

УДК 531.8

ДИНАМИКА УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА ПРИ ЗАДАННЫХ
УПРАВЛЯЮЩИХ МОМЕНТАХ ИЛИ ДВИЖЕНИЯХ
ПЕРЕМЕЩАЕМОГО ГРУЗА

МИХАЙЛОВ С. А., ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л.

Рассматриваются две задачи динамики манипулятора с упругими звеньями: определение движения под действием заданных управляющих моментов, приложенных в шарнирах манипулятора, и определение моментов по заданному движению перемещаемого манипулятором груза. Приводятся результаты расчетов для одного пространственного движения упругого манипулятора с грузом.

1. При исследовании динамики манипуляционных роботов обычно используется механическая модель, в которой манипулятор считается состоящим из абсолютно жестких звеньев, соединенных шарнирами [1, 2]. Однако в случае сравнительно большой длины звеньев и значительной массы перемещаемого груза упругая податливость конструкции манипулятора может существенно влиять на его динамику и точность выполнения операций. Поэтому упругость звеньев в ряде случаев необходимо учитывать при анализе динамики и разработке системы управления манипуляторами.

Динамика манипулятора с упругими звеньями рассматривалась, например, в [3–5]. Данная статья продолжает серию работ [6–10], посвященных динамике манипуляционных роботов с упругими элементами. Используется подход и общая методика, предложенные в [7, 9] для случая многозвенного манипулятора. Работа является непосредственным продолжением [10], и в ней применяются некоторые соотношения и результаты, полученные в [8, 10].

Механическая модель упругого манипулятора, используемая в публикуемой работе, определяется следующими допущениями (фиг. 1):

манипулятор OO_1O_2 представляет собой двузвеник, состоящий из двух стержней одинаковой длины l ;

в неподвижной точке O совмещены два цилиндрических шарнира. Ось e_1 первого шарнира неподвижна, ось e_2 второго шарнира подвижна и перпендикулярна e_1 . В точке O_1 находится локтевой цилиндрический шарнир, ось которого при отсутствии упругих деформаций стержня OO_1 параллельна оси e_2 ;

груз считается материальной точкой массы m и находится в точке O_2 ;

звенья манипулятора представляют собой однородные прямолинейные упругие стержни кольцевого поперечного сечения, испытывающие деформации изгиба и кручения;

упругие смещения манипулятора и груза в процессе движения малы по сравнению с длиной звена l ;

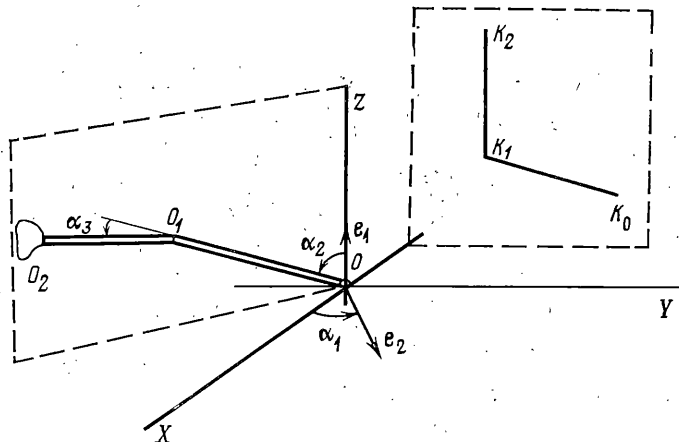
масса манипулятора m_0 мала по сравнению с массой груза m ;

на манипулятор с грузом действуют моменты $M = (M_1, M_2, M_3)$, развиваемые двигателями в шарнирах e_1, e_2, O_1 , внешняя сила F , приложенная к грузу, и реакция опоры в точке O .

Допущения 1–6 — те же, что и в [10], где даны необходимые пояснения к ним.

Поясним седьмое допущение. Управляющие моменты M_1, M_2, M_3 , развиваемые двигателями, установленными в шарнирах манипулятора, являются функциями времени t и могут быть как заданными, так и искомыми; далее рассматриваются оба варианта. Внешняя сила, приложенная к грузу (например, вес или сопротивление среды), считается заданной функцией вида $F(r, \dot{r}, t)$, где r — радиус-вектор груза, отсчитанный от точки O .

Обозначим через α_1 угол поворота манипулятора вокруг оси шарнира e_1 , через α_2 — угол поворота звена OO_1 вокруг оси шарнира e_2 , через α_3 — угол поворота в локтевом шарнире O_1 (фиг. 1). Введем инерциальную



Фиг. 1

декартову систему координат $OXYZ$, ось Z которой направим по неподвижной оси шарнира e_1 . Подвижная ось шарнира e_2 лежит в плоскости OXY и образует угол α_1 с осью X . Угол между касательной к стержню OO_1 в точке O и осью Z равен α_2 , а угол между касательными к стержням OO_1 и O_1O_2 в точке O_1 равен α_3 . Вектор углов $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ обозначим через α .

В [10] решалась следующая задача: при заданном законе изменения углов в шарнирах $\alpha = \alpha(t)$ определить движение груза $r(t)$, закон изменения управляющих моментов $M(t)$ и силу $\Phi(t)$, с которой груз действует на манипулятор. Эта задача, согласно терминологии работы [7], называется задачей кинематического управления; здесь назовем ее задачей 1. В данной работе рассматриваются две другие задачи, также поставленные и исследованные в [7]: задача динамического управления и задача о заданном движении груза.

Задача 2. (Динамическое управление). Дан закон изменения управляющих моментов в шарнирах $M = M(t)$. Требуется определить движение груза $r(t)$, углы в шарнирах $\alpha(t)$ и силу $\Phi(t)$.

Задача 3. (Заданное движение груза). Задано желаемое движение перемещаемого груза $r = r^*(t)$. Требуется определить закон изменения управляющих моментов $M(t)$, обеспечивающий данное движение, углы в шарнирах $\alpha(t)$ и силу $\Phi(t)$.

Сформулированные задачи отражают различные возможности управляющих двигателей манипулятора. Задача кинематического управления отвечает случаю, когда двигатели могут с высокой точностью реализовать заданную программу изменения углов в шарнирах, несмотря на действующие возмущения, обусловленные упругостью конструкции манипулятора. Задачи 2, 3 отвечают возможности двигателей точно обработать за-

кон изменения управляющих моментов. Оба данных предложения (точная обработка углов или моментов) представляют собой некоторые идеализации характеристик реальных двигателей, которые фактически являются промежуточными между этими крайними случаями. Поэтому решение поставленных задач дает оценку влияния упругости конструкции на динамику манипулятора при различных характеристиках двигателей.

2. Наряду с описанной моделью упругого манипулятора будем использовать также вспомогательную модель жесткого манипулятора, у которого оба звена — абсолютно жесткие стержни, а углы в шарнирах — такие же, как у упругого манипулятора. Обозначим радиус-вектор груза O_2 относительно точки O для упругой модели \mathbf{r} , для жесткой модели — \mathbf{r}^0 . Имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^0 + \mathbf{u} \quad (2.1)$$

где \mathbf{u} — вектор упругого смещения груза. В случае жесткой модели кинематика манипулятора задается зависимостью $\mathbf{r}^0 = \mathbf{f}(\alpha)$, которую можно обратить. Обратная функция $\alpha = \mathbf{h}(\mathbf{r}^0)$ имеет две ветви, отвечающие двум возможным конфигурациям манипулятора при данном положении груза O_2 и отличающиеся знаком угла α_3 в локтевом шарнире. Далее предполагается, что выбрана одна из ветвей зависимости $\mathbf{h}(\mathbf{r}^0)$, которая соответствует определенному знаку α_3 (в расчетах полагалось $\alpha_3 > 0$). Зависимости

$$\mathbf{r}^0 = \mathbf{f}(\alpha), \quad \alpha = \mathbf{h}(\mathbf{r}^0) \quad (2.2)$$

даны в развернутом виде в [10] (формулы (1.3), (1.4)) и здесь не приводятся.

В силу сделанных допущений кинетическая и упругая потенциальная энергии манипулятора с грузом равны

$$T = m(\dot{\mathbf{r}})^2/2, \quad \Pi = (C(\alpha)\mathbf{u}, \mathbf{u})/2 \quad (2.3)$$

Скобками обозначается скалярное произведение. Здесь Π есть энергия малых упругих деформаций двузвенника OO_1O_2 в состоянии равновесия при заданных упругих смещениях и углах в шарнирах α , определяющих конфигурацию манипулятора. Матрица потенциальной энергии $C(\alpha)$ приведена в [10].

Подсчитаем работу всех сил (\mathbf{F} , \mathbf{M} и упругих сил) на виртуальных перемещениях

$$\begin{aligned} \delta A &= (\mathbf{F}, \delta \mathbf{r}) + (\mathbf{M}, \delta \alpha) - (C\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) - (\partial \Pi / \partial \alpha, \delta \alpha) \\ \partial \Pi / \partial \alpha_i &= (\partial C(\alpha) / \partial \alpha_i \mathbf{u}, \mathbf{u}) / 2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\partial \Pi / \partial \alpha$ — вектор, компоненты которого выписаны в (2.4). Положение груза и конфигурацию манипулятора определим векторами \mathbf{r} и α , компоненты которых считаем обобщенными координатами. Из равенств (2.1), (2.2) имеем

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{r} - B(\alpha) \delta \alpha, \quad B(\alpha) = \{\partial \mathbf{f}(\alpha) / \partial \alpha\} \quad (2.5)$$

где B — квадратная матрица частных производных размерности 3×3 . Подставляя соотношение (2.5) в (2.4), вычислим обобщенные силы и составим затем уравнения Лагранжа, отвечающие координатам \mathbf{r} , α :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) - C(\alpha)\mathbf{u} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{M} + B^T(\alpha)C(\alpha)\mathbf{u} - \partial \Pi / \partial \alpha = 0 \quad (2.7)$$

Вырожденное уравнение Лагранжа (2.7) для координат α есть условие равновесия безынерционного упругого манипулятора. Сила Φ , с которой груз действует на манипулятор, равна

$$\Phi = \partial \Pi / \partial \mathbf{u} = C\mathbf{u} \quad (2.8)$$

Вследствие безынерционности манипулятора сила Φ с точностью до знака равна реакции опоры, действующей в точке O , а также перерезывающей силе в произвольном сечении конструкции манипулятора.

Как показано в [10], пятое допущение означает, что $u \sim \varepsilon^2$, $C \sim \varepsilon^{-2}$ ($\varepsilon \ll 1$). Здесь ε — малый параметр, равный отношению $\varepsilon \sim T_1 / T_*$, в котором T_1 — характерный период упругих колебаний манипулятора с грузом, отвечающий низшей собственной частоте, T_* — характерное время операции перемещения груза. Поэтому можно положить

$$C(\alpha) = \varepsilon^{-2} K(\alpha), \quad u = \varepsilon^2 v, \quad \varepsilon \ll 1 \quad (2.9)$$

Здесь компоненты матрицы $K(\alpha)$ и вектора v есть величины порядка единицы. Подставим соотношения (2.9) в уравнения (2.6):

$$m \ddot{r} = F(r, \dot{r}, t) - K(\alpha) v \quad (2.10)$$

$$M + B^T(\alpha) K(\alpha) v = \varepsilon^2 \partial / \partial \alpha (K(\alpha) v, v) / 2 \quad (2.11)$$

Запишем также кинематическое соотношение, вытекающее из (2.1), (2.2), (2.9):

$$\alpha = h(r - \varepsilon^2 v) \quad (2.12)$$

Решение задач 2, 3 основано на уравнениях (2.10)–(2.12). Общая схема их решения дана в [7, 9].

3. В задаче о динамическом управлении известна зависимость $M(t)$. Чтобы получить замкнутую систему уравнений для вектора r , исключим из системы (2.10) векторы v , α при помощи равенств (2.11), (2.12). Разрешая уравнение (2.11) относительно v , в первом приближении получим

$$v = v^0 + O(\varepsilon^2), \quad v^0 = -[B^T(\alpha) K(\alpha)]^{-1} M(t) \quad (3.1)$$

Подставляя вектор v^0 из (3.1) в правую часть уравнения (2.11), получим в следующем приближении:

$$v = v^0 + \varepsilon^2 v^1 + O(\varepsilon^4), \quad v^1 = [B^T(\alpha) K(\alpha)]^{-1} \partial / \partial \alpha (K(\alpha) v^0, v^0) / 2 \quad (3.2)$$

Подставим соотношения (3.1), (3.2) в (2.10), (2.12), ограничиваясь членами $O(\varepsilon^2)$ включительно

$$m \ddot{r} = F(r, \dot{r}, t) - K(\alpha) (v^0 + \varepsilon^2 v^1) \quad (3.3)$$

$$\alpha = h[r - \varepsilon^2 v^0(\alpha)] \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4), в котором v^0 определено равенством (3.1), представляет собой векторное уравнение для определения $\alpha(r)$ в каждый момент времени t . Решение этого уравнения можно получить либо в виде ряда по ε^2 , либо методом последовательных приближений, полагая

$$\alpha^0 = h(r), \quad \alpha^n = h(r - \varepsilon^2 v^0(\alpha^{n-1})) \quad n=1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Здесь верхний индекс указывает номер итерации. Производная по α правой части уравнения (3.4) есть величина $O(\varepsilon^2)$. Следовательно, итерации (3.5) быстро сходятся, причем $|\alpha - \alpha^n| = O(\varepsilon^{2n+2})$. Поэтому для получения α с погрешностью $O(\varepsilon^4)$ достаточно выполнить одну итерацию, полагая

$$\alpha = \alpha^1 + O(\varepsilon^4) \quad (3.6)$$

Таким образом, решение задачи 2 сводится к следующему. Задаваясь функцией $M(t)$ и начальными данными $r(0)$, $\dot{r}(0)$, интегрируем систему шестого порядка (3.3) для вектора r . При этом зависимость $\alpha(r)$ при каждом t определяется равенством (3.6), а функции v^0 , v^1 , α^0 , α^1 — равенствами (3.1), (3.2), (3.5). В результате интегрирования найдем искомые зависимости $r(t)$, $\alpha(t)$. Упругое смещение v определим по формуле (3.2), а силу Φ — по (2.8) с учетом (2.9):

$$\Phi = C(\alpha) u = K(\alpha) v \quad (3.7)$$

Тем самым решение поставленной задачи 2 построено с погрешностью $O(\varepsilon^4)$. Заметим, что объем вычислений при этом мало отличается от объема вычислений в случае жесткой модели. Как и для жесткой модели, требуется интегрировать систему шестого порядка и вычислять функцию $h(r)$ на каждом шаге интегрирования.

4. Рассмотрим решение задачи о заданном движении груза. Теперь в системе (2.10)–(2.12) функция $r(t)$ задана, а α , v , M подлежат определению. Разрешим систему (2.10) относительно v :

$$v = K^{-1}(\alpha) \{F(r, r', t) - mr''\} \quad (4.1)$$

и подставим (4.1) в (2.12). Получим

$$\alpha = h(r - \varepsilon^2 K^{-1}(\alpha) [F(r, r', t) - mr'']) \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2) относительно α решается при каждом t методом последовательных приближений аналогично (3.5). Для получения решения с погрешностью $O(\varepsilon^4)$ достаточно снова ограничиться одной итерацией (3.6). Определив $\alpha(t)$ при некотором t , вычисляем $v(t)$ по формуле (4.1), а затем и $M(t)$ согласно (2.11):

$$M = -B^T(\alpha) K(\alpha) v + \varepsilon^2 \partial / \partial \alpha (K(\alpha) v, v) / 2 \quad (4.3)$$

Сила Φ подсчитывается по формуле (3.7). Таким образом, решение задачи 3 не требует интегрирования уравнений и сводится к расчету по указанным формулам для последовательных моментов времени t .

5. В качестве примера приведем результаты численного решения задач 2, 3 для некоторых пространственных движений манипулятора. Пусть геометрические и механические параметры манипулятора те же, что и в работе [10], в частности в безразмерных переменных масса груза и длина каждого звена равны единице: $m=1$; $l=1$.

Упругие характеристики, в том числе матрица потенциальной энергии $C(\alpha)$, приведены в [10]. Внешние силы полагаем равными нулю $F=0$.

Введем в рассмотрение следующее опорное движение груза $r = \rho(t)$, также введенное в [10]. Траектория точки O_2 представляет собой ломаную $K_0 K_1 K_2$, состоящую из двух отрезков одинаковой длины, которые образуют угол 120° и лежат в плоскости $X=-0,45$. Координаты точек K_0, K_1, K_2 в инерциальной системе координат $OXYZ$ равны (см. фиг. 1): $K_0 = (-0,45; 0,84; 0,52)$; $K_1 = (-0,45; 0,33; 0,82)$; $K_2 = (-0,45; 0,33; 1,45)$.

Вдоль каждого отрезка $K_0 K_1, K_1 K_2$ движение груза $\rho(t)$ происходит по одному и тому же закону и состоит из участка разгона длительностью $\tau_1=17$ (в безразмерном времени), участка движения с постоянной скоростью длительностью $\tau_2=71$ и участка торможения длительностью $\tau_3=17$. На средних участках скорость постоянна и равна $|\rho'|=0,0068$, на участке разгона она изменяется линейно от 0 до 0,0068, а на участке торможения — линейно от 0,0068 до 0. Таким образом, скорость $\rho'(t)$ — непрерывная кусочно-линейная, а ускорение $\rho''(t)$ — разрывная кусочно-постоянная функций времени.

В [10] описанное выше опорное движение использовалось следующим образом. Углы в шарнирах $\alpha(t)$ задавались так, чтобы в жесткой модели груз осуществлял опорное движение, т. е. $r^0(t) = \rho(t)$ или $\alpha(t) = h[\rho(t)]$.

В задаче 2 примем, что задаваемые управляющие моменты равны

$$M(t) = B^T [h(\rho(t))] \rho''(t)$$

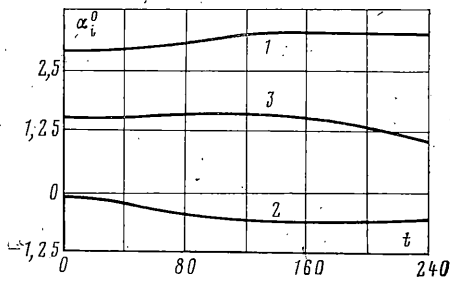
Согласно (2.10)–(2.12), эти моменты таковы, что в случае жесткой модели при $F=0$, $m=1$ и нулевых начальных данных $\Delta r^0(0) = (r^0)'(0) = 0$ они обеспечивают опорное движение манипулятора: $r^0(t) = \rho(t)$.

Решение задачи 2 строилось путем численного интегрирования системы (3.3). Начальные данные принимались нулевыми: $\Delta r(0) = r'(0) = 0$. Использовался метод Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага и контролем точности.

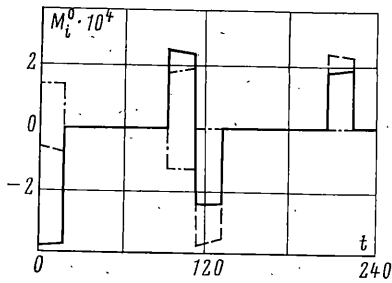
В задаче 3 в качестве заданного движения груза принималось опорное движение $r(t) = \rho(t)$. Расчеты проводились по схеме, изложенной в п. 4.

Некоторые результаты расчетов представлены на фиг. 2–7, причем фиг. 2–4 относятся к жесткой модели, на фиг. 5, 6 даны результаты численного решения задачи 2, а на фиг. 6, 7 — задачи 3.

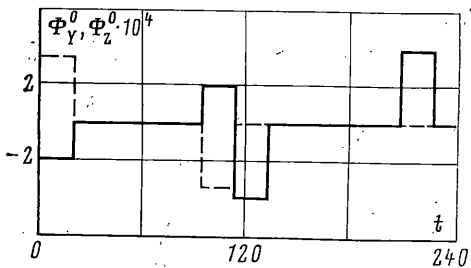
На фиг. 2–4 даны зависимости $\alpha^0(t)$, $M^0(t)$, $\Phi^0(t)$ соответственно, рассчитанные согласно равенствам $\alpha^0 = h[\rho(t)]$ (5.2) и $\Phi^0 = -m\rho''(t)$. Зависимость $\rho(t)$ описана выше в тексте. Цифрами на фиг. 2 даны значения индекса $i=1, 2, 3$, отвечающие



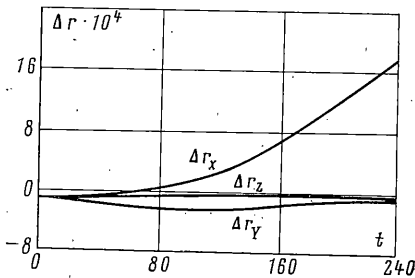
Фиг. 2



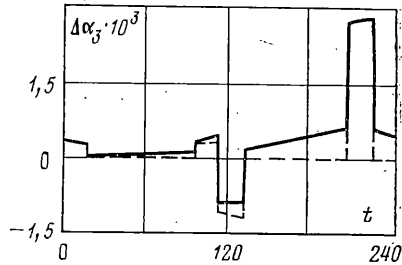
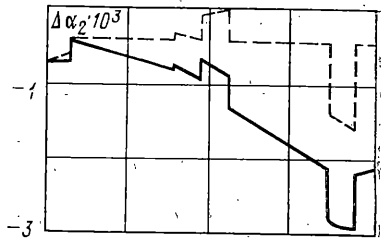
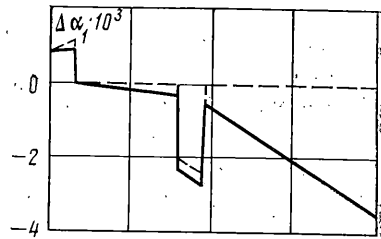
Фиг. 3



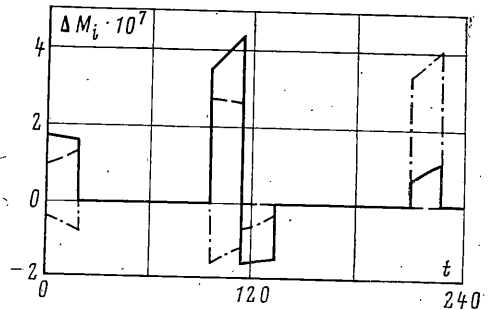
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

углам α_i ; на фиг. 3 график функции M_1^0 изображен штрихпунктирной, M_2^0 — сплошной, M_3^0 — пунктирной линиями; на фиг. 4 зависимости Φ_Y^0 нанесены пунктирной, а Φ_Z^0 — сплошной линиями.

Отметим, что функции $M^0(t)$, $\Phi^0(t)$ разрывны и испытывают скачки в моменты разрыва ускорения $\rho^{**}(t)$. Сила Φ^0 дана в проекциях на оси инерциальной системы координат $OXYZ$. Заметим, что $\Phi_x^0 \equiv 0$.

На фиг. 5 представлены проекции на оси X, Y, Z вектора $\Delta r = r(t) - \rho(t)$ для задачи 2. Вектор Δr характеризует влияние упругости на смещение груза в задаче динамического управления. Отметим, что зависимость $\Delta r(t)$ не содержит высокочастотных упругих колебаний в отличие от задачи кинематического управления 1 [10]. На фиг. 6 представлены функции $\Delta \alpha_i = \alpha_i - \alpha_i^0$ для задач 2, 3 при $i=1, 2, 3$. Сплошные кривые отвечают задаче 2, штриховые — задаче 3. Отметим, что зависимости $\alpha_i(t)$ разрывны в обеих задачах 2, 3. Скачки углов $\alpha_i(t)$ имеют место в моменты

разрыва зависимостей $M_i^0(t)$ (фиг. 3) и обусловлены безынерционностью манипулятора: в эти моменты скачком меняется равновесная конфигурация упругого двухзвенника под действием приложенных сил. На фиг. 7 для задачи 3 даны зависимости от времени дополнительных моментов $\Delta M_i = M_i(t) - M_i^0(t)$, необходимых для реализации заданного движения груза $r(t) = \rho(t)$ в случае упругого манипулятора. График функции ΔM_1 изображен пунктирной, ΔM_2 — сплошной, ΔM_3 — штрихпунктирной линиями. Эти функции имеют разрывы в те же моменты времени, что и $M_i^0(t)$. Зависимости от времени дополнительных сил $\Delta \Phi = \Phi - \Phi^0$ получаются для обеих задач 2, 3 аналогичными фиг. 7 и здесь не приводятся.

Таким образом, изложенная методика позволяет рассчитать все необходимые механические величины как для задачи динамического управления, так и при заданном движении груза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. А. Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 398 с.
2. Корнев Г. В. Целенаправленная механика управляемых манипуляторов. М.: Наука, 1979. 448 с.
3. Book W. J. Analysis of massless elastic chains with servo controlled joints.— Trans. ASME. J. Dyn. Syst. Measur. and Control, 1979, v. 101, No. 3, p. 187—192.
4. Лакота Н. А., Разманов Е. В., Шведов В. Н. Управление упругим манипулятором на траектории.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 2, с. 53—59.
5. Юдин В. И. Анализ колебаний стрелы манипулятора.— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 10, с. 108—115.
6. Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 118—124.
7. Черноусько Ф. Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 142—152.
8. Михайлов А. С. Собственные колебания упругого двухзвенника с точечной массой.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 2, с. 72—75.
9. Черноусько Ф. Л. Динамика систем с упругими элементами большой жесткости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 101—113.
10. Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Исследование динамики манипулятора с упругими звеньями.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 51—58.

Москва

Поступила в редакцию
12.XII.1983