

УДК 531.38

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА Н. Е. ЖУКОВСКОГО О ДВИЖЕНИИ
ЧАСТИЦЫ ПО ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

КРАСНОВ А. А., КРЕМЕР Е. Б., НАГАЕВ Р. Ф.

Исследуется установившееся движение частицы по плоской наклонной поверхности, совершающей круговые гармонические колебания в первоначальной плоскости. Изотропное взаимодействие между частицей и поверхностью описывается произвольной аналитической функцией их относительной скорости. В [1-3] это взаимодействие задавалось в виде кулонова трения, причем точное решение для горизонтальной поверхности впервые было получено Н. Е. Жуковским [1], а анализ возмущенного движения для задачи о наклонной плоскости дан в [2, 3].

В публикуемой работе показано, что траекторией вынужденного относительного движения частицы по горизонтальной поверхности в общем случае является окружность, при этом возможно существование нескольких таких режимов. Решение, которое отвечает одному из них и удовлетворяет найденному условию устойчивости, использовано как порождающее приближение при исследовании соответствующего возмущенного движения. Средняя за период абсолютная скорость, представляющая интерес для теории вибросепарации [4], вибропогружения и вибровинчивания [5], вычислена с точностью до четвертой степени малого параметра.

Уравнения движения частицы по плоской наклонной поверхности, совершающей круговые гармонические колебания в первоначальной плоскости, имеют вид

$$m(\ddot{x} - A\omega^2 \cos \omega t) = -F(\sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{-1/2}x + mg \sin \alpha \quad (1)$$

$$m(\ddot{y} - A\omega^2 \sin \omega t) = -F(\sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2)^{-1/2}y$$

Здесь x, y — декартовы координаты частицы относительно поверхности, наклоненной к горизонту под углом α и вибрирующей с амплитудой A и частотой ω , m — масса частицы; точкой обозначено дифференцирование по времени t , F — сила взаимодействия между частицей и поверхностью; если взаимодействие носит диссипативный характер, то $F > 0$ и зависит, в частности, от коэффициентов сухого трения покоя f_* и скольжения f_0 ($f_0 < f_*$). Пусть

$$\tau = \omega t, \quad u = (A\omega)^{-1}(x + iy) \quad (i = \sqrt{-1}), \quad \varepsilon = (A\omega^2)^{-1}g \sin \alpha \quad (2)$$

$$f(R) = -\frac{F(A\omega R)}{mA\omega^2} = \\ = \frac{g \cos \alpha}{A\omega^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k(A\omega R)^k}{k!} \quad (R = |u| > 0), \quad f(0) = f_* \frac{g \sin \alpha}{A\omega^2}$$

Тогда система (1) эквивалентна уравнению относительно безразмерной комплексной скорости u :

$$du/d\tau + f(R)e^{i\tau} = e^{i\tau} + \varepsilon \quad (3)$$

В порождающем приближении ($\varepsilon = 0$) уравнение (3) может иметь несколько решений

$$u_l = \rho_l e^{i(\tau - \delta_l)} \quad (l = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

Уравнение для определения констант ρ_i ($0 < \rho_i < 1$) и соответствующих значений $\vartheta_i = \arcsin \rho_i$ имеет вид $f(R) - \sqrt{1-R^2} = 0$.

Решение (4) устойчиво, если выполняется неравенство

$$\frac{d}{dR} [f(R) - \sqrt{1-R^2}] \Big|_{R=\rho_i} > 0 \quad (5)$$

При небольших наклонах поверхности ($\varepsilon \ll 1$) решение возмущенной задачи может быть построено в виде

$$u = \rho(1+r)e^{\varepsilon(\gamma-\psi)} \quad (6)$$

Здесь r и ψ — вещественные функции независимой переменной $\gamma = \tau - \vartheta$, а константы $\rho = \rho_i$, $\vartheta = \vartheta_i$ соответствуют одному из устойчивых режимов (4). С учетом (2) и (6) уравнение (3) может быть переписано в виде системы вещественных уравнений относительно r и ψ :

$$r' + \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n r^n = \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\rho} \cos \gamma \right) \cos \psi - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\rho} \sin \gamma \right) \sin \psi \quad (7)$$

$$(1+r)(1+\psi') = \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\rho} \cos \gamma \right) \sin \psi + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\rho} \sin \gamma \right) \cos \psi$$

$$\xi_n = \frac{\rho^{n-1} d^n f(\rho)}{n! d\rho^n} = \frac{g \cos \alpha}{A \omega^2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f_k(A\omega)}{k!} C_k^n \rho^{k-1}$$

$$C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \xi_0 = \xi, \quad \xi_1 = \eta, \quad \xi_2 = \mu, \quad \xi_3 = \nu$$

Решение (7) ищем в виде

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right)^n r_n, \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right)^n \psi_n \quad (8)$$

Подставляя ряды (8) в (7) и группируя члены при одинаковых степенях отношения ε/ρ , приходим к бесконечной цепочке линейных систем дифференциальных уравнений относительно r_n, ψ_n :

$$\begin{cases} r_1' + \eta r_1 + \psi_1 = \cos \gamma \\ \psi_1' + \xi \psi_1 - r_1 = \sin \gamma \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} r_2' + \eta r_2 + \psi_2 = -\frac{1}{2} \xi \psi_1^2 + \psi_1 \sin \gamma - \mu r_1^2 \\ \psi_2' + \xi \psi_2 - r_2 = \frac{1}{2} \psi_1^2 - \psi_1 \cos \gamma - r_1 \psi_1' \end{cases}$$

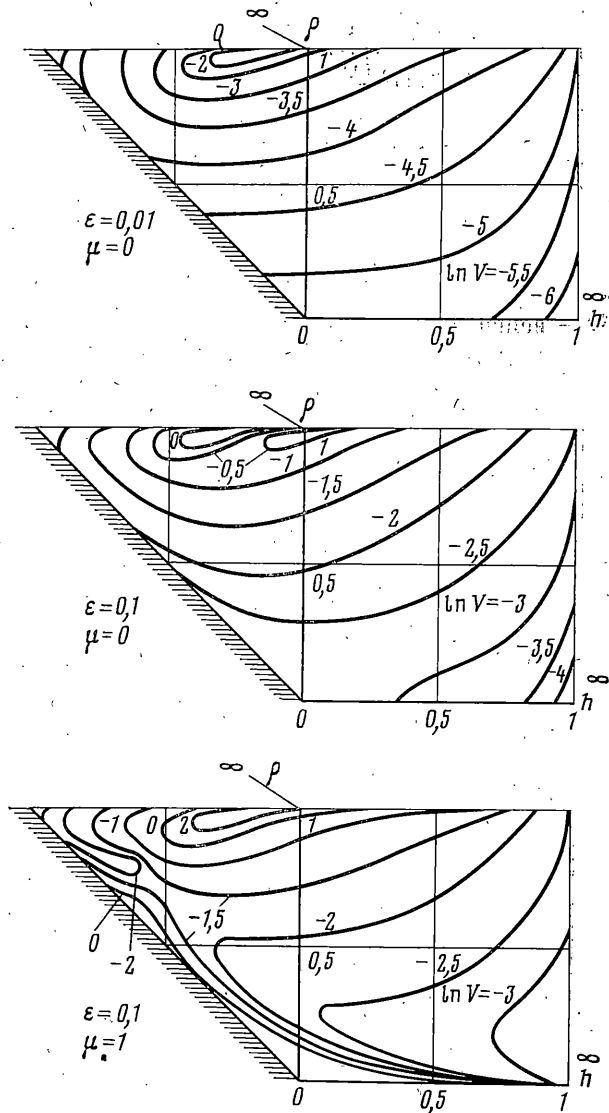
$$\begin{cases} r_3' + \eta r_3 + \psi_3 = \frac{1}{6} \psi_1^3 - \xi \psi_1 \psi_2 + \psi_2 \sin \gamma - \frac{1}{2} \psi_1^2 \cos \gamma - 2\mu r_1 r_2 - \nu r_1^3 \\ \psi_3' + \xi \psi_3 - r_3 = \frac{1}{6} \xi \psi_1^3 + \psi_1 \psi_2 - \psi_2 \cos \gamma - \frac{1}{2} \psi_1^2 \sin \gamma - r_2 \psi_1' - r_1 \psi_2' \end{cases}$$

Ограничиваясь рассмотрением чисто вынужденных движений, можно показать, что и правые части зацепляющихся систем уравнений (9), и соответствующие решения являются суммами гармоник угла γ :

$$r_n' + \eta r_n + \psi_n = \sum_j (P_{nj} e^{ij\gamma} + \bar{P}_{nj} e^{-ij\gamma}) \quad (10)$$

$$\psi_n' + \xi \psi_n - r_n = \sum_j (Q_{nj} e^{ij\gamma} + \bar{Q}_{nj} e^{-ij\gamma})$$

$$r_n = \sum_j (R_{nj} e^{ij\gamma} + \bar{R}_{nj} e^{-ij\gamma}), \quad \psi_n = \sum_j (\Psi_{nj} e^{ij\gamma} + \bar{\Psi}_{nj} e^{-ij\gamma})$$



Фиг. 1

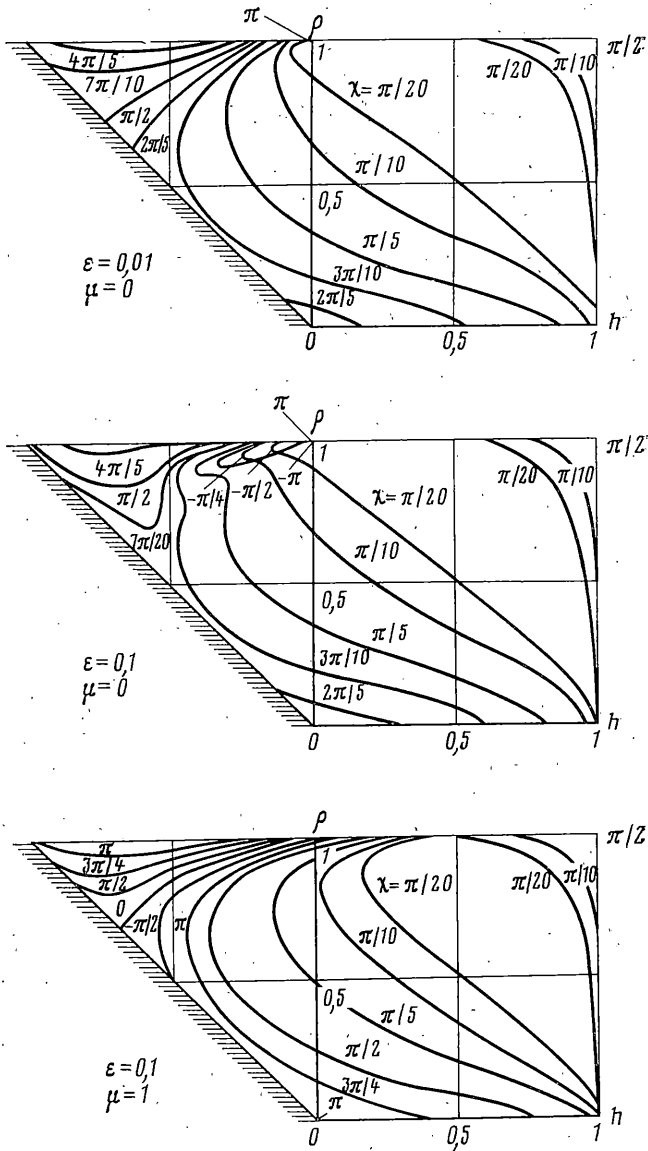
Здесь индекс суммирования $0 \leq j \leq n$ принимает значения той же четности, что и n , а P_{nj} , Q_{nj} , R_{nj} , Ψ_{nj} — комплексные коэффициенты; чертой отмечаются сопряженные величины.

Из (10) следует

$$R_{nj} = \frac{(\zeta + ij)P_{nj} - Q_{nj}}{1 + (\zeta + ij)(\eta + ij)}, \quad \Psi_{nj} = \frac{P_{nj} + (\eta + ij)Q_{nj}}{1 + (\zeta + ij)(\eta + ij)} \quad (11)$$

При помощи (6) и (8) может быть получено выражение для комплексной скорости u через r_1 , ψ_1 , r_2 , ψ_2 , r_3 , ψ_3 , ... :

$$u = \rho e^{i\tau} \left[1 + (\varepsilon/\rho)(r_1 - i\psi_1) + (\varepsilon/\rho)^2 (r_2 - i\psi_1 r_1 - i\psi_2 - 1/2 \psi_1^2) + \right. \\ \left. + (\varepsilon/\rho)^3 (r_3 - i\psi_1 r_2 - i\psi_2 r_1 - 1/2 \psi_1^2 r_1 - i\psi_3 - \psi_1 \psi_2 + 1/6 i \psi_1^3) + (\varepsilon/\rho)^4 \dots \right] \quad (12)$$



Фиг. 2

Особый интерес представляет вычисление средней за период абсолютной скорости частицы, которая зависит только от постоянных параметров задачи $\varepsilon, \zeta, \eta, \mu, \nu \dots$ и с учетом (10) и (12) равна

$$\begin{aligned}
 v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\gamma) d\gamma = & \varepsilon (\bar{R}_{11} - i\bar{\Psi}_{11}) + (\varepsilon^3/\rho^2) [\bar{R}_{31} - i\Psi - i(2R_{20}\bar{\Psi}_{11} + \bar{R}_{22}\Psi_{11}) - \\
 & - i(2\Psi_{20}\bar{R}_{11} + \bar{\Psi}_{22}R_{11}) - (\Psi_{11}\bar{\Psi}_{11}\bar{R}_{11} + \frac{1}{2}\bar{\Psi}_{11}^2 R_{11}) - \\
 & - (2\Psi_{20}\bar{\Psi}_{11} + \bar{\Psi}_{22}\Psi_{11}) + \frac{1}{2}i\bar{\Psi}_{11}\Psi_{11}] + \varepsilon^5/\rho^4 \dots
 \end{aligned} \quad (13)$$

Используя формулы (11) и преобразовывая правые части (9) к виду (10), получаем

$$\begin{aligned}
 v = & \frac{\varepsilon}{2} \frac{(\xi + \eta)(4 + \xi\eta) + i(\xi - \eta)^2}{(\xi\eta)^2 + (\xi + \eta)^2} + \\
 & + \frac{\varepsilon^3}{8} \frac{1 + \xi^2}{[(\xi\eta)^2 + (\xi + \eta)^2][\xi\eta - i(\xi + \eta)]^2} \times \\
 & \times \left\{ \frac{(\xi - \eta)(\eta - 2i)}{2} [\eta(4 + \xi\eta) - 2\xi\eta(\eta - 2i) - 2i(\eta - 2i)^2 + \right. \\
 & + \eta(\xi - \eta) \left(\frac{6(\eta - 2i)}{1 + \xi\eta} - \frac{\eta - 4i(\xi\eta - i(\xi + \eta))}{1 + (\xi - 2i)(\eta - 2i)} \right) \left. \right] - \\
 & - \mu \left[(4 + \xi^2) \left(-\eta(\xi - \eta) + \frac{1 + \xi^2 + \xi(\xi - \eta)}{1 + \xi\eta} (\eta - 2i)^2 + \right. \right. \\
 & + \left. \frac{\eta(\xi - \eta)}{1 + (\xi - 2i)(\eta - 2i)} \right) + (\xi - 2i)^2 \left(2(4 + \xi\eta) + \frac{6\eta(\xi - \eta)}{1 + \xi\eta} - \right. \\
 & \left. \left. - \left(4 + \eta^2 + (4 + \eta^2)(\xi - 2i) + \frac{2i(\xi - \eta)(4 + \xi\eta)}{1 + (\xi - 2i)(\eta - 2i)} \right) \right] \right. \\
 & \left. + \left(\frac{4\mu^2\xi}{1 + \xi\eta} + \frac{2\mu^2(\xi - 2i)}{1 + (\xi - 2i)(\eta - 2i)} - 3v \right) (4 + \xi^2)(\xi - 2i)^2 \right\} + \varepsilon^5 \dots
 \end{aligned} \tag{14}$$

Так как область устойчивости (5) в переменных ξ, η определяется неравенством $1 + \xi\eta > 0$, то на ее границе скорость обращается в бесконечность. Однако движение может оказаться неустойчивым только в тех случаях, когда либо сила взаимодействия является активной, разгоняющей ($\xi < 0$), либо решение возмущенной задачи построено вблизи ее «падающего участка» ($\eta < 0$).

Если сила сопротивления описывается кулоновым трением ($f = f_0(A\omega^2)^{-1}g \cos \alpha = 1/w$, $1 + \xi^2 = 1/(1 - w^{-2})$, $\eta = \mu = v = \dots = 0$, $\varepsilon = \sigma/w$), то (14) переходит в известную [2, 3] формулу

$$v = \sigma \sqrt{1 - w^{-2}} (2 - \sigma^2 + \sigma^4 \dots) + i\sigma (1/2 w^{-1} + \sigma^4 \dots) \tag{15}$$

С учетом только линейного вязкого трения ($f = f_1(A\omega^2)^{-1}g \cos \alpha$, $A\omega R = \eta R$, $\xi = \eta$, $\mu = v = \dots = 0$) (14) принимает наиболее простой вид $v = \varepsilon/\eta$.

Средняя скорость частицы, испытывающей совместное действие сил сухого и линейного вязкого трения ($f = (A\omega^2)^{-1}g \cos \alpha (f_0 + f_1 A\omega R) = \xi + \eta R$, $\mu = v = \dots = 0$), может быть вычислена по формуле (14) при $\xi = (\xi + \eta \sqrt{1 - \xi^2 + \eta^2}) / (-\xi\eta + \sqrt{1 - \xi^2 + \eta^2})$.

На номограммах фиг. 1, 2, построенных в плоскости параметров h, ρ ($-1 < h = \sin \kappa < 1$, $\kappa = \arctg \eta$; $0 < \rho = \sin \vartheta < 1$, $\vartheta = \text{arccctg } \xi$) при $v = 0$ и некоторых фиксированных значениях ε и μ , изображены линии уровня действительной и мнимой частей логарифма средней скорости частицы $\ln v = \ln(Ve^{ix}) = \ln V + ix$. Граница области устойчивости $1 + \xi\eta = 0$ показана заштрихованным отрезком прямой. Отметим, что решение (14), иллюстрируемое данными номограммами, имеет смысл всюду, за исключением ε -окрестности границы области устойчивости (5) и узкой полосы $0 < \rho < O(\varepsilon)$, которой отвечает не рассмотренное в настоящей работе движение с остановками. Наибольший интерес для практики представляют неотрицательные значения параметра h , соответствующие случаю неубывающей вблизи $R = \rho$ безразмерной силы сопротивления

$$f(R) = f(\rho) + \eta(R - \rho) + (\mu/\rho)(R - \rho)^2 + (v/\rho^2)(R - \rho)^3 + \dots \tag{16}$$

Из полученных номограмм следует, что если зависимость (16) силы сопротивления от модуля безразмерной скорости R линейна в ε -окрестности точки ρ ($\mu=\nu=\dots=0$), как, например, для комбинации сухого и линейного вязкого трения, то проекция средней скорости частицы на линию наибольшего ската при $h \geq 0$ всегда направлена вниз ($0 < \chi < \pi/2$). В то же время при наличии квадратичной нелинейности ($\mu \neq 0, \nu = \dots = 0$) частица может транспортироваться вверх ($0 < \chi < \pi$) даже при $h \geq 0$.

Авторы признательны И. И. Блехману, Б. В. Кизевальтеру и А. М. Базилевскому за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Заметка о плоском рассеве. Собр. соч. Т. 3. М.—Л.: Гостехиздат, 1949. 700 с.
2. Блехман И. И., Горгинский В. В., Дулаев В. Г., Нагаев Р. Ф. Движение материальной частицы по шероховатой плоскости, совершающей колебания, близкие к круговым поступательным.—Изв. АН СССР: МТТ, 1971, № 2, с. 136–141.
3. Нагаев Р. Ф. Периодические режимы вибрационного перемещения. М.: Наука, 1978. 160 с.
4. Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю. Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 410 с.
5. Цейтлин М. Г. О погружении цилиндрической оболочки в грунт при продольно-вращательных колебаниях.—Основания, фундаменты и механика грунтов, 1969, № 5, с. 19–22.

Ленинград

Поступила в редакцию
19.III.1982