

УДК 534.1

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕЗОНАНСЫ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

БОЛОТИН В. В.

Анализ поведения автоколебательных систем при внешних периодических воздействиях был начат еще на ранней стадии развития нелинейной механики [1]. Классическая задача о режимах захватывания в системе Ван дер Поля стала почти обязательным примером для руководств по теории нелинейных колебаний. Аналогичная задача о захватывании при параметрических воздействиях, по-видимому, осталась без внимания. Между тем эта задача не менее содержательна, демонстрирует ряд интересных явлений и поэтому вносит новое в понимание свойств нелинейных колебательных систем.

Ниже рассмотрены два типа автоколебательных систем с отрицательным линейным демпфированием. Основой первого типа служит уравнение Ван дер Поля, в котором существование устойчивых предельных циклов обеспечивается наличием положительного нелинейного демпфирования, интенсивность которого растет как квадрат обобщенной координаты. Второй тип построен на основе уравнения Релея с положительным нелинейным демпфированием, пропорциональным кубу обобщенной скорости. Эти уравнения дополнены нелинейными членами, представленными в виде полиномов от обобщенных координат. В частном случае эта добавочная нелинейность принята кубической. Соответствующие уравнения названы в данной статье уравнениями Ван дер Поля — Дурффинга и Релея — Дурффинга. Параметрическое воздействие принято гармоническим. Уравнения, содержащие параметрическое возбуждение, названы уравнениями Ван дер Поля — Дурффинга — Матье и Релея — Дурффинга — Матье. В частном случае, когда полиномиальная нелинейность отсутствует, имеем уравнения Ван дер Поля — Матье и Релея — Матье.

Главное внимание уделено резонансным явлениям типа захватывания в частотном диапазоне, отвечающем главному параметрическому резонансу, т. е. частоте внешнего воздействия, близкой к удвоенной собственной частоте. Стандартные методы нелинейной механики (малого параметра, усреднения и т. д.) приводят к идентичным или близким результатам для амплитудно-частотных зависимостей, описывающих режимы стационарных колебаний. Поэтому здесь применен прямой метод получения этих зависимостей, обладающий наибольшей наглядностью.

Детальный анализ устойчивости заменен бифуркационными соображениями [2], которые при необходимости могут быть подтверждены исследованием уравнений возмущенных колебаний. Показано, что для рассмотренных уравнений области захватывания существуют при сколь угодно малых амплитудах параметрического воздействия (в том числе при условиях, когда в соответствующей линейной системе с положительным демпфированием параметрические резонансы невозможны). Обсуждены типы амплитудно-частотных зависимостей при различных предположениях о характере нелинейных членов, а также явления затягивания колебаний, синхронизированных с параметрическим воздействием. Аналитическое исследование дополнено результатами численного эксперимента, иллюстрирующего поведение автоколебательной системы при параметрическом воздействии с медленно меняющейся частотой.

1. Рассмотрим вначале некоторые свойства исходных автоколебательных систем. Возьмем уравнения Ван дер Поля — Дурффинга и Релея — Дурффинга

$$u'' - \beta \omega_0 u' + 3\eta \omega_0 u^2 u' + \omega_0^2 [u + \gamma f(u)] = 0 \quad (1.1)$$

$$u'' - \beta \omega_0 u' + (\eta/\omega_0) u'^3 + \omega_0^2 [u + \gamma f(u)] = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $\omega_0$  — собственная частота линейной консервативной системы,  $\beta$  и  $\eta$  — безразмерные коэффициенты линейной и нелинейной составляю-

щих демпфирования соответственно,  $f(u)$  — полином степени  $n$  от обобщенной координаты  $u$ ; штрих обозначает дифференцирование по времени  $t$ . В уравнениях (1.1) и (1.2)  $\beta > 0$ ,  $\eta > 0$ , что обеспечивает самовозбуждение колебаний в окрестности начала координат фазовой плоскости и существование устойчивых предельных циклов. Величины  $\beta$  и  $\eta$  введены с коэффициентами, которые обеспечивают равенство характерных амплитуд для этих уравнений. Чтобы не усложнять вычислений, будем считать, что нелинейная характеристика  $f(u)$  содержит только нечетные степени. В частности, для классического уравнения Дуффинга  $f(u) = u^3$ .

Найдем амплитуды  $A_{SE}$  и частоты  $\omega_{SE}$  предельных циклов. При достаточно малых  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\eta$  периодические решения уравнений (1.1) и (1.2) близки к гармоническим. Поэтому положим

$$u(t) = A \cos \omega t + \dots \quad (1.3)$$

где  $A$  — амплитуда,  $\omega$  — частота автоколебаний, а точками обозначены члены, содержащие гармоники. В выражении (1.3) учтено, что для автоколебательных режимов выбор начальной фазы произволен.

Подставляя (1.3) в (1.1) и (1.2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях (или, что в сущности то же самое, применяя метод Бубнова — Галеркина), приходим к уравнениям относительно  $A$  и  $\omega$ . Соотношение между частотой и амплитудой одинаково для уравнения Ван дер Поля — Дуффинга и Релея — Дуффинга

$$\omega^2 / \omega_0^2 = 1 + \gamma F(A^2) \quad (1.4)$$

При этом использовано обозначение  $AF(A^2)$  для основного члена разложения функции  $f(u)$  в ряд Фурье, т. е.  $f(u) = AF(A^2) \cos \omega t + \dots$ . Для амплитуды аналогично получаем формулу  $A^2 = 4\beta/3\eta$  в случае Ван дер Поля — Дуффинга и  $A^2 = (4\beta/3\eta)(\omega_0^2/\omega^2)$  в случае Релея — Дуффинга. В результате в первом случае имеем

$$A_{SE} = A_0 = (4\beta/3\eta)^{1/2}, \quad \omega_{SE} = \omega_0 [1 + \gamma F(4\beta/3\eta)]^{1/2} \quad (1.5)$$

в то время как амплитуды  $A_{SE}$  для случая Релея — Дуффинга равны действительным положительным корням уравнения

$$A^2 [1 + \gamma F(A^2)] = A_0^2 \quad (1.6)$$

Количество этих корней зависит от свойств полинома  $f(u)$  и не превышает  $(n+1)/2$ . Частоту автоколебаний  $\omega_{SE}$  для каждого предельного цикла найдем по формуле (1.4), подставляя в нее один из корней уравнения (1.6).

Если  $\gamma = 0$ , то соотношения (1.4) — (1.6) дают  $A_{SE} = A_0$ ,  $\omega_{SE} = \omega_0$ , где  $A_0$  определяется по первой формуле (1.5). Пусть  $f(u) = u^3$ . Тогда  $F(A^2) = = 3/4 A^2$ , так что вторая формула (1.5) принимает вид

$$\omega_{SE} = \omega_0 (1 + \beta\gamma/\eta)^{1/2} \quad (1.7)$$

Для случая уравнения Релея — Дуффинга, учитывая (1.4) и (1.6), получим

$$A_{SE} = A_0 \sqrt{2} [1 \pm (1 + 4\beta\gamma/\eta)^{1/2}]^{-1/2}, \quad \omega_{SE} = (\omega_0/\sqrt{2}) [1 \pm (1 + 4\beta\gamma/\eta)^{1/2}]^{1/2} \quad (1.8)$$

При  $\gamma_1 > -1$ , где  $\gamma_1 = \beta\gamma/\eta$ , система Ван дер Поля — Дуффинга в рассматриваемом приближении имеет один предельный цикл. При  $-1/4 < \gamma_1 < 0$  в случае Релея — Дуффинга имеются два предельных цикла, из которых цикл с большей амплитудой неустойчив. Качественная зависимость амплитуд  $A_{SE}$  и частот  $\omega_{SE}$  автоколебаний от параметра  $\gamma_1$  показана на фиг. 1. Кривые 1 относятся к уравнению Ван дер Поля — Дуффинга, кривые 2 — к уравнению Релея — Дуффинга.

2. Пусть на автоколебательную систему действует параметрическое

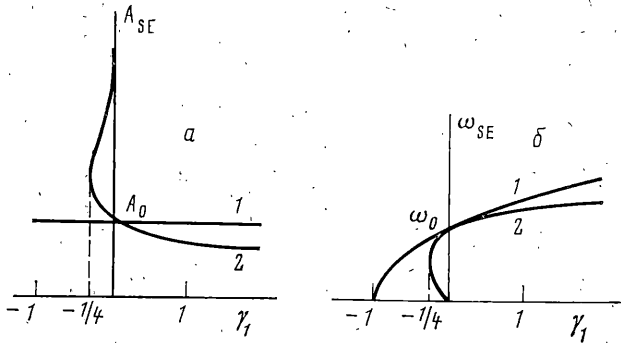
возбуждение заданной частоты  $\omega$ . Вместо уравнений (1.1) и (1.2) имеем

$$u'' - \beta \omega_0 u' + 3\eta \omega_0 u^2 u' + \omega_0^2 [(1 + 2\mu \cos \omega t)u + \gamma f(u)] = 0 \quad (2.1)$$

$$u'' - \beta \omega_0 u' + (\eta/\omega_0) u'^3 + \omega_0^2 [(1 + 2\mu \cos \omega t)u + \gamma f(u)] = 0 \quad (2.2)$$

из которых первое является уравнением Ван дер Поля — Дuffинга — Матье, второе — уравнением Релея — Дuffинга — Матье. Коэффициент параметрического возбуждения  $\mu > 0$ , причем не обязательно очень мал. Задача состоит в том, чтобы изучить колебательные процессы, происходящие в частотных диапазонах вблизи параметрических резонансов

$$\omega = 2\omega_0/p \quad (p=1, 2, \dots) \quad (2.3)$$



Фиг. 1

Рассмотрим главный параметрический резонанс, которому в (2.3) соответствует  $p=1$ . Колебания системы происходят с частотой, близкой к собственной  $\omega_0$ , однако они «захватываются» параметрическим воздействием. Частота этих колебаний  $\theta = \omega/2$ . Естественно искать решение уравнений (2.1) и (2.2) в виде

$$u(t) = a \cos(\omega t/2) + b \sin(\omega t/2) + \dots \quad (2.4)$$

где  $a$  и  $b$  — неизвестные коэффициенты, а точками обозначены члены, содержащие гармоники. Подстановка (2.4) в (2.1) после сравнения коэффициентов при  $\cos(\omega t/2)$  и  $\sin(\omega t/2)$  дает

$$(1 + \mu - \nu^2)a - \beta \nu (1 - A^2/A_0^2)b + \gamma F(A^2)a = 0 \quad (\nu = 1/2 \omega/\omega_0)$$

$$(1 - \mu - \nu^2)b + \beta \nu (1 - A^2/A_0^2)a + \gamma F(A^2)b = 0 \quad (A^2 = a^2 + b^2)$$

При  $A^2 > 0$  приходим к уравнению относительно амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний

$$[1 - \nu^2 + \gamma F(A^2)]^2 + \beta^2 \nu^2 (1 - A^2/A_0^2)^2 - \mu^2 = 0 \quad (2.5)$$

Полагая в (2.5)  $A=0$ , найдем частоты бифуркации, при которых амплитудно-частотные кривые ответвляются от тривиального решения

$$\nu^2 = 1 - 1/2 \rho^2 \pm (\mu^2 - \beta^2 + 1/4 \beta^4)^{1/2} \quad (2.6)$$

Частоты  $\omega = 2\nu\omega_0$ , определяемые согласно (2.6), совпадают с границами области неустойчивости (параметрического резонанса) для соответствующей линейной системы с положительным демпфированием [3]. При  $\mu < \mu_*$ , где  $\mu_* \approx \beta$ , область неустойчивости этой системы вырождается. Как увидим в дальнейшем, захватывание автоколебаний параметрическим воздействием, а также увеличение амплитуд вблизи резонансного соотношения  $\omega = 2\omega_0$ , сохраняется и в том случае, когда  $\mu < \mu_*$ . Полагая в (2.5)

$A=A_0$ , придем к соотношению

$$v^2=1\pm\mu+\gamma F(A^2) \quad (2.7)$$

дающему значения частот, при которых амплитудно-частотные кривые параметрических колебаний пересекаются с линией установившихся автоколебаний. Эти точки на амплитудно-частотных кривых также являются точками бифуркации. Соотношение (2.7) дает частоты, ограничивающие область неустойчивости соответствующей системы без демпфирования [3, 4], но при условии, что собственная частота найдена по формуле (1.4), т. е. с поправкой на нелинейную составляющую квазиупругости.

Этот результат имеет простое физическое истолкование: при автоколебательном режиме имеет место баланс энергии между линейной и нелинейными составляющими демпфирования. Поэтому демпфирование не влияет явно на положение этих точек бифуркации (хотя влияние сохраняется в неявной форме — через амплитуду автоколебаний). При  $\mu^2 \ll 1$ ,  $\beta^2 \ll 1$  решения уравнения (2.5) лежат вблизи скелетной линии, определяемой соотношением (1.4). Это соотношение определяет общий вид амплитудно-частотных кривых, а также характер изменения колебательного режима при переходе от установившихся автоколебаний к захватыванию.

Аналогично поступим в случае Релея — Дюффинга — Матье. Подставляя (2.4) в (2.2), придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} (1+\mu-v^2)a-\beta v(1-v^2A^2/A_0^2)b+\gamma F(A^2)a &=0 \\ (1-\mu-v^2)b+\beta v(1-v^2A^2/A_0^2)a+\gamma F(A^2)b &=0 \end{aligned}$$

которая при  $A^2 > 0$  дает

$$[1-v^2+\gamma F(A^2)]^2+\beta^2v^2(1-v^2A^2/A_0^2)^2-\mu^2=0 \quad (2.8)$$

Как и в случае Ван дер Поля — Дюффинга — Матье, точки бифуркации, в которых амплитудно-частотные кривые параметрического резонанса ответвляются от линии  $A=0$ , совпадают с границами области неустойчивости линейной системы с положительным демпфированием. Вычисления показывают, что и здесь отсутствует порог захватывания по коэффициенту параметрического возбуждения  $\mu$ . Это можно заключить, в частности, из того, что уравнение (2.8) удовлетворяется при  $\mu \rightarrow 0$ , если подставить в него частоту автоколебаний согласно (1.4) и амплитуду автоколебания из уравнения (1.6).

3. Обсудим более подробно случай  $\gamma=0$ . Если к тому же  $\mu=0$ , то приходим к классическим уравнениям Релея и Ван дер Поля, причем  $A_{se}=A_0$ ,  $\omega_{se}=\omega_0$ . Совпадение амплитуд автоколебаний достигнуто за счет надлежащего выбора коэффициентов параллельно рассматриваемых уравнений (1.1) и (1.2), (2.1) и (2.2). Чтобы найти амплитуды захватывания для уравнения Ван дер Поля — Матье, положим в (2.5)  $\gamma=0$ . В результате находим

$$A=A_0\{1\pm[\mu^2-(1-v^2)^2]^{1/2}/(\beta v)\}^{1/2} \quad (3.1)$$

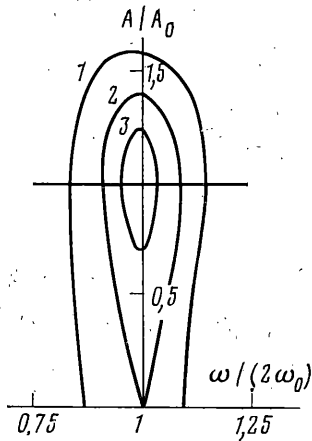
Максимальная и минимальная амплитуды достигаются вблизи середины области параметрического резонанса (фиг. 2). Полагая в (3.1)  $v=1$ , получаем

$$A_{\pm}=A_0(1\pm\mu/\beta)^{1/2} \quad (3.2)$$

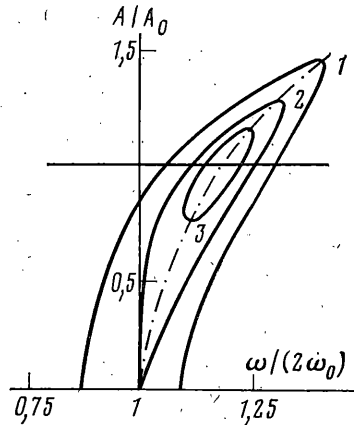
где  $A_+$  и  $A_-$  — приближенные значения максимальных и минимальных амплитуд. Кривая 1 на фиг. 2 построена для случая  $\mu > \mu_* \approx \beta$ . Амплитудно-частотные кривые параметрического резонанса ответвляются от линии  $A=0$ , соответствующей неустойчивому положению равновесия. Части амплитудно-частотных кривых, расположенные ниже линии  $A=A_0$ , также отвечают неустойчивым режимам. Верхняя часть этих кривых описывает устойчивые параметрические колебания. Поскольку в окрестности точек

бифуркации положение касательных к амплитудно-частотным кривым близко к вертикали, то переход от автоколебаний к параметрическим колебаниям сопровождается заметным возрастанием амплитуд. Затягивание параметрических колебаний практически отсутствует.

При  $\mu = \mu_*$  (кривая 2 на фиг. 2) амплитудно-частотная кривая касается линии  $A=0$ . Максимальная амплитуда параметрических колебаний составляет при этом приблизительно  $A_0\sqrt{2}$ , т. е. превышает амплитуду автоколебаний примерно на 40%. Амплитудно-частотные кривые 3 построены при  $\mu < \mu_*$ . Они располагаются выше линии  $A=0$ . Однако захватывание и увеличение амплитуд по сравнению с амплитудами автоколебаний сохраняется и в этом случае. Отметим, что если  $\mu < \mu_*$ , то в системе с линейным



Фиг. 2



Фиг. 3

положительным демпфированием параметрический резонанс становится невозможным.

Аналогичные результаты получим в случае Релея — Матье. Уравнение (2.8) дает

$$A = (A_0/\nu) \{1 \pm [\mu^2 - (1 - \nu^2)^2]^{1/2} / (\beta\nu)\}^{1/2} \quad (3.3)$$

с теми же качественными выводами, что и в случае Ван дер Поля — Матье. При  $\nu=1$  вновь приходим к формуле (3.2).

Перейдем к частному случаю уравнения Ван дер Поля — Дuffинга — Матье при  $f(u) = u^3$ . Если  $\gamma > 0$ , то амплитудно-частотные кривые, сохраняя топологические свойства, описанные для уравнения Ван дер Поля — Матье, наклоняются в сторону больших частот в соответствии с формой скелетной линии

$$\nu^2 = 1 + \frac{3}{4}\gamma A^2 \quad (3.4)$$

Поэтому здесь следует ожидать явлений затягивания и срыва режимов параметрических колебаний при непрерывном изменении частоты  $\omega$ . Случай  $\mu > \mu_*$ ,  $\mu = \mu_*$  и  $\mu < \mu_*$  представлены на фиг. 3 (кривые 1—3). Предельную частоту затягивания можно ценить как абсциссу точки пересечения скелетной кривой (3.4) и кривой, задаваемой уравнением (2.5). Координаты точки пересечения удовлетворяют системе уравнений

$$\nu^2 = 1 + \gamma_1 y^2, \quad \beta^2 \nu^2 (1 - y^2)^2 = \mu^2 \quad (3.5)$$

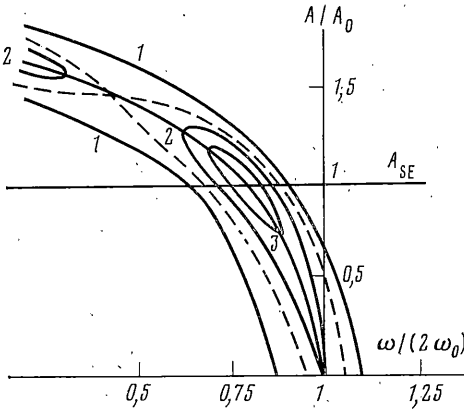
из которых первое есть уравнение (3.4), переписанное в обозначениях  $\gamma_1 = \beta\gamma/\eta$ ,  $y = A/A_0$ . Второе получено из (2.5) с учетом первого уравнения (3.5).

При  $\gamma < 0$  картина становится более сложной. Скелетная кривая наклонена в область меньших частот. Следует ожидать появления второй устой-

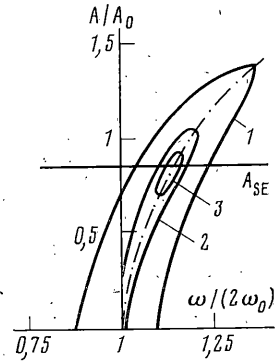
чивой ветви параметрических колебаний в этой области. При некотором  $\mu > \mu_{**}$  эти ветви объединяются. Этому случаю отвечают штриховые линии на фиг. 4. Чтобы оценить величину  $\mu_{**}$ , найдем условие касания скелетной линии с амплитудно-частотными кривыми. Исключая из (3.5) неизвестную величину  $y$ , приходим к кубическому уравнению относительно  $v$  с дискриминантом  $D = -(1 - |\gamma_1|^3/27 + (\mu\gamma_1/\beta)^2/4)$ . Пока дискриминант положителен, кубическое уравнение не имеет действительных корней, так что у скелетной линии нет точек пересечений с амплитудно-частотными кривыми. Условие  $D=0$  дает

$$\mu_{**} = (2\beta/|\gamma_1|) [(1 - |\gamma_1|)/3]^{3/2}. \quad (3.6)$$

При  $|\gamma_1| \ll 1$  из (3.6) следует оценка  $\mu_{**} \sim 2\eta/|\gamma|$ , так что слияние вет-



Фиг. 4



Фиг. 5

вей происходит лишь при достаточно больших  $\mu$ . Кривые 2 на фиг. 4 построены для случая  $\mu = \mu_{**}$ , кривые 3 — при  $\mu < \mu_{**}$ . При этом принято, что  $\mu_{**} > \mu_{*}$ .

Аналогичные результаты получены для уравнения Релея — Дuffинга — Матье. Примеры амплитудно-частотных кривых приведены на фиг. 5. Явление захватывания наблюдается при сколь угодно малых  $\mu$ , в том числе при  $\mu < \mu_{*}$ . Заметим, что при  $\gamma > 0$  амплитуда автоколебания  $A_{SE}$  согласно первой формуле (1.8) меньше, чем  $A_0$ .

4. Перейдем к анализу захватывания вблизи второго параметрического резонанса, которому в (2.3) отвечает значение  $p=2$ . Решение уравнений (2.1) и (2.2) для окрестности резонанса  $\omega = \omega_0$  ищем в виде

$$u(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + \dots \quad (4.1)$$

где постоянная составляющая  $a_0$  учитывает смещение колебательного режима с амплитудой  $A = (a_1^2 + b_1^2)^{1/2}$ . Рассмотрим подробнее случай Ван дер Поля — Дuffинга — Матье при  $f(u) = u^3$ . Подставляя (4.1) в (2.1), приходим к системе уравнений относительно  $a_0, a_1, b_1$ :

$$\begin{aligned} a_0 + \mu a_1 + \gamma (a_0^2 + \frac{3}{2} A^2) a_0 &= 0 \\ (1 - \nu^2) a_1 + 2\mu a_0 - \beta \nu [1 - (4a_0^2 + A^2)/A_0^2] b_1 + \frac{3}{4} \gamma (4a_0^2 + A^2) a_1 &= 0 \\ (1 - \nu^2) b_1 + \beta \nu [1 - (4a_0^2 + A^2)/A_0^2] a_1 + \frac{3}{4} \gamma (4a_0^2 + A^2) b_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

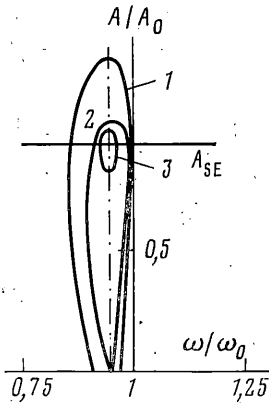
где в отличие от (2.5), (2.6) и т. д. введено частотное отношение  $\nu = \omega/\omega_0$ . При  $\gamma \geq 0$  из первого уравнения (4.2) следует, что  $|a_0| \leq \mu A$ . Таким образом, если коэффициент параметрического возбуждения удовлетворяет условию  $\mu^2 \ll 1$ , то в уравнениях (4.2) можно пренебречь всеми членами,

содержащими  $a_0^2$ , по сравнению с квадратом амплитуды  $A^2$ . Приравнявая нулю определитель упрощенной таким путем системы линейных алгебраических уравнений относительно  $a_0$ ,  $a_1$  и  $b_1$ , получаем уравнение типа (2.5):

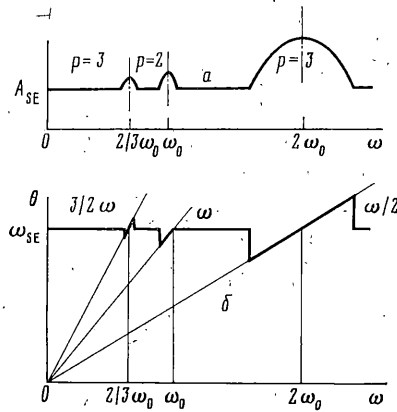
$$(1 - \nu^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2) [(1 - \nu^2 + \frac{3}{4}\gamma A^2) (1 + \frac{3}{2}\gamma A^2) - 2\mu^2] + \beta^2 \nu^2 (1 + \frac{3}{2}\gamma A^2) (1 - A^2/A_0^2)^2 = 0 \quad (4.3)$$

Найдем точки бифуркации режимов захватывания. Пусть  $A=0$ , тогда уравнение (4.3) дает точки, при которых амплитудно-частотные кривые режима захватывания ответвляются от тривиального решения:

$$\nu^2 = 1 - \mu^2 - \frac{1}{2}\beta^2 \pm [\mu^4 + \frac{1}{4}\beta^4 - (1 - \mu^2)\beta^2]^{1/2} \quad (4.4)$$



Фиг. 6



Фиг. 7

Эти частоты соответствуют границам второй области неустойчивости для линейной системы с положительным демпфированием [3]. При  $\beta^2 \ll \mu^2$  формула (4.4) принимает вид

$$\nu^2 = 1 - \mu^2 \pm (\mu^4 - \beta^2)^{1/2} \quad (4.5)$$

откуда видно, что при  $\mu < \mu_* \approx \beta^{1/2}$  бифуркация отсутствует, так что амплитудно-частотные кривые лежат выше линии  $A=0$ . Значение  $\mu_* = \beta^{1/2}$ , как известно [3, 4], является критическим в соответствующей задаче о параметрических колебаниях. Если в уравнении (4.3) положить  $A=A_{SE}$ , то получим точки бифуркации с режимом автоколебаний. Эти точки совпадают с границами второй области неустойчивости для параметрически возбуждаемой системы без демпфирования, собственные частоты которой вычислены с учетом квазиупругого нелинейного члена. Таким образом, общие качественные выводы о захватывании в окрестности резонанса  $\omega = \omega_0$  остаются такими же, как для главного резонанса  $\omega = 2\omega_0$ .

Амплитуды колебаний при  $\omega = \omega_0$ , вообще, меньше амплитуд в окрестности главного параметрического резонанса. Рассмотрим, например, случай  $\gamma=0$ . Решая уравнение (4.3), находим

$$A = A_0 [1 \pm (1 - \nu^2)^{1/2} (1 - \nu^2 - 2\mu^2)^{1/2} / (\nu\beta)]^{1/2} \quad (4.6)$$

причем экстремальные амплитуды достигаются вблизи середины области неустойчивости для системы без демпфирования. С учетом (4.5) полагаем в (4.6)  $\nu = 1 - \mu^2$ . Если  $\mu^2 \ll 1$  (что уже было использовано при выводе упрощенного амплитудно-частотного уравнения), то формула (4.6) дает

$$A_{\pm} = A_0 (1 \pm \mu^2/\beta)^{1/2} \quad (4.7)$$

Вид амплитудно-частотных кривых в окрестности резонанса  $\omega = \omega_0$ , представлен на фиг. 6, где кривые 1, 2 и 3 отвечают случаям, когда  $\mu > \mu_*$ ,  $\mu = \mu_*$  и  $\mu < \mu_*$ . Если

$\mu = \mu_*$ , то максимальная амплитуда, как и при главном резонансе, близка к  $A_0\sqrt{2}$ . Однако при главном резонансе  $\mu_* \approx \beta$ , в то время как при втором резонансе  $\mu_* \approx \beta^{1/2}$ . Поэтому при прочих равных условиях максимальные амплитуды  $A_1$  при главном резонансе будут меньше максимальных амплитуд  $A_2$  при втором резонансе. Учитывая [3, 4], что для  $p$ -го резонанса  $\mu_* \sim \beta^{1/p}$ , следует ожидать, что между максимальными амплитудами  $A_q$  и  $A_r$  при  $q$ -м и  $r$ -м резонансах будет выполняться соотношение  $A_q^2/A_r^2 \sim (1+\mu^q/\beta)/(1+\mu^r/\beta)$ . Здесь  $q$  и  $r$  — значения целого числа  $p$  из (2.3).

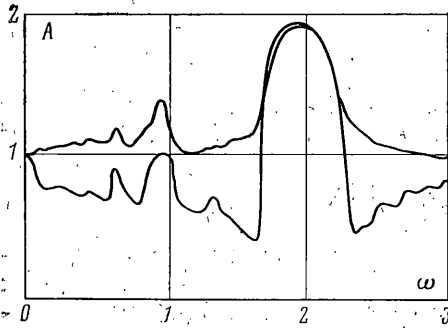
Качественная картина захватывания при  $p=1, 2, 3$  показана на фиг. 7. Устойчивые решения нанесены жирными линиями,  $\theta=2\omega/p$  — частоты параметрической синхронизации. Аналогичные результаты получим рассматривая случай  $\gamma \neq 0$ . Если  $\gamma > 0$ , то амплитудно-частотные кривые наклонены в сторону больших частот, если  $\gamma < 0$ , — то в сторону меньших. Во втором случае возможно появление дополнительных ветвей в области малых частот. Для уравнения Релея — Дуффинга — Матве вместо (4.3) при аналогичных допущениях придем к уравнению

$$(1-v^2+3/4\gamma A^2) [(1-v^2+3/4\gamma A^2)(1+3/2\gamma A^2)-2\mu^2] + \beta^2 v^2 (1+3/2\gamma A^2) (1-v^2 A^2/A_0^2)^2 = 0 \quad (4.8)$$

Как и в случае главного резонанса  $\omega=2\omega_0$ , существует порог захватывания по коэффициенту параметрического возбуждения  $\mu$ . Величину этого порога найдем из уравнения (4.8), полагая в нем  $A=A_0$  и формулируя условия, при которых полученное уравнение не имеет положительных действительных корней  $v$ .

Результаты прямого численного моделирования решений уравнения (2.1) приведены на фиг. 8. Расчеты выполнены при  $\omega_0=1$ ,  $\beta=0,1$ ,  $3\eta=0,4$ ,  $\mu=0,3$ ,  $\gamma=0$ . Начальные условия приняты  $u(0)=A_0=1$ ,  $u'(0)=0$ , т.е. близкими к значениям, достигаемым на предельном цикле.

Кривые на фиг. 8 обозначают границы изменения максимумов функции  $u(t)$  на достаточном больших отрезках времени. Приведенные результаты четко показывают возрастание амплитуд в окрестности частот  $\omega=\omega_0$  и  $\omega=2\omega_0$ , причем амплитуды в центре областей захватывания близки к вычисляемым по формулам (3.2) и (4.7). Анализ более подробных распечаток подтверждает наличие захватывания с частотами  $\theta=\omega$  и  $\theta=\omega/2$  соответственно.



Фиг. 8

Итак, аналитические расчеты, подтвержденные прямым математическим моделированием, показали существование захватывания в автоколебательных системах при параметрическом возбуждении. Захватывание наступает в частотных диапазонах, отвечающих параметрическим резонансам в обычных системах; при этом частоты, при которых происходит бифуркация автоколебательных режимов и режимов захватывания, совпадают с частотами на границах областей неустойчивости в системе без демпфирования, вычисленными с учетом поправок на влияние нелинейных квазиупругих членов. Захватывание имеет место при сколь угодно малых амплитудах параметрического воздействия, в том числе и при тех амплитудах, при которых в соответствующей линейной системе с равным по модулю положительным демпфированием чисто параметрическое возбуждение невозможно. Амплитуды колебаний при захватывании убывают с уменьшением интенсивности параметрического воздействия, а также с увеличением целого числа, характеризующего порядок параметрического резонанса.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Витт А. А. К теории захватывания Ван дер Поля. — В кн.: А. А. Андронов. Собр. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1956, с. 51—64.
2. Йосс Ж., Дюрозет Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983. 300 с.
3. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
4. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию  
17.XI.1983