

УДК 539.3

**О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ СНИЖЕНИЯ ВЕСА КОНСТРУКЦИЙ,  
РАБОТАЮЩИХ В РЕЖИМЕ ВЫНУЖДЕННЫХ  
ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ**

**ИВАНОВА С. Ю.**

Рассмотрение задач снижения веса и оптимального проектирования конструкций, рассчитываемых на динамические воздействия, обусловлено важными приложениями в технике. Исследования по данной тематике были начаты в работах [1-5]. Некоторые общие подходы к решению динамических задач оптимального проектирования предлагались в [6, 7]. В публикуемой работе для решения двумерных задач оптимизации тонкостенных конструкций, совершающих вынужденные гармонические колебания, развивается методика последовательной оптимизации [8] и анализа чувствительности, основанная на построении улучшающих вариаций управляющих функций и применении градиентных алгоритмов для решения «прямых» задач расчета деформированного состояния конструкции. Методика позволяет последовательно перераспределять материал, эффективно оценивать изменения в жесткостных и инерционных характеристиках и осуществить монотонное снижение веса конструкции. В работе приведено приближенное аналитическое решение задачи оптимального проектирования балки в случае малых частот колебаний и результаты численного решения оптимальных задач для упругих пластин.

1. Исследование поведения упругих тонкостенных конструкций при вынужденных установившихся гармонических колебаниях основывается на представлении вектора перемещений  $u(x, y, t)$  и внешних воздействий  $q(x, y, t)$  в виде  $u(x, y, t) = U(x, y) \exp(i\omega t)$ ,  $q(x, y, t) = Q(x, y) \exp(i\omega t)$  и сводится к определению амплитудной вектор-функции  $U(x, y) = (U_1(x, y), \dots, U_m(x, y))$  в области  $\Omega$  из решения следующей краевой задачи для системы дифференциальных уравнений:

$$CU - \omega^2 AU = Q \quad (1.1)$$

с граничными условиями  $(NU)_{\Gamma} = 0$ .

Здесь  $t$  — время,  $(x, y)$  — пространственные переменные, принимающие значения из области  $\Omega$ ,  $\Gamma$  — граница области  $\Omega$ ,  $Q(x, y) = (Q_1(x, y), \dots, Q_m(x, y))$  — амплитудная вектор-функция внешних воздействий,  $C$  и  $A$  — матричные дифференциальные операторы, характеризующие соответственно жесткостные и инерционные свойства конструкции,  $N$  — линейный дифференциальный оператор граничных условий,  $\omega$  — частота вынужденных колебаний. Коэффициенты дифференциальных операторов зависят от управляющей функции  $h$ , т. е.  $C = C(h)$ ,  $A = A(h)$ ,  $N = N(h)$ . Для тонкостенных конструкций минимизируемый функционал веса и ограничения на интегральную жесткость могут быть представлены в виде

$$J = \int_{\Omega} f(h) d\Omega \quad (1.2)$$

$$J_i = \int_{\Omega} f_i(h, U) d\Omega \leq C_i \quad (i=1, \dots, r) \quad (1.3)$$

Возможности снижения веса конструкции в процессе проектирования

лимитируются наряду с (1.3) ограничениями на локальные жесткостные характеристики  $\max_{x,y} |g_j(h(x,y), U(x,y))| \leq C_j$  ( $j=r+1, \dots, s$ ). Данная система условий может быть приближенно заменена (см. [8]) ограничениями

$$J_j = \int_{\Omega} f_j(h, U) d\Omega \leq C_j, \quad f_j = \frac{1}{\mu(\Omega)} |g_j|^p \quad (1.4)$$

На допустимые значения управляющей функции  $h(x, y)$  наложены ограничения

$$h_{\min} \leq h(x, y) \leq h_{\max} \quad (1.5)$$

где  $h_{\max} \geq h_{\min} \geq 0$  — заданные константы. Предполагается, что удовлетворение неравенств (1.5) осуществляется за счет применения приема Валентайна (см. [8]) или аналогичных ему приемов. Поэтому в дальнейшем, выписывая вариацию  $\delta h$ , будем предполагать ее связанной с вариацией вспомогательной управляющей функции (функции Валентайна), производные изменения которой не приводят к нарушению условий (1.5). Это обстоятельство позволяет исключить (1.5) из последующих рассуждений.

Описываемый подход минимизации функционала веса (1.2) при ограничениях (1.3), (1.4) основан на построении «улучшающих» вариаций управляющей функции. Для получения выражения, связывающего вариации  $\delta J$  и  $\delta h$ , введем сопряженную вектор-функцию  $v(x, y)$ . Умножая скалярно левую часть уравнения в вариациях, соответствующего (1.1), на вектор-функцию  $v(x, y)$  и интегрируя полученное выражение, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v [C \delta U - \omega^2 A \delta U + C_{\delta h} U - \omega^2 A_{\delta h} U] d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \delta U [C^* v - \omega^2 A^* v] d\Omega + \int_{\Omega} \delta h [B_C(v, U) - \omega^2 B_A(v, U)] d\Omega \end{aligned}$$

где  $B_C(v, U)$ ,  $B_A(v, U)$  — билинейные формы по  $v$  и  $U$ , а  $A_{\delta h} = A'(h, \delta h)$ ,  $C_{\delta h} = C'(h, \delta h)$  — линейные дифференциальные выражения относительно  $\delta h$ . Символ \* означает сопряжение. Часть контурных членов, возникающих при интегрировании по частям, обращается в нуль в силу соотношения  $N(h) \delta h + M(U, h) \delta h = 0$ , связывающего граничные значения вариаций  $\delta U$ ,  $\delta h$  и являющегося следствием граничного условия  $(NU)_{\Gamma} = 0$ . Остальные члены положим равными нулю за счет наложения на функцию  $v$  граничных условий  $(N^*(h)v)_{\Gamma} = 0$ . Заменяя неравенства (1.3), (1.4) при помощи вспомогательных параметров  $\beta_i^2 = C_i - J_i$  ( $i=1, \dots, s$ ) ограничениями типа равенств, запишем выражение для вариации  $\delta J$  в виде ( $\lambda_i$  — множители Лагранжа)

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{\Omega} \Lambda(h, U, v) \delta h d\Omega + \int_{\Omega} \left[ C^* v - \omega^2 A^* v + \sum_{i=1}^s \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial U} \right] \delta U d\Omega + 2 \sum_{i=1}^s \lambda_i \beta_i \delta \beta_i \\ \Lambda(h, U, v) = & B_C(v, U) - \omega^2 B_A(v, U) + \frac{\partial f}{\partial h} + \sum_{i=1}^s \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial h} \end{aligned}$$

Сопряженную переменную определим как решение краевой задачи для дифференциального уравнения

$$C^* v - \omega^2 A^* v + \sum_{i=1}^s \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial U} = 0 \quad (1.6)$$

с граничными условиями  $(N^* v)_{\Gamma} = 0$ . Множители Лагранжа  $\lambda_i$  и вспомогательные параметры  $\beta_i$  подчиним дополнительным условиям  $\lambda_i \beta_i = 0$  ( $i=1, \dots, s$ ). Тогда основная формула анализа чувствительности, связы-

вающая вариацию оптимизируемого функционала с вариацией управляющей функции и условием оптимальности, может быть представлена в виде

$$\delta J = \int_{\Omega} \Lambda(h, U, v) \delta h d\Omega \quad (1.7)$$

Формулы вида (1.7) являются основными для метода последовательной оптимизации ([8]), позволяющего осуществлять монотонное уменьшение функционала качества при удовлетворении ограничениям задачи проектирования. Выражение для  $\delta h$ , обеспечивающее неположительность  $\delta J$ , имеет вид  $\delta h = -\Lambda$  (этим же свойством обладают выражения  $\delta h = -\Lambda^{\alpha}$ , где  $\alpha$  — целые нечетные числа).

Для реализации процесса варьирования управляющей функции с использованием указанной формулы для  $\delta h$  требуется решение краевых задач (1.1), (1.2) и (1.6), (1.7) с целью отыскания  $U$  и  $v$  и определение множителей Лагранжа  $\lambda_i$  ( $i=1, \dots, s$ ) из условий (1.4), (1.5).

Заметим, что в работах [3, 5], посвященных проектированию одномерных конструкций, для получения условий оптимальности и решения конкретных задач существенно использовалось предположение, что частота вынужденных колебаний не превышает значения первой частоты собственных колебаний. В публикуемой работе, как и в [2, 4], используется методика, не требующая ограничений на частоты внешних воздействий, что позволяет получить условие оптимальности в случае произвольной нерезонансной частоты  $\omega$ .

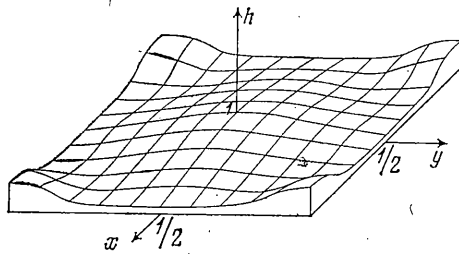
Отметим также, что если в уравнении (1.1) и во всех дальнейших выкладках положить  $-\omega^2 = c$  и заменить оператор  $A$  на оператор  $B = A/h$ , то от рассматриваемой задачи оптимизации конструкций, совершающих установившиеся колебания под действием гармонических нагрузок, можно перейти к задаче оптимального проектирования конструкций, взаимодействующих с упругим винклеровским основанием. В общем случае коэффициент жесткости основания  $c$  является переменным (величина коэффициента зависит от положения точки приложения реакции,  $c = c(x, y)$ ). Характерные отличительные свойства реакции основания в рассматриваемых задачах обусловлены отрицательностью коэффициента жесткости, а также видом оператора  $A$ . Учитывая это, для решения динамических задач в рассматриваемом случае можно пользоваться разработанными ранее методиками оптимизации конструкций, взаимодействующих с упругим основанием и нагруженных статическими силами.

2. В качестве примера рассмотрим самосопряженную задачу минимизации объема тонкостенной упругой конструкции при ограничении на амплитудное значение работы прикладываемых сил (на интегральную жесткость). Минимизируемый функционал и ограничение по жесткости записываются в виде

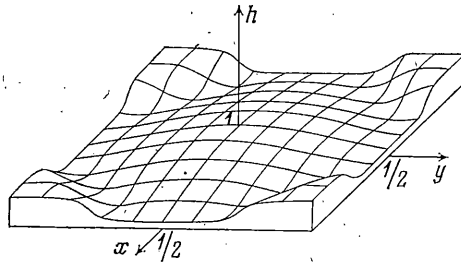
$$J = \int_{\Omega} h d\Omega, \quad J_1 = \int_{\Omega} QU d\Omega = C_1 \quad (2.1)$$

В предположении о самосопряженности основных операторов ( $A, B$ ) краевая задача для сопряженной переменной, как это следует из (1.6), с точностью до множителя  $-\lambda_1$  при  $Q$  совпадает с краевой задачей для амплитудной функции прогибов  $U$ . Из сравнения этих задач вытекает, что  $v = -\lambda_1 U$ . Следовательно, в рассматриваемом случае выражение для  $\Lambda$  примет вид  $\Lambda = 1 - \lambda_1 [B_c(U, U) - \omega^2 B_A(U, U)]$ . Если на  $h$  не наложено дополнительных требований, то условие стационарности  $\delta J = 0$  сводится к равенству  $B_c(U, U) - \omega^2 B_A(U, U) = \text{const}$ , означающему, что для оптимальной конструкции, рассчитываемой на гармонические воздействия и установившиеся режимы колебаний, разность между распределениями потенциальной и кинетической энергии постоянна по конструкции.

Применим указанное выше условие оптимальности для отыскания



Фиг. 1



Фиг. 2

оптимального распределения толщин упругой балки, опертой в точках  $x = \pm l$  и нагруженной сосредоточенной силой в центре пролета. Обозначая через  $b$  ширину прямоугольного поперечного сечения, запишем уравнение колебаний, граничные условия, выражение для объема балки и ограничение на жесткость

$$({}^{1/12}Ebh^3U_{xxx})_{xx} - \omega^2 \rho bhU = P\delta(x), \quad U(\pm l) = 0, \quad ({}^{1/12}Ebh^3U_{xxx})_{x=\pm l} = 0 \quad (2.2)$$

$$J = b \int_{-l}^l h dx, \quad J_1 = PU(0) = C_1$$

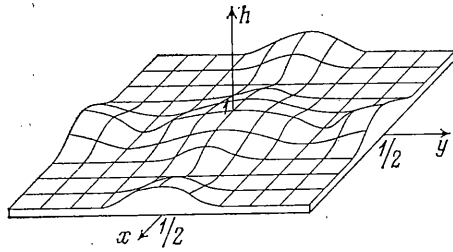
Нижний индекс  $x$  означает дифференцирование по этой переменной,  $E$  и  $\rho$  — модуль Юнга и плотность материала балки. Условие жесткости (2.2) означает задание величины прогиба  $U(0) = d$  ( $d = C_1/P$ ) в точке приложения силы. Условие оптимальности распределения толщин имеет вид

$$h^2 U_{xx}^2 - 4\rho E^{-1} \omega^2 U^2 = \lambda \quad (2.3)$$

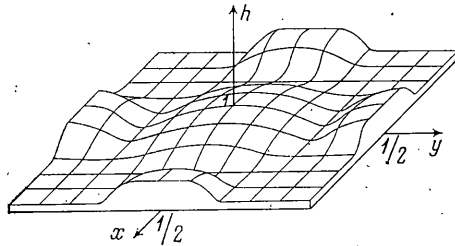
где  $\lambda$  — множитель Лагранжа. Считая частоту колебаний  $\omega^2 = \varepsilon \omega_0^2$  ( $\varepsilon > 0$  — малый параметр) малой величиной, представим  $h$ ,  $U$ ,  $\lambda$ ,  $J$  в виде рядов по малому параметру  $h(x) = h_0(x) + \varepsilon h_1(x) + \dots$ ,  $J = J_0 + \varepsilon J_1$ . Величины  $h_0$ ,  $h_1$ ,  $\dots$ ,  $J_1$  не зависят от параметра  $\varepsilon$ ;  $h_0$ ,  $U_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $J_0$  — решение оптимизационной задачи при  $\varepsilon = 0$ .

Учитывая симметрию задачи относительно точки  $x = 0$ , все дальнейшие рассуждения проведем при  $0 \leq x \leq l$ . С этой целью основные соотношения задачи, записанные при  $0 \leq x \leq l$ , в точке  $x = 0$  дополним двумя граничными условиями  $U_x = 0$  ( ${}^{1/12}Ebh^3U_{xxx})_x = P$ .

Получим соотношения, служащие для определения величин нулевого и первого приближения. Подставим ряды в указанные соотношения оптимизационной задачи. Следующий шаг заключается в разложении этих соотношений по малому параметру  $\varepsilon$  и приведении коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Так как эти уравнения должны удовлетворяться для произвольных значений  $\varepsilon$ , а последовательность степеней  $\varepsilon$  линейно независима, то коэффициенты при каждой степени  $\varepsilon$  (нулевой и первой) обращаются в нуль независимо. При этом получим уравнения для иско-



Фиг. 3



Фиг. 4

мых величин  $h_0$ ,  $U_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $J_0$  и  $h_1$ ,  $U_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $J_1$ , которые будем решать последовательно — сначала для нулевого, а затем для первого приближения. Нулевое приближение ( $\varepsilon=0$  или  $\omega=0$ ) соответствует статической задаче минимизации веса балки, нагруженной сосредоточенной силой  $P$  в центре пролета, при ограничении на величину прогиба при  $x=0$ . Решение этой задачи известно ([8]) и имеет вид

$$\begin{aligned}
 h_0(x) &= l \sqrt[3]{\frac{4P}{Edb}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{1/2}, \quad \lambda_0 = \frac{9d^2}{4b^2l^2} \left(\frac{4Pb^2}{Ed}\right)^{2/3} \\
 U_0(x) &= d \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(3 - 2 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{1/2}\right), \quad J_0 = \frac{4l^2}{3} \sqrt[3]{\frac{4Pb^2}{Ed}}
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Величины первого приближения (поправки к нулевому приближению) определяются из решения краевой задачи

$$\left[ \frac{Eb}{12} h_0^3 U_{1xxx} + \frac{Eb}{4} h_0^2 h_1 U_{0xxx} \right]_{xxx} - \omega_0^2 \rho b h_0 U_0 = 0
 \tag{2.5}$$

$$U_{1x}(0) = 0, \quad \left( \left[ \frac{Eb}{12} h_0^3 U_{1xx} + \frac{Eb}{4} h_0^2 h_1 U_{0xx} \right]_x \right)_{x=0} = 0, \quad U_1(0) = 0$$

$$U_1(l) = 0, \quad \left[ \frac{Eb}{12} h_0^3 U_{1xx} + \frac{Eb}{4} h_0^2 h_1 U_{0xx} \right]_{x=l} = 0
 \tag{2.6}$$

$$J_1 = 2b \int_0^l h_1 dx, \quad 2h_0 h_1 U_{0xxx} + 2h_0^2 U_{0xx} U_{1xx} - \frac{4\rho}{E} \omega_0^2 U_0^2 = \lambda_1$$

Не приводя здесь соответствующих выкладок по интегрированию уравнений и вычислению констант, укажем лишь окончательный результат

$$h_1(x) = \frac{2\omega_0^2 \rho l^3}{3} \sqrt[3]{\frac{db}{4PE^2}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{1/2} \left[ \frac{863}{315} - \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \left(6 - \frac{208}{35} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{1/2} + \frac{5}{3} \left(1 - \frac{x}{l}\right)\right) \right], \quad J_1 = \frac{928}{567} \omega_0^2 \rho b l^3 \sqrt[3]{\frac{db}{4PE^2}} \quad (2.7)$$

Из приведенных формул видно, что величина поправки  $h_1(x) > 0$  на всем интервале  $0 < x < l$  и в рассматриваемой задаче для оптимальной балки при заданных  $P$  и  $d$  потребуется больше материала, чем в статическом случае (т. е. колеблющаяся с частотой  $\omega$  оптимальная балка по всему пролету должна быть толще, чем оптимальная балка, выдерживающая статическую нагрузку той же интенсивности).

3. Рассмотрим задачу минимизации веса колеблющейся пластинки переменной толщины  $h(x, y)$  и квадратной в плане ( $\Omega: -a/2 \leq x \leq a/2, -a/2 \leq y \leq a/2$ ) при двух вариантах закрепления краев: свободном опирании и жестком защемлении. Распределение нагрузки по пластинке считается постоянным, т. е.  $Q(x, y) = Q_0 = \text{const}$ . Ограничения накладываются на распределения толщин пластинки  $h_{\min} \leq h(x, y) \leq h_{\max}$  и на допустимые величины прогибов  $\max_{x,y} |U(x, y)| = d$ . Через  $d$  обозначена заданная положительная константа. Для удобства проведения расчетов введем без-

размерные переменные  $x' = x/a, y' = y/a, U' = U/a, d' = d/a, h' = h/h_{\max}, h'_{\min} =$

$= h_{\min}/h_{\max}, h'_{\max} = 1, Q'_0 = 12(1-\nu^2)a^3 Q_0 / (Eh_{\max}^3), \omega' = \omega a^2 \sqrt{12\rho(1-\nu^2)/Eh_{\max}^2}, J' = J / (h_{\max} a^2)$ , в которых основные соотношения записываются в виде (штрихи опускаем):

$$(h^3 U_{xx})_{xx} + (h^3 U_{yy})_{yy} + \nu(h^3 U_{xx})_{yy} + \nu(h^3 U_{yy})_{xx} + 2(1-\nu)(h^3 U_{xy})_{xy} - \omega^2 h U = Q_0 \quad (3.1)$$

$$U(\pm 1/2, y) = U(x, \pm 1/2) = 0, \quad U_{xx}(\pm 1/2, y) = U_{yy}(x, \pm 1/2) = 0 \quad (3.2)$$

$$U(\pm 1/2, y) = U(x, \pm 1/2) = 0, \quad U_x(\pm 1/2, y) = U_y(x, \pm 1/2) = 0 \quad (3.3)$$

$$J = \iint_{\Omega} h \, dx \, dy, \quad h_{\min} \leq h(x, y) \leq 1 \quad (3.4)$$

$$J_p = \left[ \frac{1}{\text{mes } \Omega} \iint_{\Omega} U^p \, d\Omega \right]^{1/p} = d \quad (3.5)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала рассматриваемой пластинки, а  $\Omega: -1/2 \leq x \leq 1/2, -1/2 \leq y \leq 1/2$ . Через  $p$  обозначим параметр, введение которого в задачу обусловлено редукцией от локального ограничения на максимальные значения прогибов к интегральному ограничению. Этот переход осуществлен благодаря близости норм в пространстве непрерывных функций  $C$  и в пространстве функций  $L_p$ , интегрируемых с  $p$ -й степенью, для достаточно больших  $p$  [8].

Для рассматриваемой задачи проектирования основные соотношения анализа чувствительности запишутся следующим образом:

$$\delta J = \iint_{\Omega} \delta h \, d\Omega = \langle e_1, \delta h \rangle, \quad \delta J_p = \iint_{\Omega} [3h^2(U_{xx}v_{xx} + U_{yy}v_{yy} + \nu U_{xx}v_{yy} + \nu U_{yy}v_{xx} + 2(1-\nu)U_{xy}v_{xy}) - \omega^2 Uv] \delta h \, d\Omega = \langle e_2, \delta h \rangle \quad (3.6)$$

Скобки  $\langle \rangle$  означают скалярное произведение. Сопряженная переменная  $v(x, y)$  определяется как решение следующей краевой задачи:

$$(h^3 v_{xx})_{xx} + (h^3 v_{yy})_{yy} + v(h^3 v_{xx})_{yy} + v(h^3 v_{yy})_{xx} + 2(1-v)(h^3 v_{xy})_{xy} - \omega^2 h v = -(U/J_p)^{p-1} \quad (3.7)$$

$$v(x, \pm 1/2) = v(\pm 1/2, y) = 0, \quad v_{xx}(\pm 1/2, y) = v_{yy}(x, \pm 1/2) = 0 \quad (3.8)$$

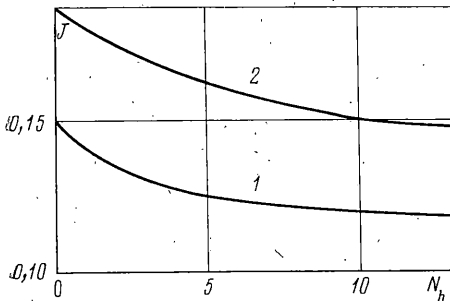
$$v(x, \pm 1/2) = v(\pm 1/2, y) = 0, \quad v_x(\pm 1/2, y) = v_y(x, \pm 1/2) = 0 \quad (3.9)$$

Последовательное уменьшение объема пластинки (веса) осуществлялось численно. При построении улучшающих вариаций распределения толщин применялся метод проектирования градиентов. Для каждого «текущего» распределения  $h$  отыскание соответствующих распределений функции прогибов и сопряженной переменной выполнялось методом градиентов с использованием вариационных формулировок, эквивалентных краевым задачам (3.1), (3.2) ((3.1), (3.3)) и (3.7), (3.8) ((3.7), (3.9)).

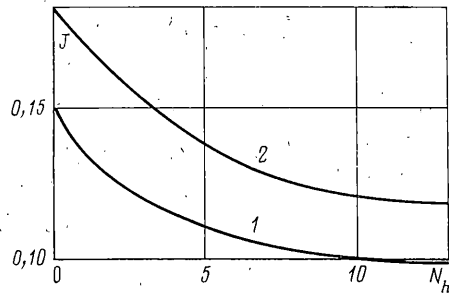
Улучшающая вариация управляющей функции вычислялась по формуле

$$\delta h = \tau \left( -e_1 + \frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2 \right) \quad (3.10)$$

где  $\tau > 0$  — достаточно малое число. Ограничение (3.4) на функцию  $h$  учитывалось при помощи введения вспомогательной управляющей переменной  $\varphi(x)$ :  $h = \alpha + \beta \sin \varphi$ ,  $\alpha = (1 + h_{\min})/2$ ,  $\beta = (1 - h_{\min})/2$  (замена Валентайна). При любых вариациях  $\varphi$  функция  $h$  удовлетворяет двусторонним неравенствам (3.4).



Фиг. 5



Фиг. 6

Расчеты проводились для шарнирно закрепленных и жестко защемленных пластинок при различных параметрах  $\omega$ . На фиг. 1, 2 показаны найденные в результате расчетов распределения толщин  $h(x, y)$  шарнирно опертой пластинки соответственно для случаев  $\omega=0$  (статическое нагружение) и  $\omega=10$ . Показанные на фиг. 1, 2 распределения отвечают  $\nu=0,3$ ,  $\tau=0,125$ ,  $d=0,01$ ,  $h_{\min}=0,25$ ,  $Q_0=0,533$ ,  $p=100$ . Из фиг. 1, 2 видно, что эффективным является расположение материала в углах и центре шарнирно опертых пластинок. С увеличением частоты  $\omega$  возрастает количество материала, необходимого для обеспечения требуемой жесткости (объемы показанных пластинок отличаются в 1,28 раза).

На фиг. 3, 4 приведены полученные оптимальные распределения толщин жестко защемленных пластинок соответственно для случаев  $\omega=0$  (статический случай) и  $\omega=15$ . Для показанных распределений  $h$  максимальная допустимая величина прогиба равна  $d=0,0046$ . Значения остальных основных параметров те же, что и для шарнирно опертых пластинок. Для уменьшения объема жестко защемленных пластинок при обеспечении условий жесткости эффективным оказывается расположение материала в центре пластинки и у середины краев. Объем колеблющейся пластинки превышает объем статически нагруженной пластинки в 1,19 раза.

Метод последовательной оптимизации позволяет добиться снижения объема материала шарнирно опертой пластинки при  $\omega=10$  на 20,3% по сравнению с пластинкой постоянной толщины, удовлетворяющей тому же ограничению по жесткости. В случае жестко защемленной пластинки для  $\omega=15$  относительный выигрыш за счет оптимизации составляет соответственно 36,6%.

На фиг. 5 кривыми 1, 2 показаны зависимости функционала объема  $J$  от номера шага по управлению  $N_h$  в случае шарнирно опертой пластинки для  $\omega=0$  и  $\omega=10^\circ$  соответственно. На фиг. 6 кривыми 1, 2 представлены аналогичные зависимости при  $\omega=0$  и  $\omega=15$  для жестко заземленной пластинки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Brach R. M. Minimum dynamic response for a class of simply supported beam shapes. — Intern. J. Mech. Sci., 1968, v. 10, No. 5, p. 429–439.
2. Софронов Ю. Д. Расчет стержней наименьшего веса при действии продольных циклических сил. — Строит. механ. и расчет сооруж., 1969, № 6, с. 40–43.
3. Iserman L. J. Optimal structural design for given dynamic deflection. — Intern. J. Solids and Structures, 1969, v. 5, No. 5, p. 473–490.
4. Софронов Ю. Д. Балки наименьшего объема при действии циклических нагрузок. — Тр. Казан. авиац. ин-та, 1970, вып. 116, с. 10–17.
5. Mróz Z. Optimal design of elastic structures subjected to dynamic, harmonically-varying loads. — ZAMM, 1970, B. 50, N. 5, S. 303–309.
6. Arora J. S., Haug E. J. Discussion on optimum structural design and dynamic constraints. — J. Structural Div., Proc. Amer. Soc. Civil Eng., 1977, v. 103, No. 10, p. 2071–2074.
7. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование. М.: Мир, 1983. 479 с.
8. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.

Москва

Поступила в редакцию  
9.IV.1984