МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1984

УДК 533.6.013.42

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ ПРОТЕКАНИИ ЧЕРЕЗ НИХ ПУЛЬСИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

ЧЕЛОМЕЙ С. В.

В настоящее время проблема динамической устойчивости гидроупругих систем, представляющих собой трубопроводы, полые пластины, оболочки с протекающей внутри них жидкостью, имеющей как постоянную, так и пульсирующую составляющую скорости, стала привлекать все большее внимание исследователей.

Первая работа, связанная с постановкой проблемы, относится к 1876 г. [1]. С этого времени и примерно до 60-х годов нашего столетия задача об устойчивости простейших гидроупругих систем (труб) изучалась при протекании в них постоянного потока жидкости [2–5]. Однако, как показала практика, поток жидкости, протекающий через трубопроводы, не всегда постоянен, а может иметь периодическую составляющую скорости. В этом случае при определенных частотах колебаний потока жидкости в трубопроводе могут возникнуть опасные поперечные параметрические колебания. Появление таких колебаний нежелательно, поскольку они могут привести к различного рода разрушениям.

В связи с этим в литературе стали появляться работы, посвященные динамической устойчивости трубопроводов при протекании через них жидкости, имеющей периодическую составляющую скорости [6–10].

В этих работах определялись области динамической неустойчивости основных и комбинационных резонансов. К сожалению, в ряде работ, например [9, 10], области неустойчивости параметрических резонансов определены численными методами, что не позволяет провести в дальнейшем их качественный анализ, а комбинационные резонансы не разделены по типам (суммарный и разностный). В [7] комбинационные резонансы вообще не рассматривались. В [8] приведены аналитически полученные методом [11] области динамической неустойчивости основных и комбинационных резонансов, однако их качественный анализ также отсутствует.

Цель настоящей работы – подробное исследование уравнений динамической устойчивости прямого упругого трубопровода, через который протекает невязкая несжимаемая жидкость с небольшой пульсирующей составляющей скорости. Такое исследование позволило получить ряд новых и важных результатов в теории динамической устойчивости гидроупругих систем.

Так, например, получены зависимости, с помощью которых можно провести как качественный, так и численный анализ основных и суммарно-разностных комбинационных резонансов, выведено «правило знаков», позволяющее по виду только коэффициентов исходных дифференциальных уравнений определить, между какими формами колебаний может возникнуть тот или иной тип комбинационного резонанса, найден критерий существования комбинационных резонансов.

Полученные зависимости позволяют установить условия подавления параметрических резонансов в рассматриваемых системах.

1. Основные дифференциальные уравнения. Уравнение динамического равновесия прямой упругой трубы длиной l, концы которой не имеют возможности свободно перемещаться и через которую со скоростью $v=v(t)$ протекает неразрывный поток жидкости, имеет вид [8]

$$EJ\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+k_1J\frac{\partial^5 u}{\partial x^4\,\partial t}+k_2\frac{\partial u}{\partial t}+\rho v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+$$
$$+2\rho v\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\rho\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}+(\rho+m)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad (1.1)$$

В уравнении (1.1) первый член является погонной силой упругости, второй и третий — погонной силой внутреннего и внешнего демпфирования, четвертый — погонной центробежной силой, пятый — погонной силой Кориолиса, шестой — погонной силой от продольных колебаний жидкости, а седьмой — погонной силой инерции поперечных колебаний, ρ и m — линейная масса жидкости и трубы, $u=u(x, t)$ — малые поперечные перемещения трубы.

Будем искать решение (1.1) в виде ряда $u=\sum \varphi_j(t)Y_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots)$, где $Y_j(x)$ — нормальные функции, удовлетворяющие условиям ортогональности

$$\int_0^l Y_j^{IV}Y_i\,dx=0, \qquad \int_0^l Y_jY_i\,dx=0 \qquad (i\neq j;\ i,j=1,2,\ldots)$$

Полагая $v(t)=v_0+v_1\cos pt$, $(v_0>v_1)$, получим для функций времени $\varphi_i(t)$ бесконечную систему дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами

$$\frac{d^2\varphi_i}{dt^2}+\omega_i\delta_{ii}\frac{d\varphi_i}{dt}+\omega_i^2\varphi_i+2\omega_i\cos pt\sum_{j=1}^{\infty}\eta_{ij}\frac{d\varphi_j}{dt}+2\omega_i^2\sum_{j=1}^{\infty}(\gamma_{ij}\cos pt-$$

$$-k_i\eta_{ij}\sin pt+q_{ij}\cos 2pt)\varphi_j+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\infty}\left(\omega_i^2\beta_{ij}\varphi_j+\omega_i\mu_{ij}\frac{d\varphi_j}{dt}+d_{ij}\frac{d^2\varphi_j}{dt^2}\right)=0 \qquad (i=1,2,\ldots) \tag{1.2}$$

$$\omega_i^2=\Omega_i^2+(v_0^2+{}^1/_2v_1^2)c_{ii}, \qquad \delta_{ii}=(f_{ii}+2v_0b_{ii})/\omega_i$$

$$\eta_{ij}=v_1b_{ij}/\omega_i, \quad \gamma_{ij}=v_0v_1c_{ij}/\omega_i^2, \quad k_i=p/2\omega_i$$

$$q_{ij}=v_1^2c_{ij}/4\omega_i^2, \qquad \beta_{ij}=(v_0^2+{}^1/_2v_1^2)c_{ij}/\omega_i^2$$

$$\mu_{ij}=(g_{ij}+2v_0b_{ij})/\omega_i, \qquad f_{ij}=k_1\Omega_i^2/E+k_2/(\rho+m)$$

$$\Omega_i^2=\frac{EJ}{(\rho+m)}\frac{\int_0^l Y_i^{IV}Y_j\,dx}{L}, \qquad d_{ij}=\frac{\rho}{(\rho+m)}\frac{\int_0^l Y_iY_j\,dx}{L},$$

$$b_{ij}=\frac{\rho}{(\rho+m)}\frac{\int_0^l Y_j'Y_i\,dx}{L}$$

$$c_{ij}=\frac{\rho}{(\rho+m)}\frac{\int_0^l Y_j''Y_i\,dx}{L}, \qquad g_{ij}=\frac{k_2}{(\rho+m)}\frac{\int_0^l Y_iY_j\,dx}{L}, \qquad L=\int_0^l Y_i^2\,dx$$

2. Основные и комбинационные резонансы. Если считать величины δ_{ii}, η_{ij}, γ_{ij}, q_{ij}, β_{ij}, μ_{ij} и d_{ij} малыми величинами одного порядка малости ε, то из (1.2) следует, что в первом приближении в системе будут возникать такие резонансы:

$$p=\omega_i, \quad p=2\omega_i, \quad p={}^1/_2|\omega_i\pm\omega_j| \ (i\neq j), \quad p=|\omega_i\pm\omega_j| \ (i\neq j)$$

Используя асимптотические методы интегрирования подобного рода уравнений [12, 13], получим с точностью до величин порядка ε области неустойчивости и условия возникновения неустойчивости для основных и комбинационных резонансов (2.1).

Для основных резонансов $p=\omega_i$ и $p=2\omega_i$ имеем

$$\omega_i(1-{}^1/_2\sqrt{q_{ii}^2-\delta_{ii}^2})<p<\omega_i(1+{}^1/_2\sqrt{q_{ii}^2-\delta_{ii}^2}), \quad q_{ii}^2>\delta_{ii}^2 \tag{2.2}$$

$$2\omega_i(1-{}^1/_2\sqrt{\gamma_{ii}^2-\delta_{ii}^2})<p<2\omega_i(1+{}^1/_2\sqrt{\gamma_{ii}^2-\delta_{ii}^2}), \quad \gamma_{ii}^2>\delta_{ii}^2 \tag{2.3}$$

Как видно из формул (2.3), при динамической неустойчивости вызываемой основным резонансом $p=2\omega_i$, в первом приближении пульсирующая составляющая силы Кориолиса и сила продольных колебаний жидкости уничтожают друг друга.

Для комбинационных резонансов $p={}^1/_2|\omega_i\pm\omega_j|$ области неустойчивости и условия возникновения неустойчивости определяются зависимостями

$$\begin{gathered}{}^1/_2|\omega_i\pm\omega_j|-\frac{\omega_i\delta_{ii}+\omega_j\delta_{jj}}{2\sqrt{\delta_{ii}\delta_{jj}}}\sqrt{\pm q_{ij}q_{ji}-\delta_{ii}\delta_{jj}}<p<{}^1/_2|\omega_i\pm\omega_j|+\\+\frac{\omega_i\delta_{ii}+\omega_j\delta_{jj}}{2\sqrt{\delta_{ii}\delta_{jj}}}\sqrt{\pm q_{ij}q_{ji}-\delta_{ii}\delta_{jj}}, \qquad |q_{ij}q_{ji}|>\delta_{ii}\delta_{jj} \quad (i\neq j)\end{gathered}$$

В формулах (2.4) для резонанса суммарного типа должно выполняться условие

$$\operatorname{sign} q_{ij}=\operatorname{sign} q_{ji} \quad (i\neq j) \tag{2.5}$$

а для резонанса разностного типа условие (2.5) не должно выполняться.

Для комбинационного резонанса суммарного типа $p=\omega_i+\omega_j$ область неустойчивости и условие возникновения неустойчивости имеют два значения:

$$\omega_i+\omega_j-{}^1/_2\sqrt{A_{ij}}<p<\omega_i+\omega_j+{}^1/_2\sqrt{A_{ij}}, \quad A_{ij}>0 \quad (i\neq j) \tag{2.6}$$

$$\omega_i+\omega_j-{}^1/_2\sqrt{B_{ij}}<p<\omega_i+\omega_j+{}^1/_2\sqrt{B_{ij}}, \quad B_{ij}>0 \quad (i\neq j) \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}A_{ij}=\frac{2A}{B+\sqrt{B^2-4AC}}(n_{ij}^2+\omega_i^2\gamma_{ij}^2)+\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}(n_{ji}^2+\omega_j^2\gamma_{ji}^2)+\\+2(\omega_i\omega_j\gamma_{ij}\gamma_{ji}+n_{ij}n_{ji})-(\omega_i\delta_{ii}+\omega_j\delta_{jj})^2\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}B_{ij}=\frac{2A}{B-\sqrt{B^2-4AC}}(n_{ij}^2+\omega_i^2\gamma_{ij}^2)+\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}(n_{ji}^2+\omega_j^2\gamma_{ji}^2)+\\+2(\omega_i\omega_j\gamma_{ij}\gamma_{ji}+n_{ij}n_{ji})-(\omega_i\delta_{ii}+\omega_j\delta_{jj})^2\\A=\omega_i^2\delta_{ii}^2(n_{ji}^2+\omega_j^2\gamma_{ji}^2), \qquad B=2\omega_i\omega_j\delta_{ii}\delta_{jj}(n_{ij}n_{ji}+\\+\omega_i\omega_j\gamma_{ij}\gamma_{ji})+(n_{ij}\gamma_{ji}\omega_j-n_{ji}\gamma_{ij}\omega_i)^2\\C=\omega_j^2\delta_{jj}^2(n_{ij}^2+\omega_i^2\gamma_{ij}^2), \qquad n={}^1/_2(\omega_i-\omega_j)\eta_{ij}\end{gathered}$$

Анализ выражений (2.6), (2.7) показывает, что если выполняется условие

$$(\delta_{jj}\omega_j)^2>(\delta_{ii}\omega_i)^2 \quad (i\neq j) \tag{2.8}$$

то будут справедливы формулы (2.6), в противном случае – (2.7).

Для комбинационного резонанса разностного типа $p=|\omega_i-\omega_j|$ также существует два значения для области неустойчивости

$$|\omega_i-\omega_j|-{}^1/_2\sqrt{C_{ij}}<p<|\omega_i-\omega_j|+{}^1/_2\sqrt{C_{ij}}, \quad C_{ij}>0 \quad (i\neq j) \tag{2.9}$$

$$|\omega_i-\omega_j|-{}^1/_2\sqrt{D_{ij}}<p<|\omega_i-\omega_j|+{}^1/_2\sqrt{D_{ij}}, \quad D_{ij}>0 \quad (i\neq j) \tag{2.10}$$

$$C_{ij}=\frac{2A}{D+\sqrt{D^2-4AC}}(r_{ij}^2+\omega_i^2\gamma_{ij}^2)+\frac{D+\sqrt{D^2-4AC}}{2A}(r_{ji}^2+\omega_j^2\gamma_{ji}^2)+$$
$$+2(r_{ij}r_{ji}-\omega_i\omega_j\gamma_{ij}\gamma_{ji})-(\omega_i\delta_{ii}+\omega_j\delta_{jj})^2$$

$$D_{ij}=\frac{2A}{D-\sqrt{D^2-4AC}}(r_{ij}^2+\omega_i^2\gamma_{ij}^2)+\frac{D-\sqrt{D^2-4AC}}{2A}(r_{ji}^2+\omega_j^2\gamma_{ji}^2)+$$
$$+2(r_{ij}r_{ji}-\omega_i\omega_j\gamma_{ij}\gamma_{ji})-(\omega_i\delta_{ii}+\omega_j\delta_{jj})^2$$
$$D=2\omega_i\omega_j(r_{ij}r_{ji}-\omega_i\omega_j\gamma_{ij}\gamma_{ji})+(r_{ij}\gamma_{ji}\omega_j+r_{ji}\gamma_{ij}\omega_i)^2,\quad r_{ij}={}^1/_2(\omega_i+\omega_j)\eta_{ij}$$

Здесь также, если выполняется неравенство (2.8), будут справедливы формулы (2.9), в противном случае — (2.10).

В частном случае $\delta_{ii}=0$ $(i=1, 2,\ldots)$ формулы (2.6), (2.7) объединяются в одну

$$\omega_i+\omega_j-\sqrt{n_{ij}n_{ji}+\gamma_{ij}\gamma_{ji}\omega_i\omega_j}<p<\omega_i+\omega_j+\sqrt{n_{ij}n_{ji}+\gamma_{ij}\gamma_{ji}\omega_i\omega_j}$$
$$n_{ij}n_{ji}+\gamma_{ij}\gamma_{ji}\omega_i\omega_j>0 \quad (i\neq j)$$

Аналогично в случае (2.9), (2.10) будем иметь

$$|\omega_i-\omega_j|-\sqrt{r_{ij}r_{ji}-\gamma_{ij}\gamma_{ji}\omega_i\omega_j}<p<|\omega_i-\omega_j|+\sqrt{r_{ij}r_{ji}-\gamma_{ij}\gamma_{ji}\omega_i\omega_j}$$
$$r_{ij}r_{ji}-\gamma_{ij}\gamma_{ji}\omega_i\omega_j>0 \quad (i\neq j)$$

3. Условия возникновения резонансов. Анализ приведенных результатов дает возможность сформулировать следующие новые и важные положения теории динамической устойчивости рассматриваемых гидроупругих систем.

1. Критерий существования комбинационных резонансов. Если рассматриваемая упругая система, описываемая уравнениями (1.2), такова, что формы нормальных колебаний ее удовлетворяют условиям

$$\int_0^l Y_j''Y_i\,dx=0 \quad \int_0^l Y_j'Y_i\,dx=0 \qquad (i\neq j; i,j=1,2,\ldots)$$

то в такой системе невозможно возникновение комбинационных резонансов.

2. «Правило знаков» для комбинационных резонансов. Ниже приведено правило знаков для систем вида (1.2) при $\delta_{ii}=0$, позволяющее по виду только коэффициентов γ_{ij} и η_{ij} определить, какой тип комбинационного резонанса может возникнуть в рассматриваемой системе и между какими формами колебаний он будет иметь место.

Пусть в системе выполяются условия $\operatorname{sign}\gamma_{ij}=\operatorname{sign}\gamma_{ji}$, $\operatorname{sign}\eta_{ij}=\operatorname{sign}\eta_{ji}$ $(i\neq j)$. В этом случае условием возникновения комбинационного резонанса суммарного типа $(p=\omega_i+\omega_j)$ будет $\omega_i\omega_j\gamma_{ij}\gamma_{ji}>|n_{ij}n_{ji}|$; при $\eta_{ij}=0$ резонанс есть, а при $\gamma_{ij}=0$ резонанса нет. Для комбинационного резонанса разностного типа $(p=|\omega_i-\omega_j|)$ имеем условие $r_{ij}r_{ji}>\omega_i\omega_j\gamma_{ij}\gamma_{ji}$; при $\eta_{ij}=0$ резонанса нет, а при $\gamma_{ij}=0$ резонанс есть.

В случае $\operatorname{sign}\gamma_{ij}\neq\operatorname{sign}\gamma_{ji}$, $\operatorname{sign}\eta_{ij}=\operatorname{sign}\eta_{ji}$ $(i\neq j)$ комбинационные резонансы суммарного типа вообще отсутствуют, а комбинационные резонансы разностного типа будут возникать при любых γ_{ij} и η_{ij}.

Если выполняются соотношения $\operatorname{sign}\gamma_{ij}=\operatorname{sign}\gamma_{ji}$, $\operatorname{sign}\eta_{ij}\neq\operatorname{sign}\eta_{ji}$ $(i\neq j)$, то комбинационные резонансы суммарного типа будут возникать при любых γ_{ij} и η_{ij}, а комбинационные резонансы разностного типа вообще в системе отсутствуют.

И, наконец, при $\operatorname{sign}\gamma_{ij}\neq\operatorname{sign}\gamma_{ji}$, $\operatorname{sign}\eta_{ij}\neq\operatorname{sign}\eta_{ji}$ $(i\neq j)$ условием возникновения комбинационного резонанса суммарного типа будет $n_{ij}n_{ji}>$

$>|\gamma_{ij}\gamma_{ji}|\omega_i\omega_j$; при $\eta_{ij}=0$ резонанса нет, а при $\gamma_{ij}=0$ резонанс есть. Условие возникновения комбинационного резонанса разностного типа в этом случае имеет вид $\omega_i\omega_j|\gamma_{ij}\gamma_{ji}|>|r_{ij}r_{ji}|$; при $\eta_{ij}=0$ резонанс есть, а при $\gamma_{ij}=0$ резонанса нет.

Приведенное «правило знаков» позволяет, не решая исходной системы дифференциальных уравнений, определить формы колебаний и типы комбинационных резонансов, которые могут между этими формами возникнуть. Это правило является обобщением на системы с пульсирующим демпфированием «правила знаков», изложенного в [13].

Кроме перечисленных результатов, анализ систем типа (1.2) показывает, что такие системы допускают расширение области неустойчивости комбинационных резонансов при введении дополнительного демпфирования. Более того, в ряде случаев увеличение коэффициентов параметрического возбуждения γ_{ij} и η_{ij} в таких системах может привести при определенных условиях не к расширению, а к сужению областей неустойчивости комбинационных резонансов. Возможен и обратный эффект: уменьшение коэффициентов γ_{ij} и η_{ij} приводит к расширению областей неустойчивости комбинационных резонансов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aitken J.* An account on some experiments on rigidity produced by centrifugal force.– Philos. Mag., 1878, ser V, No. 5, p. 81–105.
2. *Ashley H., Haviland G.* Bending vibrations of a pipeline containing flowing fluid.– J. Appl. Mech., 1950, v. 17, No. 3, p. 229–232.
3. *Феодосьев В. И.* О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости.– Инж. сб., 1951, т. 10, с. 169–170.
4. *Housner G. W.* Bending vibrations of a pipeline containing flowing fluid.– J. Appl. Mech., 1952, v. 19, No. 2, p. 205–208.
5. *Long R. H.* Experiments and theoretical study of transverse vibrations of a tube containing flowing fluid.– J. Appl. Mech., 1955, v. 22, No. 1, p. 65–68.
6. *Gregory R. W., Paidoussis M. P.* Unstable oscillation of tubular cantelevers conveging fluid. Theory and experiments.– Proc. Roy. Soc. A, 1966, 293, p. 512–542.
7. *Кондрашов Н. С.* Параметрические колебания трубопроводов на упругодемпфирующих опорах, вызываемые пульсирующим потоком.– В кн.: Рассеивание энергии при колебаниях механических систем. Киев: Наук. думка, 1968, с. 427–433.
8. *Chen S. S.* Dynamic stability of a tube conveging fluid.– J. Engng Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1971, v. 97, p. 1469–1485.
9. *Paidoussis M. P., Issid N. T.* Dynamic Stability of pipes conveging fluid.– J. of Sound and Vibr., 1974, v. 33, No. 3, p. 267–294.
10. *Paidoussis M. P., Issid N. T.* Experiments on parametric resonance of pipes containing pulsatile flow.– J. Appl. Mech., 1976, v. 43, No. 2, p. 198–202.
11. *Hsu C. S.* On the parametric excitation of a dynamic system having multiple degrees of freedom.– J. Appl. Mech., 1963, v. 30, No. 3, p. 367–372.
12. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974, с. 503.
13. *Челомей С. В.* О динамической устойчивости упругих систем.– Докл. АН СССР, 1980, т. 252, № 2, с. 307–310.

Москва

Поступила в редакцию
25.XI.1983