

УДК 533.6.013.42

ДИНАМИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН

ЖИНЖЕР Н. И.

Асимптотический метод [1], как один из эффективных методов исследования спектров собственных колебаний упругих пластин, оболочек и конструкций [2-4], широко применяется в задачах устойчивости пластин и оболочек при потенциальных внешних силах [5-7], а также в задачах динамики при широкополосных внешних воздействиях [8]. Библиография применений метода содержится в [8].

В публикуемой работе асимптотическим методом исследуется устойчивость упругой пластины в сверхзвуковом потоке газа. Нормальные моды пластины во внутренней области представляются суперпозицией решений в виде бегущих волн и корректируются у каждой из кромок решениями типа динамического краевого эффекта. Исследуются свойства динамических краевых эффектов у передней и задней кромок пластины. Получено уравнение стыковки и показана его счетная устойчивость при больших удлинениях в направлении потока. Изучено влияние внутреннего и внешнего демпфирования. Проанализирован предельный случай — полубесконечная пластина.

1. Рассмотрим прямоугольную в плане упругоизотропную пластину со сторонами a и b , отнесенную к прямоугольной системе координат $Oxyz$ и обтекаемую с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью U в противоположном оси x направлении. Будем считать, что по кромкам $y=0$, $y=b$ выполняются условия шарнирного опирания, а по кромкам, перпендикулярным к направлению потока, — условия жесткого заземления. Предположим, что давление на нижней поверхности пластины равно давлению в невозмущенном потоке газа, а избыточное аэродинамическое давление на колеблющуюся пластину будем вычислять по поршневой теории. В случаях, когда применение этой теории требует дополнительного обоснования, принятую постановку следует трактовать как модельную. Ставится задача об исследовании устойчивости плоской формы пластины. Для упругих систем с дискретным спектром собственных частот, как известно [9], достаточно исследовать элементарные движения пластины в окрестности положения равновесия

$$D \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \Delta w + \rho_0 c_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} - U \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho h \varepsilon' \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y=0, \quad y=b, \quad w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x=0, \quad x=a$$

Здесь $w(x, y, t)$, ρh и D — прогиб, поверхностная плотность и цилиндрическая жесткость пластины, ρ_0 , c_0 , U — параметры невозмущенного потока, ε' — коэффициент внешнего демпфирования, а внутреннее демпфирование в материале пластины учтено по модели Фойхта. Введя безразмерные переменные и параметры $x' = x/b$, $y' = y/b$, $t' = \Omega_0 t$, $\eta = \Omega_0 \tau$, $\varepsilon_0 = \rho_0 c_0 \Omega_0 b^4 / D$, $\varepsilon = \rho h \varepsilon' \Omega_0 b^4 / D$, $\beta = \rho_0 c_0 U b^3 / D$, $\gamma = \varepsilon + \varepsilon_0$, $l = a/b$, $\Omega_0 = (D / \rho h b^4)^{1/2}$ и опуская в дальнейшем штрих у независимых переменных, пе-

решим (1.1) в виде

$$\left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta \Delta w - \beta \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y=0, \quad y=1, \quad w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x=0, \quad x=l$$

Будем использовать комплексную форму записи и за внутреннее решение примем действительную часть выражения

$$w_0(x, y, t) = \{C_1 \exp[i(k_1 x - \omega t)] + C_2 \exp[i(k_2 x - \omega t)]\} \sin n\pi y \quad (1.3)$$

На границе области устойчивости один из характеристических показателей чисто мнимый, поэтому в (1.3) можно считать $\omega > 0$. Волновые числа k_1 и k_2 будем предполагать комплексными и $\text{Im } k_j > 0$, $\text{Re } k_j < 0$ ($j=1, 2$). Внутреннее решение представляет собой суперпозицию двух волн, распространяющихся в направлении потока и амплитуды которых экспоненциально убывают с увеличением x . Выражение (1.3) удовлетворяет уравнению (1.2), если

$$(1 - i\eta\omega)(k_j^2 + n^2\pi^2)^2 - i\beta k_j - i\gamma\omega - \omega^2 = 0 \quad (j=1, 2) \quad (1.4)$$

При выполнении этих условий внутреннее решение удовлетворяет граничным условиям на кромках $y=0$, $y=1$ и не удовлетворяет граничным условиям на кромках $x=0$, $x=l$. В соответствии с основной идеей асимптотического метода [1] у каждой из этих кромок оно должно быть скорректировано решениями типа динамического краевого эффекта. В рассматриваемой задаче достаточно ограничиться случаем $n=1$, и корректирующее решение будем искать в виде $w(x, y, t) = W(x) \exp(-i\omega t) \times \sin \pi y$. Подстановка в (1.2) приводит к одномерной несамосопряженной краевой задаче на собственные значения

$$(1 - i\eta\omega)(W^{IV} - 2\pi^2 W'' + \pi^4 W) - \beta W' - (i\gamma\omega + \omega^2)W = 0 \quad (1.5)$$

$$W = W' = 0, \quad x=0, \quad x=l$$

Частными линейно-независимыми решениями дифференциального уравнения (1.5) являются $\exp(r_j x)$, где r_j ($j=1, 2, 3, 4$) — корни характеристического уравнения

$$(1 - i\eta\omega)(r^2 - \pi^2)^2 - \beta r - i\gamma\omega - \omega^2 = 0 \quad (1.6)$$

В силу (1.4) это уравнение имеет два соответствующих внутреннему решению корня: $r_1 = ik_1$ и $r_2 = ik_2$. Два других корня должны быть использованы для построения корректирующих решений, если они удовлетворяют соответствующим требованиям. Таким образом, полином в левой части (1.6) должен нацело делиться на квадратный трехчлен $r^2 - i(k_1 + k_2) \times r - k_1 k_2$. Для этого с необходимостью должны выполняться равенства

$$(1 - i\eta\omega)[k_1^3 + k_2^3 + (k_1 + k_2)(2\pi^2 + k_1 k_2)] - i\beta = 0 \quad (1.7)$$

$$(1 - i\eta\omega)k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2 + k_1 k_2 + 2\pi^2) + i\gamma\omega + \omega^2 = 0 \quad (1.8)$$

Частное от деления левой части в (1.6) на квадратный трехчлен приводит к уравнению, корни которого

$$r_{3,4} = -1/2 i(k_1 + k_2) \pm [3/4 (k_1 + k_2)^2 - k_1 k_2 + 2\pi^2]^{1/2} \quad (1.9)$$

позволяют судить о характере динамических краевых эффектов и их невырожденности. Так как мнимые части волновых чисел одного знака, то r_3 и r_4 лежат в разных полуплоскостях. Обозначим единственный корень, расположенный в правой полуплоскости, через r_4 . Этот корень соответствует динамическому краевому эффекту на передней по потоку кромке пластины ($x=l$). При этом $\text{Re } r_4 = |\text{Re } r_3| + \text{Im } k_1 + \text{Im } k_2$.

Динамический краевой эффект на передней кромке пластины экспоненциально затухает при удалении внутрь области, и показатель экспоненты примерно в три раза больше показателя экспоненты динамического краевого эффекта у задней кромки. В случае собственных колебаний пластин динамический краевой эффект, как известно, всегда невырожденный, неосциллирующий и порядок затухания на противоположных кромках одинаковый.

2. Построим у каждой из кромок решения, удовлетворяющие уравнению (1.5) и граничным условиям, скорректировав внутреннее решение динамическими краевыми эффектами. Процедура вывода условий стыковки нетривиальна, поскольку связана с рядом дополнительных соображений. Поэтому приведем необходимые выкладки.

Решение у передней кромки в соответствии с (1.3) строим в виде $W(x|l) = C_1 \exp(ik_1 x) + C_2 \exp(ik_2 x) + C_3 \exp[r_4(x-l)]$, где $\text{Re } r_4 > 0$. Удовлетворяя однородным граничным условиям $W(l) = W'(l) = 0$, выразим константы C_4 и C_2 через C_1 . В результате решение примет вид

$$W(x|l) = C_1 \left\{ \exp(ik_1 x) + \frac{ik_1 - r_4}{r_4 - ik_2} \exp[i(k_1 - k_2)l + ik_2 x] + \frac{ik_2 - ik_1}{r_4 - ik_2} \exp[r_4(x-l) + ik_1 l] \right\} \quad (2.1)$$

Аналогично решение у задней кромки строим в виде $W(x|0) = C_1 \exp(ik_1 x) + C_2 \exp(ik_2 x) + C_3 e^{r_3 x}$, где $\text{Re } r_3 < 0$. Постоянными распорядимся так, чтобы удовлетворялись граничные условия $W(0) = W'(0) = 0$. В результате находим

$$W(x|0) = C_1 \left[\exp(ik_1 x) + \frac{ik_1 - r_3}{r_3 - ik_2} \exp(ik_2 x) + \frac{ik_2 - ik_1}{r_3 - ik_2} \exp(r_3 x) \right] \quad (2.2)$$

Вследствие рассеяния энергии последнее слагаемое в (2.2), соответствующее отраженной от задней кромки волне, имеет более высокий порядок малости при больших x по сравнению с первыми двумя. В области, удаленной от задней кромки, этим слагаемым можно пренебречь. Динамический краевой эффект у передней кромки, соответствующий последнему слагаемому в (2.1), как указывалось выше, затухает быстрее. Поэтому область независимого переменного, в которой влиянием краевых эффектов можно пренебречь, смещена к передней по потоку кромке. Приравняем с точностью до динамических краевых эффектов в этой области решения (2.1) и (2.2). В результате получим уравнение стыковки

$$(r_3 - ik_2)(r_4 - ik_1) \exp(ik_1 l) + (r_3 - ik_1)(r_4 - ik_2) \exp(ik_2 l) = 0 \quad (2.3)$$

Подобная операция над производными конечного порядка от решений приводит к тому же уравнению.

Итак, уравнения (1.7), (1.8) и (2.3) содержат неизвестные комплексные волновые числа $k_1 = \alpha_1 + i\gamma_1$, $k_2 = \alpha_2 + i\gamma_2$, вещественный параметр частоты флаттера ω и параметр скорости флаттера β . Эти уравнения эквивалентны шести вещественным уравнениям относительно шести вещественных неизвестных. Если же корни уравнения (1.6) находить численно, то параметры скорости и частоты флаттера следует определять из уравнения стыковки (2.3). Для других случаев однородных граничных условий на передней и задней кромках уравнение стыковки можно получить аналогично.

В случае малой диссипации энергии и небольших l действительная часть корня r_3 , соответствующего динамическому краевому эффекту у задней кромки, может быть близкой к действительной части одного из корней, соответствующих внутреннему решению. Погрешность стыковки может стать существенной. Для этих случаев процедуру стыковки следует видоизменить следующим образом. Скорректированное решение у зад-

ней кромки по-прежнему строим, пренебрегая динамическим краевым эффектом у передней кромки, и оно будет иметь вид (2.2). В окрестности передней кромки подправим это решение соответствующим динамическим краевым эффектом

$$W(x|l) = C_1 \left[\exp(ik_1 x) + \frac{ik_1 - r_3}{r_3 - ik_2} \exp(ik_2 x) + \frac{ik_2 - ik_1}{r_3 - ik_2} \exp(r_3 x) \right] + C_4 \exp[r_4(x-l)] \quad (2.4)$$

Удовлетворяя граничным условиям на передней кромке $W(l) = W'(l) = 0$, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно констант. Условие существования нетривиального решения системы приводит к уравнению

$$(r_3 - ik_2)(r_4 - ik_1) \exp(ik_1 l) - (r_3 - ik_1)(r_4 - ik_2) \exp(ik_2 l) + (r_4 - r_3)(ik_2 - ik_1) \exp(r_3 l) = 0 \quad (2.5)$$

отличающемся от (2.3) слагаемым, соответствующим учету отраженной от задней кромки волны.

3. Соотношение между критическими скоростями флаттера пластин конечной и неограниченной длины обсуждалось рядом авторов [10–13]. Асимптотический метод позволяет легко получить решение этой проблемы. Из уравнения стыковки (2.3) следует, что при $l \rightarrow \infty$ равенство нулю возможно только при $k_1 \rightarrow k_2$. Вывод остается справедливым и для условий шарнирного опирания передней и задней кромок. Итак, при неограниченном увеличении l параметры скорости и частоты флаттера будут стремиться к тем значениям, при которых выполняется условие кратности корней уравнения (1.6). Другими словами, при критическом значении параметра скорости потока алгебраическая функция $r(\omega)$, определяемая дисперсионным уравнением (1.6), имеет точки ветвления на действительной оси частот. Расположение точек ветвления в нижней полуплоскости отвечает устойчивости пластины.

Для отыскания точек ветвления необходимо приравнять нулю результат полинома в левой части (1.6) и его производной. Это приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & 27/_{256} B^4 + B^2 [1 - i\eta_0 \Omega - 9/8 (i\gamma_0 \Omega + \Omega^2)] (1 - i\eta_0 \Omega) - \\ & - [1 - \Omega^2 - i(\gamma_0 + \eta_0) \Omega] (i\gamma_0 \Omega + \Omega^2)^2 (1 - i\eta_0 \Omega) = 0 \quad (3.1) \\ & B = \beta/\pi^3, \quad \Omega = \omega/\pi^2, \quad \gamma_0 = \gamma/\pi^2, \quad \eta_0 = \eta\pi^2 \end{aligned}$$

Условия критерия Рауса — Гурвица для (3.1) приводят к громоздким выражениям. Воспользуемся свойством непрерывности. При $B=0$ точки ветвления расположены в нижней полуплоскости, с увеличением B одна из них пересекает действительную ось. Критическому случаю отвечают вещественные Ω в уравнении (3.1). Последнее эквивалентно системе двух уравнений

$$\begin{aligned} & 27/_{256} B^4 + B^2 [1 - 9/8 (1 + \eta_0 \gamma_0) \Omega^2 + \eta_0^2 \Omega^2] - (1 - \Omega^2) (\Omega^4 - \gamma_0^2 \Omega^2 + 2\gamma_0 \eta_0 \Omega^4) + \\ & + [\eta_0 \Omega (\Omega^4 - \gamma_0^2 \Omega^2) - 2\gamma_0 \Omega^3] (\eta_0 + \gamma_0) \Omega = 0 \quad (3.2) \\ & - B^2 [\eta_0 \Omega (2 - 9/8 \Omega^2) + 9/8 \gamma_0 \Omega] + (\eta_0 + \gamma_0 \Omega) (\Omega^4 - \gamma_0^2 \Omega^2 + 2\gamma_0 \eta_0 \Omega^4) + \\ & + (1 - \Omega^2) [\eta_0 \Omega (\Omega^4 - \gamma_0^2 \Omega^2) - 2\gamma_0 \Omega^3] = 0 \end{aligned}$$

Физический смысл имеет то решение (Ω_*, B_*) , у которого B_* наименьшее. Поскольку каждое из уравнений (3.2) полиномиальное по Ω и B , то можно исключить, например, Ω построением результата, зависящего лишь от B , η_0 и γ_0 . Методом дихотомии численно были получены зависи-

l	η	β*		ω*	
		асимпт.	точн.	асимпт.	точн.
1	0,005	549,63	512,20	42,466	39,589
	0,025	768,07	761,07	39,840	39,691
	0,045	1145,00	1143,50	39,753	39,755
	0,065	1564,79	1564,67	39,759	39,777
2	0,005	139,09	140,94	18,570	18,330
	0,025	163,68	163,73	18,384	18,357
	0,045	206,04	206,02	18,478	18,465
	0,065	257,15	257,13	18,523	18,524

мости $B_*(\gamma_0)$ при фиксированных η_0 и $B_*(\eta_0)$ при фиксированных γ_0 . Значения Ω_* вычислялись для каждого B_* , используя одно из уравнений (3.2).

При отсутствии внутреннего демпфирования система уравнений (3.2) упрощается

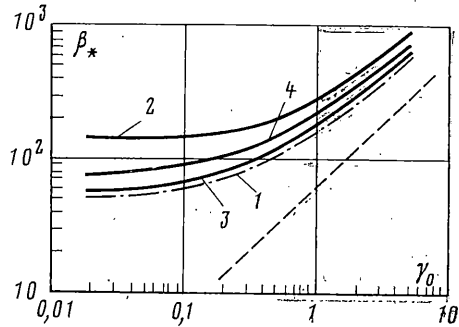
$$^{27}/_{256}B^4 + B^2(1 - ^9/_8\Omega^2) + \Omega^6 - (1 + 3\gamma_0^2)\Omega^4 + \gamma_0^2\Omega^2 = 0$$

$$^9/_8B^2 - 3\Omega^4 + (\gamma_0^2 + 2)\Omega^2 = 0 \quad (3.3)$$

Для $\gamma_0 \rightarrow 0$ эта система имеет решение $\Omega_* = 2/\sqrt{3}$, $B_* = 8/(3\sqrt{3})$. Это значение B_* было получено в [10] другим методом.

Приведем несколько значений корней $B_*(\gamma_0)$ уравнения, полученного из (3.3) исключением Ω : $B_*(0,01) = 1,67$, $B_*(0,05) = 1,94$, $B_*(1,0) = 5,66$, $B_*(5,0) = 23,69$. Большие значения

параметра внешнего и аэродинамического демпфирования ($\gamma = \gamma_0 \pi^2$) приняты для того, чтобы можно было использовать для сравнения результаты [11]. На графике фиг. 1 эта зависимость нанесена штрихпунктирной линией (кривая 1). По обеим осям принят логарифмический масштаб. С увеличением l зависимости $\beta_*(\gamma_0)$, полученные в [11] численной реализацией точного метода решения (кривые 2, 3, 4 соответствуют $l = 2, 4, 10$), приближаются к предельной зависимости, полученной



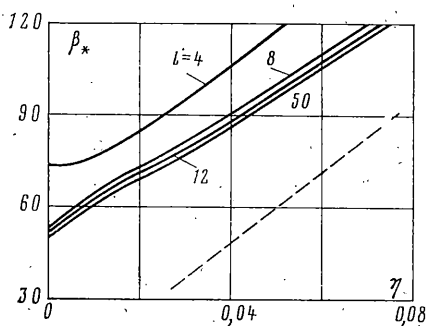
Фиг. 1

асимптотическим методом. При $l=10$ параметр частоты флаттера $\Omega_* = 1,2$ близок к предельному значению $\Omega_* = 2/\sqrt{3}$. Наклонная штриховая прямая соответствует зависимости $\beta_* = 2\pi^3\gamma_0$, полученной для бесконечной в направлении потока пластины, если не учитывать краевые эффекты и решение уравнения (1.2) искать в виде бегущей волны.

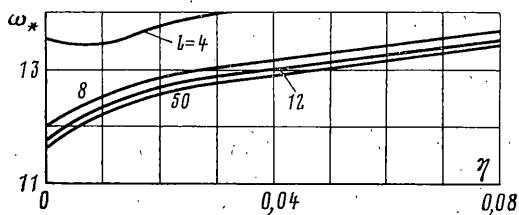
$$w(x, y, t) = C \exp [i(kx - \omega t)] \sin \pi y \quad (3.4)$$

где $\text{Im } k = 0$. На графике фиг. 1 видно, что даже при нереально больших значениях параметра γ_0 согласия с предельной зависимостью не наблюдается. Этот факт отмечался для сверхзвуковых скоростей в [13].

4. Решение уравнений асимптотического метода (1.7), (1.8) и (2.3) заменялось эквивалентной задачей отыскания нулевых минимумов целевой функции шести переменных. В качестве последней принималась сумма модулей левых частей уравнений. Минимизация выполнялась численно методом Нелдера — Мида. На графике фиг. 2 показаны зависимости параметра скорости флаттера β_* от параметра внутреннего демпфирования η для различных значений l и $\gamma = 0,05$. Уже при $l=8$ перестает ска-



Фиг. 2



Фиг. 3

зваться дестабилизирующее влияние внутреннего демпфирования. Кривая, соответствующая значению $l=50$, совпадает с предельной зависимостью. Штриховая прямая соответствует зависимости

$$\beta_* = \min_{k>0} (k + \pi^2/k) [\gamma + \eta (k^2 + \pi^2)^2]$$

полученной для решений, задаваемых формулой (3.4). Зависимости параметра частоты флаттера ω_* от параметра внутреннего демпфирования η показаны на фиг. 3 для различных значений l .

Значения ω_* и β_* при $\gamma=0,05$, полученные по асимптотическому методу и реализацией схемы точного решения, представлены в таблице.

Автор выражает благодарность А. Г. Воронову за помощь в вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. — ПММ, 1960, т. 24, вып. 5, с. 831—842.
2. Москаленко В. Н. О спектрах частот собственных колебаний оболочек вращения. — ПММ, 1972, т. 36, вып. 2, с. 301—305.
3. Dickinson S. M., Warburton G. B. Natural frequencies of plate systems using the edge effect method. — J. Mech. Eng. Sci., 1967, v. 9, No. 4, p. 318—324.
4. King W. W., Lin C.-C. Applications of Bolotin's method to vibrations of plates. — AIAA Journal, 1974, v. 12, No. 3, p. 399—401.
5. Бендик Н. Н., Корнев В. М. О плотности собственных значений в задачах устойчивости тонких упругих оболочек. — ПММ, 1971, т. 35, вып. 2, с. 364—368.
6. Dickinson S. M. Modified Bolotin's method applied to buckling and vibration of stressed plates. — AIAA Journal, 1975, v. 13, №-12, p. 1672—1673.
7. Ермоленко В. М. О плотности собственных чисел в некоторых задачах устойчивости ортотропных оболочек. — Динамика сплошной среды: Сб. статей. Вып. 32. Новосибирск: Изд-е Ин-та гидродин. СО АН СССР, 1977, с. 27—35.
8. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.
9. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
10. Мовчан А. А. Об устойчивости панели, движущейся в газе. — ПММ, 1957, т. 21, вып. 2, с. 231—243.
11. Digundji J. Theoretical considerations of panel flutter at high supersonic Mach number. — AIAA Journal, 1966, v. 4, No. 7, p. 1257—1266.
12. Dowell E. H. Panel flutter: a review of the aeroelastic stability of plates and shells. — AIAA Journal, 1970, v. 8, No. 3, p. 385—399.
13. Dowell E. H., Ventres C. S. Flutter of low aspect ratio plates. — AIAA Journal, 1970, v. 8, No. 6, p. 1162—1164.

Москва

Поступила в редакцию
18.VI.1981