МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1984

УДК 539.3:534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА В ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

КОССОВИЧ Л. Ю.

В [1] на основе численного интегрирования уравнений теории упругости для оболочек вращения при помощи алгоритма метода трехмерных сеток с учетом фронтовых разрывов были сделаны выводы относительно возможности применения к изучению волновых процессов приближенных теорий. В частности, сравнением численных результатов показано, что, как только фронт волны сдвига проходит зону практического затухания динамических краевых эффектов по теории Кирхгофа – Лява, представляется возможность искать напряженно-деформированное состояние в приторцевой зоне в виде наложения безмоментной составляющей и динамического краевого эффекта, а в прифронтовой зоне быстро изменяющееся напряженно-деформированное состояние приближенными теориями оболочек не описывается.

Публикуемая работа посвящена исследованию в оболочках вращения области согласования на фазовой плоскости составляющей Кирхгофа – Лява и быстро изменяющейся прифронтовой составляющей. Решение этой задачи является основой для строгого математического обоснования возможности расчленения динамического напряженно-деформированного состояния на составляющие с различными показателями изменяемости, для выяснения размеров зон действия приближенных теорий, а также для разработки аналитических методов описания волнового процесса во всех участках фазовой плоскости. Исследование ведется методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости, изложенным для статики в [2]. Используются интегралы динамической теории Кирхгофа – Лява [3, 4].

1. Рассмотрим осесимметричный волновой процесс в полубесконечной оболочке вращения, возбуждаемый в нулевой момент времени нагрузкой на торце. Предполагаем, что геометрические параметры оболочки являются функциями нулевой изменяемости. Поскольку напряженно-деформированное состояние в окрестностях фронтов волн сжатия и сдвиговой имеет одинаковую изменяемость по координате вдоль образующей и нормальной координате, а главная (с асимптотической точки зрения) часть системы уравнений, описывающей это состояние, должна иметь гиперболический тип и, следовательно, содержать инерционные члены, то показатели изменяемости по координатам и времени равны единице. Система разрешающих уравнений в безразмерной форме, выведенная с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon^2)$ (ε – малый параметр тонкостенности оболочки), имеет вид

$$k^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2\,\partial \zeta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \tau_2^2}+\varepsilon\left[\frac{\zeta}{R_1}\left(-k^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \tau_2^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{k^{-2}}{B}\frac{dB}{d\xi_0}\frac{\partial u}{\partial \xi_2}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\left(\frac{3-4\nu}{1-2\nu}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial w}{\partial \xi_2}\right]=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2\,\partial \zeta}+\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2}+k^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial \tau_2^2}+\varepsilon\left[\frac{\zeta}{R_1}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2}+k^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial \tau_2^2}\right)-\right.$$

$$-\frac{3-4\nu}{1-2\nu}\frac{1}{R_1}\frac{\partial u}{\partial \xi_2}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{B}\frac{dB}{d\xi_0}\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{1}{B}\frac{dB}{d\xi_0}\frac{\partial w}{\partial \xi_2}+k^{-2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial w}{\partial \zeta}\Bigg] =0$$

$$\xi_2=\xi_0 / \varepsilon, \quad \xi_0=x / R; \quad \zeta=z / h, \quad \tau_2=\tau_0 / \varepsilon$$

$$\tau_0=tc_2 / R, \quad u=u^\circ / h, \quad w=w^\circ / h, \quad c_2=[E / 2(1+\nu)\rho]^{1/2}$$

$$\varepsilon=h / R, \quad k^2=(1-2\nu) / (2-2\nu), \quad R_i=R_i^\circ / R$$

Здесь x, z — координаты вдоль образующей и нормали, t — время, u°, w° — тангенциальное перемещение и прогиб, E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, ρ — плотность, h — толщина, R_i° — главные радиусы кривизны, R — характерное значение радиуса кривизны, B — параметр Ламе (через ξ_1 в [4] обозначена переменная, характерная для динамического простого краевого эффекта).

Считаем, что поверхности оболочки свободны от нагрузки (σ_z°, τ_{xz}° — напряжения) при $\zeta=\pm 1/2$:

$$\sigma_z=\tau_{xz}=0 \quad (\sigma_z=\sigma_z^\circ / E, \quad \tau_{xz}=\tau_{xz}^\circ / E) \tag{1.2}$$

Если отбросить в уравнении (1.1) члены порядка ε, то получим уравнения динамики упругих плит. В [5] построены частные решения уравнений динамики плит, удовлетворяющие при $\zeta=\pm 1/2$ граничным условиям (1.2). Эти решения используются при разложении волнового процесса по модам.

Построим частные решения системы (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2), с помощью символического метода Лурье и метода экспоненциальных представлений в пространстве изображений интегрального преобразования Лапласа по временной переменной τ_2. Отметим, что, применяя формально метод экспоненциальных представлений в пространстве изображений, необходимо исследовать корректность решения в пространстве оригиналов.

Обозначим через ∂ дифференциальный оператор $\partial=\partial / \partial\xi_2$. Главная часть системы (1.1) (члены при ε в нулевой степени) имеет постоянные коэффициенты. В соответствии с этим будем искать изображения частных решений (1.1) в виде

$$\begin{aligned} U&=[P_{10}(\zeta, \partial, s)+\varepsilon P_{11}(\zeta, \partial, s, \xi_0)]D(\xi_2, \xi_0, s) \\ W&=[P_{20}(\zeta, \partial, s)+\varepsilon P_{21}(\zeta, \partial, s, \xi_0)]D(\xi_2, \xi_0, s) \end{aligned} \tag{1.3}$$

где P_{mn} — некоторые ~~дифференциальные~~ операторы, s — параметр преобразования. Учитывая, что функции нулевой изменяемости, зависящие от ξ_0, входят в (1.3) с множителем ε, а искать (1.3) будем с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon^2)$, следует считать коэффициенты из (1.1) при подстановке (1.3) в (1.1) как постоянные параметры, поскольку для любой функции нулевой изменяемости $f(\xi_0)$ справедливо следующее операторное равенство: $\partial f(\xi_0)=f(\xi_0)\partial+\varepsilon f'(\xi_0)$.

Подставляя (1.3) в (1.1), определяем выражения для дифференциальных операторов P_{mn}. Функция D остается при этом произвольной. Уравнение для нее получаем при удовлетворении граничным условиям (1.2). Согласно методу экспоненциальных представлений ищем D в виде произведения медленно и быстро изменяющихся функций

$$D=\Phi(\xi_0, s)\exp[\lambda(s)\xi_2] \tag{1.4}$$

Если $R(\partial)$ — дифференциальный оператор, то при нахождении функций изменяемости и интенсивности λ, Φ используем равенство

$$RD=R(\lambda)\Phi\exp(\lambda\xi_2)+\varepsilon\frac{\partial R(\lambda)}{\partial\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_0}\exp(\lambda\xi_2)+O(\varepsilon^2) \tag{1.5}$$

Искомые частные решения могут быть представлены в виде суперпозиции составляющих, определяющих антисимметричную и симметричную по ζ деформации. В дальнейшем остановимся на случае антисимметричных по ζ граничных условий. Выражения для U, W с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon)$ принимают вид

$$\begin{gathered} U_j=B^{-1/2}[\Psi_{1j}(s)(\lambda_j/\alpha)\sin\alpha\zeta+\Psi_{2j}(s)\beta\sin\beta\zeta]\exp(\lambda_j\xi_2) \\ W_j=B^{-1/2}[\Psi_{1j}(s)\cos\alpha\zeta+\Psi_{2j}(s)\lambda_j\cos\beta\zeta]\exp(\lambda_j\xi_2) \\ \alpha^2=\lambda_j^2-k^2s^2,\quad \beta^2=\lambda_j^2-s^2,\quad \gamma^2=\lambda_j^2-{}^1/_2s^2 \end{gathered} \tag{1.6}$$

где $\Psi_{nj}(s)$ — постоянные интегрирования, λ_j — корни уравнения Релея — Лэмба

$$\lambda_j^2\beta\cos({}^1/_2\alpha)\sin({}^1/_2\beta)-(\gamma^4/\alpha)\cos({}^1/_2\beta)\sin({}^1/_2\alpha)=0 \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) имеет бесчисленное множество корней λ_j. При конкретных граничных условиях на торце $\xi_0=0$ решение краевой задачи можно искать в виде

$$U=\sum_{j=1}^{\infty}U_j,\quad W=\sum_{j=1}^{\infty}W_j \tag{1.8}$$

где U_j, W_j — частные решения (1.6). Таким образом построение изображений решений типа (1.8) сводится к нахождению $\Psi_{nj}(s)$. Поскольку граничным условиям на торце удовлетворяем с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon)$, то для Ψ_{nj} получим из граничных условий при $\xi_0=0$ уравнения, совпадающие с соответствующими уравнениями для плиты. Разложения по частным решениям для плиты ищутся методом двукратного интегрального преобразования: Лапласа — по времени и Фурье — по пространственной координате [6].

2. Будем понимать в дальнейшем под F искомые решения u либо w. Тогда оригинал

$$F=\sum_{j=1}^{\infty}F_j=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{\infty}\int_{x_j-i\infty}^{x_j+i\infty}F_j^*\exp(s\tau_2+\lambda_j\xi_2)\,ds \tag{2.1}$$

для моментов времени $\tau_0\gg\varepsilon$ (т. е. для моментов времени, больших времени пробега волной пути, соизмеримого с толщиной оболочки) определяется методом перевала, использованным для плиты в [6]. При этом учитываются точки перевала на мнимой оси плоскости s. В этой же работе приведены некоторые свойства корней уравнения Релея — Лэмба и дан список литературы, исследующей их свойства на мнимой оси s.

Для выявления области согласования состояния Кирхгофа — Лява и быстро изменяющегося состояния требуется определить поведение решения для быстро изменяющегося состояния при удалении от переднего фронта волны.

Анализ поведения λ_j на мнимой оси s показывает, что при достаточно малых ξ_2 для вычисления интегралов (2.1) требуются две точки перевала для каждого корня λ_j, которые лежат на мнимой оси симметрично относительно нуля. При $\xi_0\to 0$ точка перевала стремится: для λ_1 к нулю; для тех λ_j ($j\geqslant 2$), которые не имеют точек ветвления типа А, разделяющих участки положительных и отрицательных групповых скоростей,— к $\pm ib_j$ (на мнимой оси $s=\pm i\Omega$, $\lambda_j=\mp im_j$ при $b_j\leqslant\Omega<\infty$, где m_j — вещественные положительные функции Ω); для тех λ_j ($j\geqslant 2$), которые имеют точки ветвления типа А,— к этим точкам. В окрестности рассматриваемых предельных точек асимптотика λ_j имеет, соответственно, вид

$$\begin{gathered} \lambda_1=-a(1\pm i)\sqrt{s}[1+O(s)],\quad a=3^{1/4}(1-\nu)^{1/4}/2^{1/4} \\ \lambda_j=-k_j\sqrt{s^2+b_j^2}[1+O(\lambda_j^2)] \\ \lambda_j=\lambda_{jA}-k_j\sqrt{s^2+b_{jA}^2}[1+O((\lambda_j-\lambda_{jA})^2)],\quad \lambda_{jA}=\lambda_j(ib_{jA}) \end{gathered} \tag{2.2}$$

где k_j — некоторые постоянные, ib_{jA} — точки ветвления типа А.

Поскольку в (2.1) важно асимптотическое поведение интегралов для малых ξ_0 и больших τ_2, изменяющихся в некотором конечном диапазоне, то уничтожение влияния особых точек $s=0$, $\pm ib_j$, $\pm ib_{jA}$ на погрешность формулы метода перевала можно произвести при помощи соответствующих замен переменных интегрирования s. Асимптотика F_j в области

$\varepsilon^{1/2}\tau_0^{1/2} \ll \xi_0 \ll \varepsilon^{1/4}\tau_0^{3/4}$ (назовем ее областью C) при использовании формул (2.2) будет следующей:

$$F_1 = \frac{aQ_1^2}{\pi^{1/2}Q_2^{1/2}} \operatorname{Re}\left[(1+i)F_1^*\left(i\frac{a^2Q_1^2}{2}\right)\exp\left(-i\frac{a^2Q_2}{2}\right)\right](1+\delta_2)$$

$$F_j = \frac{a_jQ_1^2}{\pi^{1/2}Q_2^{1/2}} \operatorname{Re}\left\{(1+i)F_j^*\left[i\left(b_j+\frac{a_j^2Q_1}{2}\right)\right]\exp\left[i\left(\frac{b_j\tau_0}{\varepsilon}-\frac{a_j^2Q_2}{2}\right)\right]\right\}(1+\delta_2)$$

$$F_j = \frac{a_{jA}Q_1^2}{\pi^{1/2}Q_2^{1/2}} \operatorname{Re}\left\{(1+i)F_j^*\left[i\left(b_{jA}+\frac{a_{jA}^2Q_1^2}{2}\right)\right]\exp\left[i\left(T-\frac{a_{jA}^2Q_2}{2}\right)\right]\right\}(1+\delta_2) \tag{2.3}$$

$$Q_1=\xi_0/\tau_0, \quad Q_2=\xi_0^2/(\varepsilon\tau_0), \quad \delta_2=O[\varepsilon\tau_0/\xi_0^2+\xi_0^4/(\varepsilon\tau_0^3)]$$

$$a_j=k_jb_j^{1/2}, \quad a_{jA}=k_jb_{jA}^{1/2}, \quad T=b_{jA}\tau_0/\varepsilon-|\lambda_{jA}|\xi_0/\varepsilon$$

Применим (2.3) для оценки перемещений в области C. Для функций u_1, w_1 получаем

$$u_1=\zeta\frac{a\varepsilon^{1/2}\xi_0}{B^{1/2}\tau_0^{3/2}}\operatorname{Re}\left[(1+i)(\lambda_1\Psi_{11}+\beta^2\Psi_{21})|_{s=s_*}\exp\left(-i\frac{a^2Q_2}{2}\right)\right](1+\delta_2)$$

$$w_1=\frac{a\varepsilon^{1/2}\xi_0}{B^{1/2}\tau_0^{3/2}}\operatorname{Re}\left[(1+i)(\Psi_{11}+\lambda_1\Psi_{21})|_{s=s_*}\exp\left(-i\frac{a^2Q_2}{2}\right)\right](1+\delta_2) \tag{2.4}$$

$$s_*={}^1/_2ia^2Q_1^2$$

Из (2.4) видно, что u_1 и w_1 описывают в C двумерное напряженно-деформированное состояние: с асимптотической погрешностью $O(\delta_2)$ функция u_1 линейна, а w_1 постоянна по толщине. Исследование динамического краевого эффекта, определяемого по теории Кирхгофа — Лява, показывает, что в зоне C перемещения имеют такой же закон распределения по толщине, а медленно изменяющийся множитель ($B^{-1/2}$) совпадает с медленно изменяющимся множителем в (2.4).

Если решения для U и W имеют следующее свойство:

$$U=O(s^{-n}), \quad W=O(s^{-m}) \quad (s\to 0) \ {}_{(m,\, n>0)} \tag{2.5}$$

(такое свойство, в частности, имеют решения, когда на торце $\xi_0=0$ граничные условия содержат в правых частях функции $\tau_2^kH(\tau_2)$, $H(\tau_2)$ — функция Хевисайда), то, согласно оценкам (2.3), u_j и w_j имеют в области C асимптотически меньший порядок по сравнению с функциями u_1 и w_1:

$$u_j/u_1=O(\xi_0^{2n}/\tau_0^{2n}), \quad w_j/w_1=O(\xi_0^{2m}/\tau_0^{2m}) \tag{2.6}$$

Таким образом, при n, $m\geqslant 1$ оценка (2.4) верна для суммарных перемещений u, w и область C следует в конкретных задачах исследовать как область согласования быстро изменяющейся составляющей и динамического краевого эффекта. Так, например, в случае граничных условий при $\xi_0=0$:

$$\sigma_x=12\zeta/(1-\nu^2)H(\tau_0), \quad w=0 \tag{2.7}$$

где σ_x — нормальное напряжение, u и w оцениваются следующим образом:

$$u=\zeta\frac{4\cdot 3^{1/4}\varepsilon\tau_*^{3/2}}{B^{1/2}\pi^{1/2}\xi_0^2}\left(\cos\frac{a^2Q_2}{2}+\sin\frac{a^2Q_2}{2}\right)(1+\delta_2) \tag{2.8}$$

$$w=\frac{4\varepsilon^{3/2}\tau_*^{5/2}}{B^{1/2}\pi^{1/2}3^{1/4}\xi_0^3}\left(\cos\frac{a^2Q_2}{2}-\sin\frac{a^2Q_2}{2}\right)(1+\delta_2),\quad \tau_*=\left(\frac{2}{1-\nu}\right)^{1/2}\tau_0$$

Формулы (2.8) иллюстрируют тот факт, что в области C выполняется гипотеза прямых нормалей Кирхгофа — Лява. Исследование показывает, что перемещения для динамического краевого эффекта, который строится при граничных условиях, являющихся аналогом в теории Кирхгофа — Лява граничных условий (2.7):

$$S_1=0,\quad M_1=H(\tau_0),\quad w=0 \tag{2.9}$$

(S_1 и M_1 — усилие и изгибающий момент), в области C также оцениваются формулами (2.8), но уже с асимптотической погрешностью $\delta_1=O(\varepsilon\tau_0/\xi_0^2)$.

Задача с граничными условиями (2.7) рассматривалась для цилиндрической оболочки в [7]. При выводе уравнений движения для быстро изменяющейся прифронтовой зоны в [7] отбрасывались члены порядка ε по сравнению с единицей. В публикуемой работе показано, что для получения решения с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon)$ уравнения движения следует выводить с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon^2)$. Однако, учитывая тот факт, что частные решения в (1.8) могут быть представлены в виде наложения антисимметричных и симметричных по ζ составляющих, видим, что отброшенные в [7] члены уравнений движения имеют на самом деле асимптотический порядок $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с единицей.

Найденное решение имеет практический выход не только для исследования области согласования: оно может быть использовано во всей области действия быстро изменяющегося состояния, причем для нахождения оригинала следует применить богатый опыт, накопленный в динамике плит [1]. В частности, эффективным является метод перевала (для областей, удаленных от переднего фронта) в сочетании с методом разложения изображений по отрицательным степеням параметра преобразования в окрестности фронта (для областей, где из-за необходимости учета большого количества членов разложения в (1.8) и большого количества седловых точек применение метода перевала становится неэффективным). Заметим, что по своей сущности метод разложения по модам, суммирующий отражения элементарных волн от поверхностей оболочки, правильно описывает основные разрывы на фронтах волн сжатия и сдвиговой, где компоненты напряженно-деформированного состояния прямо пропорциональны $B^{-1/2}$, но не описывает второстепенные разрывы, где компоненты зависят от R_j.

Автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигул У. К.* Сопоставление результатов анализа переходных волновых процессов в оболочках и пластинках по теории упругости и приближенным теориям.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 2, с. 308—322.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Классификация интегралов динамических уравнений линейной двумерной теории оболочек.— ПММ, 1973, т. 37, вып. 4, с. 591—603.
4. *Бурмистров Е. Ф., Коссович Л. Ю.* Применение метода асимптотического интегрирования к задаче о распространении волн в цилиндрической оболочке переменной толщины.— В кн.: Тр. XII Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Т. 1. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1980, с. 233—239.
5. *Нигул У. К.* О применении символического метода А. И. Лурье в трехмерной теории динамики упругих плит.— Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1963, № 2, с. 146—155.
6. *Нигул У. К.* Применение трехмерной теории упругости к анализу волнового процесса изгиба полубесконечной плиты при кратковременно действующей краевой нагрузке.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 6, с. 1044—1056.
7. *Коссович Л. Ю.* Исследование волнового процесса в цилиндрической оболочке методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.— Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности: Сб. статей. Горький: Изд-во Горьковск. ун-та, вып. 19, с. 73—77.

Саратов

Поступила в редакцию
1.III.1982