f_1^F(\lambda) \sin(\lambda y) d\lambda \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$D_i(y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \lambda^i f_1^F(\lambda) \sin(\lambda y) e^{-\lambda z} d\lambda \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

Оценку погрешностей  $N$ -х приближений напряжений ( $N=0, 1, 2, \dots$ ) дают неравенства

$$\begin{aligned} |\delta_{xx}^N| & \leq \frac{t^{N+2} f_1(0, t)}{(N+1)!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (\lambda^{2N+4} + h\lambda^{2N+3}) |f_1^F(\lambda)| d\lambda \\ |\delta_{yy}^N| & \leq \frac{t^{N+2} f_1(0, t)}{(N+1)!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (\lambda^{2N+4} + h\lambda^{2N+3}) \left(2 + \frac{1}{e}\right) |f_1^F(\lambda)| d\lambda \\ |\delta_{zz}^N| & \leq \frac{t^{N+2} f_1(0, t)}{(N+1)!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left[ \lambda^{2N+4} \left(2 + \frac{1}{e}\right) + \frac{h}{e} \lambda^{2N+3} \right] |f_1^F(\lambda)| d\lambda \\ |\delta_{yz}^N| & \leq \frac{t^{N+2}}{(N+1)!} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{e} \lambda^{2N+4} + \left(2 + \frac{1}{e}\right) h\lambda^{2N+3} \right] f_1(0, t) + \right. \\ & \left. + h\lambda^{2N+3} \operatorname{erfc} \frac{z}{2\sqrt{t}} \right\} d\lambda |f_1^F(\lambda)| \end{aligned} \quad (2.13)$$

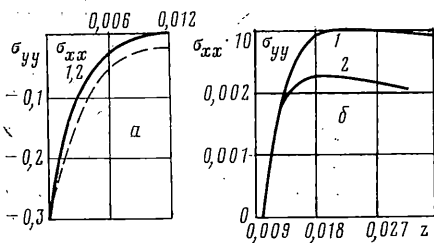
из которых видно, что  $\delta_{ij}^N = o(t^{N+2})$  ( $t \rightarrow 0$ ;  $i, j=x, y, z$ ).

Если вблизи поверхности полупространства задано нечетное распределение температуры  $\Theta = f_2(y)$ , то следует применить не косинус-, а синус-преобразование Фурье. При этом приходим к соотношениям, которые получаются из полученных выше заменой  $\cos(\lambda y) \rightarrow \sin(\lambda y)$ ,  $\sin(\lambda y) \rightarrow -\cos(\lambda y)$ ,  $f_1^F(\lambda) \rightarrow f_2^F(\lambda)$ , где

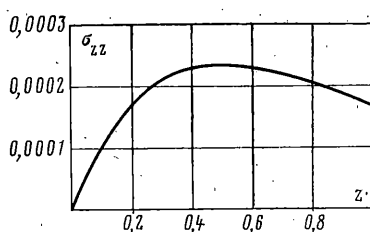
$$f_2^F(\lambda) = \Phi_{\lambda}^* [f_2(y)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_2(y) \sin(\lambda y) dy$$

3. Рассмотрим примеры. Прежде всего отметим, что от конкретного вида функции  $f(y)$  зависят только коэффициенты (2.5), (2.12), а виды самих разложений (2.7), (2.11) и оценки  $N$ -х приближений (2.10), (2.13) остаются неизменными. В общем случае расчет коэффициентов (2.5), (2.12) и оценок (2.10), (2.13) не представляет затруднений, если использовать методы численного интегрирования (разумеется, с помощью вычислительных машин). Однако во многих случаях вычисления становятся элементарными. Так, если

$$f(y) = f_1(y) = (y^2 + 1)^{-1} \quad (3.4)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

то на основании формул [13] можно видеть, что  $f_1^F(\lambda) = (\pi/2)^{1/2} e^{-\lambda}$ , и можно провести интегрирование в (2.5), (2.12), (2.10), (2.13):

$$\begin{aligned}
 |\delta_r^N| &\leq \frac{(2N+2)!}{(N+1)!} t^{N+1} f_1(z, t) \\
 |\delta_{xx}^N| &\leq \frac{(2N+3)!}{(N+1)!} (2N+4+h) t^{N+2} f_1(0, t) \\
 |\delta_{yy}^N| &\leq \frac{(2N+3)!}{(N+1)!} \left(2 + \frac{1}{e}\right) (2N+4+h) t^{N+2} f_1(0, t) \\
 |\delta_{zz}^N| &\leq \frac{(2N+3)!}{(N+1)!} \left[ (2N+4) \left(2 + \frac{1}{e}\right) + \frac{h}{e} \right] t^{N+2} f_1(0, t) \quad (3.2) \\
 |\delta_{yz}^N| &\leq \frac{(2N+3)!}{(N+1)!} \left\{ \left[ \frac{2N+4}{e} + h \left(2 + \frac{1}{e}\right) \right] f_1(0, t) + h \operatorname{erfc} \frac{z}{2\sqrt{t}} \right\} t^{N+2}
 \end{aligned}$$

$$A_i = (-1)^i \left[ \frac{\partial^i}{\partial r^i} \left( \frac{r}{y^2+r^2} \right) \right]_{r=1}, \quad B_i = (-1)^i \left[ \frac{\partial^i}{\partial r^i} \left( \frac{r}{y^2+r^2} \right) \right]_{r=1+z} \quad (3.3)$$

$$C_i = (-1)^i \left[ \frac{\partial^i}{\partial r^i} \left( \frac{y}{y^2+r^2} \right) \right]_{r=1}, \quad D_i = (-1)^i \left[ \frac{\partial^i}{\partial r^i} \left( \frac{y}{y^2+r^2} \right) \right]_{r=1+z}$$

( $i=0, 1, 2, \dots$ )

где нулевой производной функции считается сама функция.

Таким образом, в случае распределения (3.1) в окончательных выражениях остается только одна специальная, но хорошо затабулированная функция  $\operatorname{erfc} x$ , которая имеет простые аппроксимирующие и асимптотические формулы на всем интервале изменения  $x$  [11].

Примером другого «хорошего» распределения является функция

$$f(y) = f_2(y) = y(y^2+1)^{-1} \quad (3.4)$$

для которой  $f_2^F(\lambda)$  совпадает с изображением по Фурье  $f_1^F(\lambda)$  от функции (3.1), коэффициенты

$$A_i = (-1)^i \left[ \frac{\partial^i}{\partial r^i} \left( \frac{y}{y^2+r^2} \right) \right]_{r=1}, \quad B_i = (-1)^i \left[ \frac{\partial^i}{\partial r^i} \left( \frac{y}{y^2+r^2} \right) \right]_{r=1+z} \quad (3.5)$$

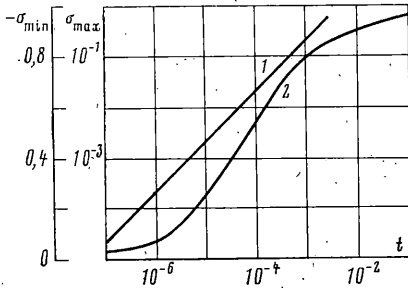
$$C_i = (-1)^{i+1} \left[ \frac{\partial^i}{\partial r^i} \left( \frac{r}{y^2+r^2} \right) \right]_{r=1}, \quad D_i = (-1)^{i+1} \left[ \frac{\partial^i}{\partial r^i} \left( \frac{r}{y^2+r^2} \right) \right]_{r=1+z}$$

оценки  $N$ -х приближений температуры и напряжений совпадают с (3.2).

4. Численные расчеты проводились для распределения (3.1). Некоторые результаты при  $h=100$  и  $t=10^{-5}$  представлены на фиг. 1-2 (сплошные кривые): кривые 1 соответствуют напряжениям  $\sigma_{xx}$ , а кривые 2 —  $\sigma_{yy}$ . Для вычислений использовались нулевые приближения для напряжений и первое приближение для температуры: уже этих членов асимптотиче-

ских разложений оказалось достаточно, чтобы погрешность не превышала 1% ( $\nu=0,2$ ).

Расчеты показали также, что наименьшее (наибольшее сжимающее) напряжение  $\sigma_{\min}$  реализуется на поверхности полупространства и действует на площадках, нормальных к поверхности, где также действует и максимальное (растягивающее) напряжение  $\sigma_{\max}$ , которое реализуется на оси симметрии. Изменения  $\sigma_{\max}$  (кривая 1) и  $\sigma_{\min}$  (кривая 2) с течением времени представлены на фиг. 3 (погрешность расчетов, для которых использовались те же, что и выше, члены разложений, не превышала 10%).



Фиг. 3

Отметим, что общепринятый метод расчета [4], который заключается в том, что напряжения полагаются равными

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -\alpha ET / (1-\nu) \quad (4.1)$$

приводит не только к количественной, но и к качественной ошибке в знаке (пунктирная кривая на фиг. 1).

Рассмотрим подробнее характер распределения температуры и напряжений в полупространстве при малых временах.

Из (2.5) находим, что в случае четного распределения  $A_0 = f_1(y)$ , так как соответствующий интеграл представляет собой косинус-преобразование Фурье от функции  $f_1^F(\lambda)$ . Аналогично используя синус-преобразование Фурье, получаем, что в случае нечетного распределения  $A_0 = f_2(y)$ . Отсюда находим нулевое приближение температуры в плоском случае  $T = f(y)f_1(z, t)$ , которое является асимптотически точным при  $t \rightarrow 0$  в том смысле, что относительная погрешность данной формулы стремится к нулю, если  $t \rightarrow 0$ .

Физически это означает, что в начальный момент времени температурное распределение распространяется вглубь полупространства, не «расплываясь»вширь. Причем использованием преобразования Ханкеля вместо преобразований Фурье аналогичное утверждение доказывается и для осесимметричного случая.

Использование конечного интегрального преобразования Фурье по угловой координате перед преобразованием Ханкеля доказывает высказанное утверждение и в общем случае произвольного несимметричного нагрева полупространства.

В случае напряжений любое приближение, даваемое формулами (2.11), является в указанном смысле асимптотически точным при  $t \rightarrow 0$ . Можно, однако, найти и более грубые асимптотически точные приближения напряжений. Таковыми являются, например, соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -T + 2\nu ht B_1, \quad \sigma_{yy} = -T - ht(zB_2 - B_1) \\ \sigma_{zz} &= htzB_2, \quad \sigma_{yz} = ht(zD_2 - D_1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

которые получаются отбрасыванием в (2.11) асимптотических рядов или, что то же самое, отбрасыванием в подынтегральных выражениях соотношений (1.7) членов, содержащих  $\omega$ . Оценка погрешностей формул (4.2) получается формальной подстановкой в выражения (2.13), (3.2) значения  $N = -1$ .

Погрешность общепринятого приближения (4.1) находится оценкой интегралов в (1.7) и определяется неравенствами

$$|\delta_{xx}| \leq t \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [ |f_1^F(\lambda)| + |f_2^F(\lambda)| ] [ h\lambda + f_1(0, t)(\lambda^2 + h\lambda) ] d\lambda$$

$$|\delta_{vv}| \leq t \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(2 + \frac{1}{e}\right) \int_0^{\infty} [ |f_1^F(\lambda)| + |f_2^F(\lambda)| ] [ h\lambda + f_1(0, t) (\lambda^2 + h\lambda) ] d\lambda$$

Нетрудно показать, что при  $t \rightarrow 0$  приближения (4.1) являются асимптотически точными только на поверхности полупространства (при  $z=0$ ), а в остальных точках (при  $z>0$ ) относительная ошибка формул (4.1) стремится к 100% при  $t \rightarrow 0$ , т. е. при  $z>0$  соотношения (4.1) в указанном смысле вообще не являются приближениями. При этом ошибка в 100% является предельной (при  $t \rightarrow 0$ ), а при конечных  $t$  она может быть значительно больше, чем и объясняется различным ход сплошной и пунктирной кривых на фиг. 1.

В заключение отметим, что изложенный метод решения задач термоупругости и выделения асимптотики применим и для случая полупространства, внутри которого действуют внутренние источники тепла. При этом остаются в силе результаты, описанные в настоящей статье.

Автор благодарен И. Д. Киллю за обсуждение результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Дмитриев А. П., Гончаров С. А.* Термическое и комбинированное разрушение горных пород. М.: Недра, 1978. 303 с.
2. *Дудолов Л. С.* О термическом разрушении горных пород.— Физ.-техн. пробл. разработки полезн. ископаемых, 1969, № 2, с. 102–106.
3. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.
4. *Дудолов Л. С.* Об одном способе решения уравнений упругого и термоупругого равновесия.— Физ.-техн. пробл. разработки полезн. ископаемых, 1965, № 5, с. 34–42.
5. *Колодкин А. Я., Серяков В. М.* Об одной квазистатической задаче термоупругости.— Динамика сплошной среды: Сб. статей. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродин. СО АН СССР, 1976, вып. 25, с. 55–60.
6. *Килль И. Д.* О термоупругих напряжениях внутри полупространства.— Инж. ж. МТТ, 1966, № 1, с. 140–144.
7. *Паркус Г.* Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 251 с.
8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 831 с.
9. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979. 320 с.
10. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
11. Справочник по специальным функциям. / Под ред. М. Абрамовича и И. Стигана. М.: Наука, 1979. 830 с.
12. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. 216 с.
13. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Москва

Поступила в редакцию  
10.XII.1982