МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1984

УДК 624.07:534.1

О ДВИЖЕНИИ КОЛЬЦА ПРИ УДАРЕ О ПОВЕРХНОСТЬ С ТРЕНИЕМ

СИНИЦЫН В. А.

Изучается движение плоского твердого кольца при ударе о поверхность с учетом сухого трения.

Предполагается, что соприкосновение абсолютно твердого кольца и поверхности происходит по линии. Для модели взаимодействия тел, описанной в [1], составлены дифференциальные уравнения движения кольца при ударе. В частных случаях движений, близких поступательному и вращению вокруг оси, проходящей через геометрический центр кольца, установлены некоторые свойства движения основания кольца. Приводится сравнение полученных результатов с гипотезами о движении «плоских частиц» при подбрасывании.

1. Задача о движении абсолютно твердого тела на абсолютно твердой плоскости при соприкосновении бесконечным числом точек является неопределенной. Отказ от абсолютной твердости одного из взаимодействующих тел является основой моделей плоского движения, описанных в [1, 2]. Области применения этих моделей вообще различны и определяются физическими свойствами тел. В публикуемой работе принимаются предположения работы [1]: кольцо в процессе удара остается плоским, поверхность допускает незначительную деформацию, пропорциональную местному давлению. Упругие свойства материала кольца и поверхности характеризуются коэффициентами восстановления $0\leqslant\varepsilon\leqslant1$ и упругости. Предположение о малости деформации поверхности соответствует неограниченной величине коэффициента упругости в процессе удара. Трение локально описывается законом Кулона с постоянным коэффициентом трения скольжения.

Движение происходит под действием ударных сил: длительность процесса и перемещения материальных точек пренебрежимо малы. В рассматриваемой системе ударные силы определяются только реакцией поверхности. В момент, непосредственно предшествующий удару о поверхность, плоскость кольца параллельна плоскости поверхности, поле скоростей точек кольца винтовое с осью, перпендикулярной плоскости кольца.

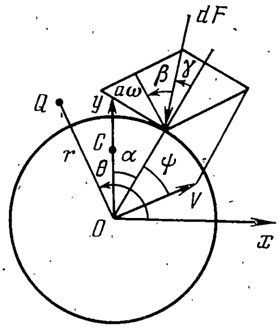
Плоскую фигуру, полученную проектированием точек контакта на недеформированную плоскую поверхность, назовем [1] основанием кольца. Основание кольца при пренебрежении величиной деформации поверхности является окружностью радиуса, равного радиусу кольца (a). Составим уравнения движения кольца в проекциях на оси правой цилиндрической системы координат (r, θ, z), начало которой в центре основания кольца O. Направления осей показаны на фиг. 1: Q — мгновенный центр скоростей основания, угол θ — между направлением на мгновенный центр скоростей и осью x неподвижной декартовой системы координат xyz (ось z перпендикулярна плоскости основания).

В качестве независимой переменной выберем импульс нормальной составляющей реакции плоскости, который обозначим S ($dS=Ndt$, где N — проекция реакции на ось z).

Скорость центра масс C кольца связана со скоростью точки кольца, совпадающей с центром основания O, кинематическим соотношением (ω — вектор угловой скорости кольца):

$$\mathbf{V}_C=\mathbf{V}_O+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{OC} \qquad (1.1)$$

Учитывая, что положение кольца в процессе удара принимается неизменным, а изменяются только скорости точек, получаем уравнения движения центра масс кольца и уравнения вращательного движения кольца относительно осей Кёнига в следующем виде:



$$m(V\theta'-h\omega'\cos\theta)=\Phi_r \qquad (1.2)$$

$$m(-V'+h\omega'\sin\theta)=\Phi_\theta, \quad mu'=1, \quad I_C\omega'=M_C$$

В уравнениях (1.2) m, $I_C=m\rho^2$ — масса и момент инерции кольца относительно оси Cz (ρ — радиус инерции), h — расстояние от точки O до точки C, $-V$ — проекция скорости центра основания O на трансверсальное направление (скорость скольжения кольца V), u, ω — проекции скорости центра масс и угловой скорости кольца на ось Oz, Φ_r, Φ_θ, M_C — проекции главного вектора и главного момента сил трения, отнесенные к величине нормальной реакции N, V', θ', ω' — производные по S.

Плоская форма кольца и специальный выбор начального состояния обеспечивают тождественное равенство нулю проекций угловой скорости на две другие оси, поэтому уравнения для них не выписаны. Непосредственное интегрирование уравнения $mu'=1$ показывает, что принятый в качестве независимой переменной импульс S пропорционален приращению скорости u (скорость «сближения»). Поэтому пределы изменения S определяются изменением скорости u от начального (доударного) значения, которое должно быть отрицательным $u^-<0$, до нуля (первая фаза удара). Вторая фаза заканчивается при достижении послеударной скорости $u^+=-\varepsilon u^-$.

Прежде чем вычислять функции Φ_r, Φ_θ, M_C, найдем предельное значение h, при котором контакт с поверхностью имеется по всей длине контура кольца. При этом заметим, что в принятой модели взаимодействия сосредоточенные силы давления на поверхность отсутствуют (давление имеет непрерывное распределение по контуру). Последовательность проводимых рассуждений соответствует [1] и справедлива для любого плоского контура.

Пусть уравнение плоскости контура кольца в произвольный момент удара имеет вид

$$z=a_1x+b_1y+c_1 \qquad (1.3)$$

(координатная плоскость xy совпадает с недеформированной плоскостью поверхности, а оси Ox, Oy являются главными осями эллипса инерции, построенного для центра тяжести контура основания). Поэтому имеем

$$\int x\,dl=0, \quad \int y\,dl=0, \quad \int xy\,dl=0 \qquad (1.4)$$

$$I_x=\int y^2\,dl=L\sigma_x^2, \quad I_y=\int x^2\,dl=L\sigma_y^2$$

где L — длина контура, I_x, I_y, σ_x, σ_y — моменты и радиусы инерции контура основания. Пусть упругие силы при деформации поверхности в любой момент процесса удара подчиняются закону Гука с коэффициентом пропорциональности $\varkappa$, тогда

$$\varkappa\int z\,dl=N \qquad (1.5)$$

С учетом (1.4), (1.5) получаем уравнение линии нулевого давления ($z=0$):

$$x_* x/\sigma_y^2 + y_* y/\sigma_x^2 + 1 = 0 \qquad (1.6)$$

где x_*, y_* — координаты центра давления.

Применяя принцип Даламбера, нетрудно убедиться в том, что в рассматриваемом случае плоского материального контура центр сил давления совпадает с центром масс, т. е. $x_*=x_C$, $y_*=y_C$.

У окружности любые оси в ее плоскости для центра O являются главными, поэтому направим ось Oy так, чтобы она проходила через точку C (фиг. 1). Тогда

$$x_*=0, \quad y_*=h \qquad (1.7)$$

Чтобы линия нулевого давления касалась основания кольца ($y=-a$) или лежала вне его, с учетом (1.7) и значений радиусов инерции окружности $\sigma_x=\sigma_y=a\sqrt{2}$ из (1.6) получаем неравенство $h\leqslant a/2$.

Далее предположим, что это неравенство выполняется. Из (1.3), (1.7) следует, что в симметричных относительно оси Oy точках давление одинаково. Элементарная сила трения, приложенная к элементу контура dl с координатами x, y, согласно (1.3) равна (f — коэффициент трения скольжения): $dF=(fN/L)(x_* x/\sigma_y^2+y_* y/\sigma_x^2+1)\,dl$.

Элементарная сила трения, отнесенная к величине нормальной реакции N, с учетом (1.7) для кольца определяется выражением

$$d\Phi=dF/N=(h_1 y+h_2)\,dl,\ h_1=fh/(\pi a^3),\ h_2=f/(2\pi a) \qquad (1.8)$$

Направление элементарной силы трения dF противоположно вектору скорости элемента контура основания (фиг. 1), поэтому для вычисления Φ_r, Φ_θ и M_O (алгебраического момента сил трения относительно центра O, отнесенного к N) имеем

$$d\Phi_r=-d\Phi\cos\beta, \quad d\Phi_\theta=d\Phi\sin\beta, \quad dM_O=-d\Phi a\sin\gamma \qquad (1.9)$$

Используя углы ψ и θ ($\alpha=\theta-\pi$) (фиг. 1), представим равенство (1.8) в виде

$$d\Phi=(A+B\cos\psi+C\sin\psi)\,d\psi \qquad (1.10)$$

$$A=ah_2, \quad B=-h_1a^2\cos\theta, \quad C=h_1a^2\sin\theta$$

Через угол ψ и отношение $q=V/(a\omega)$ выражаются также тригонометрические функции в правых частях (1.9) [3]:

$$\cos\beta=(1+q^2)^{-1/2}(1-J\sin\psi)^{-1/2}\cos\psi \qquad (1.11)$$

$$\sin\beta=(1+q^2)^{-1/2}(1-J\sin\psi)^{-1/2}(q-\sin\psi)$$

$$\sin\gamma=(1+q^2)^{-1/2}(1-J\sin\psi)^{-1/2}(1-q\sin\psi); \quad J(q)=2q/(1+q^2)$$

При помощи разложения [3] функции $(1-J\sin\psi)^{-1/2}$ из (1.11) и (1.9) находим

$$\Phi_r=-(1+q^2)^{-1/2}\int_0^{2\pi}(1-J\sin\psi)^{-1/2}(A+B\cos\psi+C\sin\psi)\cos\psi\,d\psi=$$

$$=-\pi B(1+q^2)^{-1/2}(S_3-{}^1/_2S_4) \qquad (1.12)$$

$$\Phi_\theta=(1+q^2)^{-1/2}\int_0^{2\pi}(1-J\sin\psi)^{-1/2}(A+B\cos\psi+C\sin\psi)(q-\sin\psi)\,d\psi=$$

$$=\frac{2\pi q}{(1+q^2)^{1/2}}\left[A\left(S_3-\frac{S_6}{2q}\right)+\frac{C}{2q}\left(-S_3-\frac{S_4}{2}+qS_6\right)\right] \qquad (1.13)$$

При вычислении M_O применим замену $q=1/k$ и учтем, что $J(q)=J(k)$, тогда подынтегральное выражение в M_O получает такой же вид, что и в (1.13):

$$M_O=-\frac{qa}{(1+q^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi}\frac{(A+B\cos\psi+C\sin\psi)}{\sqrt{1-J\sin\psi}}(k-\sin\psi)\,d\psi=$$

$$=-\frac{2\pi aq}{(1+q^2)^{1/2}}\left[A\left(\frac{S_3}{q}-\frac{S_6}{2}\right)+\frac{C}{2}\left(-S_3-\frac{S_4}{2}+\frac{S_6}{q}\right)\right] \qquad (1.14)$$

Выражения функций S_3, S_4, S_6 получены в работе [3] в виде рядов по степеням аргумента J:

$$S_3(J)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n-1)!!}{4n!!}\left(\frac{J}{2}\right)^{2n}{}_{(2n)}D_{(n)},$$

$$S_4(J)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n-1)!!}{4n!!}\left(\frac{J}{2}\right)^{2n}{}_{(2n)}D_{(n-1)} \qquad (1.15)$$

$$S_6(J)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n-3)!!}{(4n-2)!!}\left(\frac{J}{2}\right)^{2n-1}{}_{(2n-1)}D_{(n-1)},\qquad {}_{(n)}D_{(i)}=\frac{n!}{(n-i)!\,i!}$$

Моменты M_O и M_C связаны соотношением

$$M_C=M_O-\Phi_\theta h\sin\theta+\Phi_r h\cos\theta \qquad (1.16)$$

Систему дифференциальных уравнений (1.2), правые части которых определяются выражениями (1.12)–(1.16), используем далее для аналитического исследования некоторых частных случаев движения при ударе. Существенную информацию о процессе движения содержит траектория мгновенного центра скоростей основания, положение которого определяется координатами r, θ.

Все проведенные рассуждения справедливы, если «кольцом» является плоское абсолютно твердое тело, основанием которого является окружность. Поэтому далее сохраним термин кольцо, не предполагая, если это не оговаривается специально, что масса тела распределена по контуру окружности.

2. Рассмотрим два частных случая, когда траектория мгновенного центра скоростей основания кольца является прямой линией и изолированной точкой: $h=0$, $\theta=\mathrm{const}$ и $h\neq0$, $|\theta|=\frac{1}{2}\pi$.

В первом случае коэффициенты B и C равны нулю, поэтому $\Phi_r=0$ (см. (1.12)) и сила трения в любой момент процесса движения противоположна скорости центра основания кольца. В этом случае $\theta=\mathrm{const}$ удовлетворяет системе уравнений (1.2), при этом второе и четвертое принимают вид

$$mV'=-\Phi_\theta=-\frac{2\pi q}{(1+q^2)^{1/2}}A\left(S_3-\frac{S_6}{2q}\right) \qquad (2.1)$$

$$I_C\omega'=M_O=-\frac{2\pi aq}{(1+q^2)^{1/2}}A\left(\frac{S_3}{q}-\frac{S_6}{2}\right) \qquad (2.2)$$

После деления уравнения (2.1) на (2.2) получаем

$$dV/d\Omega=\mu(2qS_3-S_6)/(2S_3-qS_6),\qquad \Omega=a\omega,\qquad \mu=\rho^2/a^2 \qquad (2.3)$$

Как видно из (2.3), интегральная кривая $V=V(\Omega)$ на полуплоскости (V,Ω), $(V\geqslant0)$ не зависит от коэффициента трения f и не меняется при преобразованиях $V\to V$, $\Omega\to-\Omega$; $V\to-V$, $\Omega\to\Omega$. Поэтому достаточно рассмотреть интегральные кривые $V(\Omega)$ только в первом квадранте плоскости $(V,\ \Omega)$. Все интегральные кривые однородного уравнения (2.3) могут быть получены из одной при помощи преобразования подобия с центром в начале координат ($V=0$, $\Omega=0$).

При $\mu=1$ ($\rho=a$) прямая $V=\Omega$ является интегральной кривой (это проверяется непосредственной подстановкой в уравнение (2.3)) и, следовательно, все интегральные кривые проходят через начало координат. В результате приходим к выводу: если начальная скорость центра основания кольца и угловая скорость кольца отличны от нуля, то в процессе рассматриваемого движения они могут обратиться в нуль только одновременно. Отмеченное свойство известно для непрерывного движения однородного кольца [2].

Рассмотрим движения, близкие чисто поступательному ($V\gg\Omega$) и чисто вращательному вокруг оси, проходящей через центр основания кольца ($\Omega\gg V$).

Если $V\gg\Omega$, то, пренебрегая членами второго порядка малости и выше относительно Ω/V в правых частях (2.1), (2.2), получаем

$$mV'=-f,\qquad I_C\omega'=-fa^2\omega/(2V) \tag{2.4}$$

Решение системы (2.4) позволяет получить зависимость между V и Ω:

$$V=V^-(\omega/\omega^-)^{2\mu} \tag{2.5}$$

где V^-, ω^- — значения V и ω в начале удара.

С учетом уравнения для u в (1.2) имеем зависимость между скоростью скольжения и скоростью сближения $V^+-V^-=-f(u^+-u^-)$, V^+, u^+ — значения V и u в конце удара.

Если $V\ll\Omega$, то после линеаризации правых частей (2.1), (2.2) по V/Ω имеем

$$mV'=-fV/(2\Omega),\qquad I_C\omega'=-fa \tag{2.6}$$

Из системы (2.6) находим

$$V=V^-(\omega/\omega^-)^{1/2\mu} \tag{2.7}$$

Послеударная скорость скольжения V^+ зависит от начальной скорости сближения $u_0=-u^-$ и начальной угловой скорости ω^- следующим образом: $V^+=V^-[1-af(1+\varepsilon)u_0/(\rho^2\omega^-)]^{1/2\mu}$.

Сравним полученные результаты с соотношениями, используемыми в технических расчетах: случай $V\gg\Omega$ соответствует гипотезе об ударе плоских частиц с полным проскальзыванием [4], а случай $V\ll\Omega$ — гипотезе о движении без проскальзывания или с частичным проскальзыванием.

Прекращению скольжения или вращения в процессе движения должно предшествовать движение в областях $V\ll\Omega$ или $V\gg\Omega$ соответственно. Полученные для этих областей выражения (2.5), (2.7) показывают, что величины V и ω могут обратиться в нуль только одновременно (при любых μ). При $\mu<{}^1/_2$ в случае $V\gg\Omega$ расстояние до мгновенного центра скоростей возрастает, а при $\mu>2$ в случае $V\ll\Omega$ — убывает. Если ${}^1/_2<\mu<2$, то изменение расстояния до мгновенного центра скоростей основания происходит так, что условия, при которых получены (2.5), (2.7), нарушаются. Уход из рассматриваемых областей означает, что в момент одновременного прекращения скольжения и вращения расстояние до мгновенного центра скоростей основания является конечным, так как оно при малых значениях возрастает, а при больших — убывает.

Рассмотрим теперь случай, когда $h\neq0$. Тогда значения $\theta=\pm\pi/2$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (1.2) независимо от других переменных. В данном случае $B=0$ и, следовательно, $\Phi_r=0$.

В области $V\ll\Omega$ (мгновенный центр вращения вблизи центра кольца) получаем приближенные уравнения с учетом только членов первого порядка малости по V/Ω для $\theta=\pi/2$ и $\theta=-\pi/2$ соответственно

$$m(-V'+h\omega')=-\frac{fh}{a}+\frac{fV}{2\Omega}, \quad I_C\omega'=-f\frac{(a^2-h^2)}{a}-\frac{fhV}{2\Omega} \tag{2.8}$$

$$m(-V'-h\omega')=\frac{fh}{a}+\frac{fV}{2\Omega}, \quad I_C\omega'=-f\frac{(a^2-h^2)}{a}+\frac{fhV}{2\Omega} \tag{2.9}$$

После соответствующих преобразований, удерживая малые первого порядка по V/Ω, из (2.8), (2.9) получаем $dV/d\Omega=\delta+\nu V/\Omega$, $dV/d\Omega=-\delta+$ $+\nu V/\Omega$, $\delta=\zeta(1-\mu/(1-\zeta^2))$, $\nu={}^1/_2\mu/(1-\zeta^2)^2$, $\zeta=h/a$.

Следовательно, на плоскости (V,Ω) зависимость $V(\Omega)$ имеет вид (C_1 — постоянная интегрирования):

$$V=C_1\Omega^\nu-\delta\Omega/(\nu-1) \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует, что скорость V может, вообще говоря, обратиться в нуль (для одного из значений $\theta=\pm\pi/2$) и при угловой скорости, отличной от нуля.

Если в начале удара $V=V^-=0$, то при условии

$$a^2=\rho^2+h^2 \tag{2.11}$$

мгновенный центр вращения основания не меняет своего положения ($V\equiv$ $\equiv 0$). Иначе говоря, импульс сил трения будет приложен в центре удара на расстоянии $l=a^2/h$ (l — приведенная длина физического маятника с точкой подвеса в точке O).

Условие (2.11), в частности, выполняется, когда масса распределена по окружности. При этом $\delta=0$ и выражение (2.10) принимает вид $V=$ $=V^-(\omega/\omega^-)\exp{}^1/_2\mu/(1-\zeta^2)^2$.

Отсюда видно, что при $\mu>2(1-\zeta^2)^2$ расстояние до мгновенного центра скоростей убывает, а при $\mu<2(1-\zeta^2)^2$ — возрастает.

Если $V\gg\Omega$, то при $\theta={}^1/_2\pi$ и $\theta=-{}^1/_2\pi$ правые части второго и четвертого уравнений (1.2) с учетом членов первого порядка малости относительно Ω/V одинаковы и совпадают с правыми частями (2.4). Для $\theta=\pi/2$ и $\theta=$ $=-\pi/2$ соответственно имеем

$$m(-V'+h\omega')=f \tag{2.12}$$

$$I_C\omega'=-{}^1/_2a^2f\omega/V, \quad m(-V'-h\omega')=f, \quad I_C\omega'=-{}^1/_2a^2f\omega/V \tag{2.13}$$

После преобразований, удерживая члены первого порядка малости относительно Ω/V, получаем одно и то же приближенное уравнение $d\Omega/dV=$ $=\Omega/(2\mu V)$.

Решение полученного уравнения имеет вид (2.5), из которого следует, что расстояние до мгновенного центра скоростей убывает при $\mu>{}^1/_2$ и возрастает при $\mu<{}^1/_2$.

Таким образом, во втором случае при условии (2.11) приходим к выводу, что мгновенный центр скоростей кольца в момент одновременного прекращения скольжения и вращения будет находиться на конечном расстоянии от центра O.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мак-Миллан В. Д.* Динамика твердого тела. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 467 с.
2. *Ишлинский А. Ю., Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л.* О движении плоских тел при наличии сухого трения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 17–28.
3. *Johnston G. W.* The dynamics of a curling stone.— Can. Aeronaut. and Space J., 1981, v. 27, No. 2, p. 144–160.
4. Вибрации в технике. Справочник. Т. 4. М.: Машиностроение, 1981. 509 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.III.1983