МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1984

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МОДУЛЬНОГО ПОДХОДА К РАСЧЕТУ ПЛАСТИН

КОЛЕСНИКОВ И. Ю.

Решение прикладных задач механики выдвигает проблему создания автоматизированных систем прикладных программ. Основным требованием, предъявляемым к современным автоматизированным системам, является требование модульности их математического обеспечения. При этом каждый из модулей системы является специализированным алгоритмом-программой, позволяющим использовать его в комбинации с другими модулями при решении сложных задач. Как правило, модульный подход реализуется на основе численных методов, среди которых наибольшее распространение из-за своей универсальности получил метод конечных элементов, который в суперэлементном варианте [1] послужил основой многих программных комплексов. Использование других численных методов системного подхода отражено в [2].

В публикуемой статье приводится методика аналитического построения модулей применительно к задаче изгиба пластин. В приближенной постановке построено общее решение разрешающего уравнения в прямоугольной области. При этом использованы принцип суперпозиции, метод прямых в сочетании с конечными (дискретными) рядами Фурье [3, 4] и межузловая интерполяция.

Для непрямоугольных областей предлагается использовать на основе построенного общего решения модульный подход в суперэлементном варианте. Это дает возможность действовать, насколько допустимо, аналитически и сочетать преимущества как аналитического, так и численного подходов, что в конечном счете приводит к сокращению машинного времени, меньшим требованиям к ресурсу памяти ЭВМ, а также большей точности и лучшей обусловленности (из-за уменьшения числа искомых параметров).

Использованный подход предполагает установление некоторого аналитического соответствия между приближенным значением решения в произвольной точке области и его значениями в конечном числе точек контура, что обычно характерно при применении методов интегральных уравнений. С этой точки зрения усматривается аналогия с непрямой формулировкой метода граничных элементов с распределенными по границе источниками [5]. Однако в отличие от последнего предлагаемая методика не требует специального построения функций Грина и использования трудоемких процедур численного интегрирования.

Результаты численных экспериментов показывают, что введение высокоточного суперэлемента не приводит к увеличению числа искомых параметров, как это имеет место в методе конечных элементов.

В целях простоты и наглядности изложения рассмотрено уравнение Пуассона с постоянной правой частью, описывающее изгиб неравномерно нагретых по толщине свободно опертых полигональных пластин [6]. Обобщение на уравнения высокого порядка (бигармоническое и полигармоническое) не приводит к принципиальным затруднениям, однако связано с некоторой громоздкостью выкладок.

1. Уравнение Пуассона с постоянной правой частью q в прямоугольной области $\Omega=\{(x, y) : 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b\}$, ограниченной контуром Γ, записывается в виде

$$\nabla^2 w=q,\quad \nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2 \tag{1.1}$$

Граничные условия для (1.1) будем считать произвольными.

Обозначим искомое решение $w(P)$ на контуре $(P\in\Gamma)$ через $f(P)$. Используя принцип суперпозиции, можно формально записать общее решение уравнения (1.1) в интегральной форме

$$w(x, y)=w_0(x, y)+\int_\Gamma R(x, y; P)f(P)\,d\Gamma(P)\ \left((x, y)\in\Omega, P\in\Gamma\right) \tag{1.2}$$

где $w_0(x, y)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\nabla^2 w_0 = q, \quad w_0(Q) = 0 \quad (Q \in \Gamma) \tag{1.3}$$

Функция $R(x, y; P)$ — функция Грина, определяемая из краевой задачи ($\delta(Q-P)$ — дельта-функция Дирака):

$$\nabla^2 R(x, y; P) = 0 \quad ((x, y) \in \Omega) R(Q; P) = \delta(Q-P) \, (P, Q \in \Gamma) \tag{1.4}$$

Неизвестная функция $f(P)$ должна быть определена из интегрального уравнения Фредгольма первого рода, получающегося при подстановке выражения (1.2) в граничные условия задачи.

Формула (1.2) устанавливает соответствие между значениями решения в любой точке области Ω и его значениями на контуре Γ.

Несмотря на высокие преимущества интегрального подхода, решение (1.2) может быть реализовано лишь при условии аналитического построения функции Грина, а это далеко не всегда осуществимо. Поэтому представляется целесообразным, сохраняя методологию (1.2)—(1.4), ограничиться приближенным подходом, описываемым ниже. При этом не приходится специально строить функции Грина, поскольку в явном виде устанавливается соответствие между приближенным значением решения в произвольной точке области и его значениями в конечном числе точек контура.

2. Преобразуем прямоугольную область Ω в единичный квадрат Ω_1, вводя обозначения $x' = x/a$, $y' = y/b$, $\varkappa = a/b$, $w' = w/(qa^2)$. Тогда уравнение (1.1) запишется в безразмерном виде (в дальнейшем будем оперировать с безразмерными параметрами и штрихи над буквами опустим)

$$\partial^2 w/\partial x^2 + \varkappa^2 \partial^2 w/\partial y^2 = 1 \tag{2.1}$$

Точное решение уравнения (2.1) при однородных условиях Дирихле примет вид

$$w_0(x, y) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{s^3} \left[\frac{\exp(-\pi s x) + \exp[-\pi s (1-x)]}{1+e^{-\pi s}} - 1 \right] \sin \pi s y \tag{2.2}$$

Введем две вспомогательные задачи для однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.1).

Первая задача — относительно функции $w_1(x, y)$, изменяющейся вдоль сторон квадрата по линейному закону и совпадающей в угловых точках с неизвестными значениями искомого решения, которые фигурируют как четыре константы. Решением первой задачи является гармоническая функция

$$w_1(x, y) = w_A(1-x)(1-y) + w_B y(1-x) + w_C xy + w_D x(1-y) \tag{2.3}$$

где $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, 0)$ — угловые точки.

Вторая задача — относительно функции, обращающейся в нуль в угловых точках. Для построения ее общего решения решим сначала одну частную задачу для уравнения

$$\partial^2 v/\partial x^2 + \varkappa^2 \partial^2 v/\partial y^2 = 0 \tag{2.4}$$

Проведем в Ω_1 прямые $y = y_k = k/(n+1)$ $(k = 0, 1, \ldots, n, n+1)$. Система метода прямых для (2.4) примет вид [3]:

$$v_k''(x) + \Lambda_k^2 v_k(x) = 0, \quad v_k(x) = v(x, y_k) \tag{2.5}$$

где Λ_k^2 — центральный конечно-разностный оператор.

Граничные условия для (2.5) зададим следующим образом:

$$v_0(x) = v_{n+1}(x) = 0, \quad v_k(1) = 0, \quad v_k(0) = \sum_{s=1} V_s \sin \pi s y_k \quad {\scriptstyle (k=0,1,\ldots,n,n+1)} \tag{2.6}$$

В силу свойств дискретного преобразования Фурье имеем [3]:

$$V_s=\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n} v_k(0)\sin\pi s y_k \qquad (s=1,2,\dots,n) \tag{2.7}$$

Точное решение задачи (2.5), (2.6) запишется в форме [3, 4]:

$$v(x,y_k)=\sum_{s=1}^{n}\psi_{1s}(x)\,V_s\sin\pi s y_k \tag{2.8}$$

$$\psi_{1s}(x)=\exp\left[-\alpha_s(1-x)\right]c_{1s}+\exp\left(-\alpha_s x\right)c_{2s}$$

$$c_{1s}=-e^{-\alpha_s}c_{2s},\quad c_{2s}=(1-e^{-2\alpha_s})^{-1},\quad \alpha_s=2\varkappa(n+1)\sin\left[{}^1/_2\pi s/(n+1)\right] \tag{2.9}$$

Заменяя в (2.8) дискретную координату y_k на континуальную y, т. е. производя интерполяцию между прямыми, приближенно получим общее решение уравнения (2.4).

При $n\to\infty$ будем иметь $\lim\alpha_s=\varkappa\pi s$ и ряд (2.8) представит точное решение уравнения (2.4) на множестве точек области Ω_1, где значения координаты y будет пробегать множество рациональных чисел из интервала (0, 1).

Воспользовавшись принципом суперпозиции и решением введенной частной задачи, нетрудно получить общее решение второй задачи. Возьмем на стороне AB — n_1 равномерно расположенных узлов (исключая угловые точки), на стороне DC — n_2 узлов, на стороне AD — n_3 узлов и на стороне BC — n_4 узлов. Число узлов n_i выбирается в зависимости от предполагаемой степени гладкости решения вдоль соответствующей стороны. Приведенное решение частной задачи можно рассматривать как составляющее общего решения второй задачи при однородных условиях по всему контуру, за исключением стороны AB, где неизвестное решение представляется конечным рядом Фурье с неизвестными коэффициентами. Суммируя общие решения частных задач для всех четырех сторон квадрата, получим общее решение второй задачи.

Суперпозиция решения (2.2) и общих решений первой и второй задач даст общее решение уравнения (2.1), выраженное явным образом через неизвестные значения решения на контуре:

$$\begin{aligned}
w(x,y)={}&w_0(x,y)+\sum_{i=1}^{4}\sum_{m=1}^{n_i} w_m^{(i)}\,f_m^{(i)}(x,y)+w_A\Big[(1-x)(1-y)-\\
&-\sum_{m=1}^{n_1} f_m^{(1)}(x,y)\,(1-z_m^{(1)})-\sum_{m=1}^{n_3} f_m^{(3)}(x,y)\,(1-z_m^{(3)})\Big]+\\
&+w_B\Big[y(1-x)-\sum_{m=1}^{n_1} f_m^{(1)}(x,y)\,z_m^{(1)}-\sum_{m=1}^{n_4} f_m^{(4)}(x,y)\,(1-z_m^{(4)})\Big]+\\
&+w_C\Big[xy-\sum_{m=1}^{n_2} f_m^{(2)}(x,y)\,z_m^{(2)}-\sum_{m=1}^{n_4} f_m^{(4)}(x,y)\,z_m^{(4)}\Big]+\\
&+w_D\Big[x(1-y)-\sum_{m=1}^{n_2} f_m^{(2)}(x,y)\,(1-z_m^{(2)})-\sum_{m=1}^{n_3} f_m^{(3)}(x,y)\,z_m^{(3)}\Big]
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$f_m^{(i)}(x,y)=\frac{2}{n_i+1}\sum_{s=1}^{n_i}\psi_{is}(x)\sin\frac{\pi sm}{n_i+1}\sin\pi sy \qquad (i=1,2)$$

$$f_m^{(i)}(x,y)=\frac{2}{n_i+1}\sum_{s=1}^{n_i}\psi_{js}(y)\sin\frac{\pi sm}{n_i+1}\sin\pi sx \qquad (i=3,4)$$

$$w_m^{(1)}=w(0,z_m^{(1)}),\qquad w_m^{(2)}=w(1,z_m^{(2)}),\qquad w_m^{(3)}=w(z_m^{(3)},0)$$

$$w_m^{(4)}=w(z_m^{(4)},1),\qquad z_m^{(i)}=m/(n_i+1). \qquad (j=1,\ i=3;\ j=2,\ i=4)$$

Для функций $\psi_{2s}(\ldots)$ следует воспользоваться выражением (2.9) с заменой $1\rightleftarrows 2$, а для функций $\psi_{is}(y)$ — заменить в характеристических числах α_s параметр $\varkappa$ на $1/\varkappa$.

Вместо общего решения в форме (2.10) можно использовать более простое

$$w(x,y)=w_0(x,y)+\sum_{s=1}^{n_1}\psi_{1s}(x)W_{1s}\sin\pi sy+\sum_{s=1}^{n_2}\psi_{2s}(x)W_{2s}\sin\pi sy+$$
$$+\sum_{s=1}^{n_3}\psi_{1s}(y)W_{3s}\sin\pi sx+\sum_{s=1}^{n_4}\psi_{2s}(y)W_{4s}\sin\pi sx+ \tag{2.11}$$
$$+w_A(1-x)(1-y)+w_By(1-x)+w_Cxy+w_Dx(1-y)$$

Здесь использованы разложения

$$W_{is}=\frac{2}{n_i+1}\sum_{m=1}^{n_i}w_m^{(i)}\sin\frac{\pi sm}{n_i+1}\qquad (i=1,2,3,4;\ s=1,2,\ldots,n_i).$$

Общие решения уравнения Пуассона в форме (2.10) и (2.11) содержат $n=n_1+n_2+n_3+n_4+4$ констант, которые для (2.10) являются неизвестными значениями решения в конечном числе точек контура и для (2.11) неизвестными коэффициентами разложения решения вдоль контура в конечные ряды Фурье.

Неизвестные константы определяются из граничных условий или условий «шва» при стыковке суперэлементов. Использование общего решения в форме (2.10) целесообразно в том случае, когда на отдельных участках значения решения известны из граничных условий, что приводит к уменьшению порядка системы линейных алгебраических уравнений. Общее решение в форме (2.11) может быть приближенно использовано и при неравномерном распределении граничных точек. Для задачи Дирихле формула (2.10) дает решение в явном виде.

3. В п. 2 полагалось, что искомое решение в угловых точках квадрата непрерывно. Однако, например, в случае, когда угловая точка является точкой смены граничных условий, в ней возможен разрыв решения.

Обозначим искомое значение решения в угловой точке при подходе к ней со стороны оси x через w_P^+, а со стороны оси y — через w_P^-, где $P=A, B, C, D$. Как и ранее, используя принцип суперпозиции, рассмотрим сначала случай подхода со стороны оси x.

Введем две линейные функции

$$f_1(x)=w_A^+(1-x)+w_D^+x,\quad f_2(x)=w_B^+(1-x)+w_C^+x \tag{3.1}$$

Систему метода прямых для уравнения (2.4) при задании вдоль сторон AD и BC соответственно функций f_1 и f_2 запишем в следующей форме:

$$v_k''(x)+\frac{1}{h^2}[v_{k-1}(x)-2v_k(x)+v_{k+1}(x)]=f_1(x)q_{1k}+f_2(x)q_{2k} \qquad (k=1,2,\dots,n) \tag{3.2}$$

$$v_0(x)=v_{n+1}(x)=0, \quad v_k(0)=v_k(1)=0 \tag{3.3}$$

$$h=\frac{1}{\varkappa(n+1)}, \quad q_{1k}=\begin{cases}-1/h^2 & (k=1)\\ 0 & (k\neq1)\end{cases}, \quad q_{2k}=\begin{cases}-1/h^2 & (k=n)\\ 0 & (k\neq n)\end{cases}$$

Точное решение задачи (3.2), (3.3) имеет вид

$$v(x,y_k)=w_A^+\sum_{s=1}^{n}\varphi_{1s}(x)\sin\pi s y_k+w_B^+\sum_{s=1}^{n}\varphi_{2s}(x)\sin\pi s y_k+ \tag{3.4}$$

$$+w_C^+\sum_{s=1}^{n}\chi_{2s}(x)\sin\pi s y_k+w_D^+\sum_{s=1}^{n}\chi_{1s}(x)\sin\pi s y_k$$

$$\varphi_{is}(x)=\exp[-\alpha_s(1-x)]c_{1s}^{(i)}+e^{-\alpha_s x}c_{2s}^{(i)}-(1-x)b_s^{(i)}/\alpha_s^2$$

$$\chi_{is}(x)=\exp[-\alpha_s(1-x)]c_{2s}^{(i)}+e^{-\alpha_s x}c_{1s}^{(i)}-xb_s^{(i)}/\alpha_s^2$$

$$c_{1s}^{(i)}=-b_s^{(i)}e^{-\alpha_s}/(\alpha_s^2(1-e^{-2\alpha_s})), \qquad c_{2s}^{(i)}=b_s^{(i)}/(\alpha_s^2(1-e^{-2\alpha_s}))$$

$$b_s^{(1)}=-2\varkappa^2(n+1)\sin\frac{\pi s}{n+1}, \quad b_s^{(2)}=b_s^{(1)} \ (s=1,3,\dots), \quad b_s^{(2)}=-b_s^{(1)} \ (s=2,4,\dots)$$

Совершенно аналогично строится решение при подходе к угловым точкам со стороны оси y.

В результате при разрыве решения в угловых точках решение частной задачи строится приближенно с помощью метода прямых и явно зависит от восьми констант $w_P^\pm$ $(P=A, B, C, D)$.

Отметим, что здесь в углах рассмотрены точки разрыва первого рода, поскольку точки разрыва второго рода при приближенном подходе не реализуются из-за конечности решения при данной степени дискретизации.

4. Полученные общие решения могут использоваться в качестве модулей для составных областей. Для непрямоугольной области внутри ее выделяется прямоугольная подобласть (суперэлемент) или совокупность таких подобластей. Оставшаяся нерегулярная часть области трактуется как дополнительный суперэлемент, для которого численно на основе МКЭ строится матрица влияния (отражающая связь внутренних узлов с внешними) с конденсацией к прямоугольному контуру [7].

Такой подход приводит к сокращению машинного времени, экономии памяти ЭВМ и улучшению обусловленности разрешающей системы, зависящей, как известно [1], от ее порядка.

Приведем примеры применения суперэлементного модульного подхода к расчету неравномерно нагретых по толщине по произвольному закону свободно опертых пластин. В этом случае [6]: $q=-M_t/(D(1-\nu))$, где M_t – температурный момент, D – цилиндрическая жесткость пластины, ν – коэффициент Пуассона.

Рассмотрим квадратную $\{0\leqslant x/a\leqslant 2,\ 0\leqslant y/a\leqslant 2\}$ пластину. Разобьем пластину на четыре единичных квадрата – суперэлемента. Для каждого из них используем сформированный выше модуль. Разрешающую систему линейных алгебраических уравнений получим в результате состыковки введенных суперэлементов в общих точках их контуров по нормальным производным. Кроме описанной методики, основанной на методе прямых второго порядка аппроксимации, используем методику на основе метода прямых четвертого порядка аппроксимации, для реализации которой следует лишь заменить характеристические числа α_s на $\alpha_s[6/(5+\cos[\pi s/(n+1)])]^{1/2}$, не увеличивая при этом числа искомых параметров [4].

Таблица 1

n	3	7	15	31	63	127	∞
$-w_C \cdot 10$	3,03 2,94	2,98 2,95	2,96 2,95	2,95 2,95	2,95 2,95	2,95 2,95	2,95 2,95
$-w_E \cdot 10$	2,34 2,28	2,31 2,29	2,30 2,29	2,30 2,29	2,29 2,29	2,29 2,29	2,29 2,29
$-w_F \cdot 10$	1,85 1,80	1,82 1,81	1,81 1,81	1,81 1,81	1,81 1,81	1,81 1,81	1,81 1,81

Таблица 2

N	10	20	40	60	80	100	∞
$-w_C \cdot 10$	6,47 6,57	6,54 6,59	6,58 6,61	6,60 6,62	6,62 6,63	6,62 6,63	6,63 6,63
$-w_A \cdot 10$	5,24 5,37	5,33 5,39	5,38 5,41	5,39 5,41	5,40 5,41	5,41 5,41	5,41 5,41

Исследуем сходимость решения в трех точках пластины: $C(a, a)$, $E(a, a/2)$, $F(a/2, a/2)$. Результаты расчета сведены в табл. 1, где n – число точек вдоль контура суперэлемента. В первых строках помещены значения прогибов, найденные по методике, использующей метод прямых второго порядка, и во вторых – четвертого порядка. В последнем столбце приведено точное решение из [6].

Бо́льшая точность по второй методике вызвана гладкостью решения исследуемой задачи, в случае же негладкого решения первая методика оказывается эффективнее [3]. При счете на ЭВМ использование модуля на основе (2.11) приводило к меньшим затратам машинного времени, чем при (2.10). Расчет в широком диапазоне параметра n свидетельствует о стабильности получаемого решения, что позволяет получать решение с высокой степенью точности.

В качестве второго примера рассмотрим пластину других размеров $\{0 \leqslant x/a \leqslant 3, 0 \leqslant y/a \leqslant 3\}$. Разобьем пластину на девять единичных квадратов – суперэлементов. Стратегия решения здесь такая же, как и в первом примере. Сходимость исследована в точках: $C(3a/2, 3a/2)$, $A(a, a)$ (табл. 2). Параметр $N=n+1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Постнов В. А., Дмитриев С. А., Елтышев Б. К., Родионов А. А.* Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений. Л.: Судостроение, 1979. 287 с.
2. *Ляшко И. И., Сергиенко И. В., Мистецкий Г. Е., Скопецкий В. В.* Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ. Киев: Наук. думка, 1981. 295 с.
3. *Колесников И. Ю.* К расчету трехслойных пластин со смешанными граничными условиями с помощью рядов Фурье.– Прикл. механика, 1981, т. 17, № 7, с. 94–100.
4. *Колесников И. Ю.* Метод конечных рядов Фурье и его применение к расчету трехслойных пластин со сложными граничными условиями.– Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 1, с. 169–175.
5. *Бреббия К., Уокер С.* Применение метода граничных элементов в технике. М.: Мир, 1982. 248 с.
6. *Боли Б. А., Уэйнер Дж. Х.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
7. *Норри Д., Фриз Ж. де.* Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 304 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.V.1983