МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1984

УДК 539.3

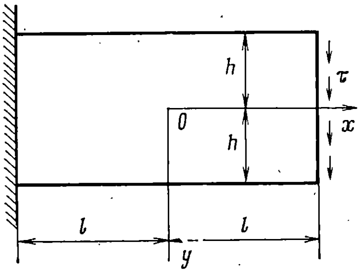
ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ КОНСОЛЬНОЙ ПОЛОСЫ

ВАСИЛЬЕВ В. В., ЛУРЬЕ С. А.

В публикуемой работе делается попытка получить точное решение классической плоской задачи теории упругости для консольной полосы, которое может быть использовано для оценки прикладных теорий изгиба стержней и приближенных методов расчета. Приближенные решения рассматриваемой и близких по постановке задач приведены в [1, 2]. Для построения предлагаемого решения используется аппарат метода однородных решений [3–5] и метод определения регулярной части решения гармонических и бигармонических задач, изложенный в [6, 7].

1. Рассмотрим полосу, показанную на фиг. 1 и описываемую уравнением

$$q\partial^4\varphi/\partial x^4+2g\partial^4\varphi/\partial x^2\partial y^2+\partial^4\varphi/\partial y^4=0$$
$$q=h_0^4E_1/E_2,\quad 2g=h_0^2[E_1/G-2\nu_2],\quad h_0=h/l \tag{1.1}$$



Фиг. 1

где φ — функция напряжений, E_1, E_2 — модули упругости в продольном и поперечном направлениях, G — модуль сдвига, ν_2 — коэффициент Пуассона ($E_1\nu_1=E_2\nu_2$). Координаты x и y отнесены соответственно к l и h, т. е. уравнение (1.1) задано в области $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$ (нулик у h в дальнейшем опускаем).

Граничные условия записываются известным образом через функцию φ. В частности, для закрепленного края $x=-1$ перемещения $u=0$, $v=0$ или

$$h^2\frac{E_1}{E_2}\int\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}dy+\left(\frac{E_1}{G}-\nu_2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{E_1}{E_2}h^2\int\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dy-\nu_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \tag{1.3}$$

Для нагруженного края $x=1$ напряжения $\sigma_x=0$, $\tau_{xy}=\tau(y)$ или

$$\partial^2\varphi/\partial y^2=0,\quad \partial^2\varphi/\partial x\partial y=\tau(y) \tag{1.4}$$

Для свободных продольных краев $y=\pm 1$ напряжения $\sigma_y=0$, $\tau_{xy}=0$ или

$$\partial^2\varphi/\partial x^2=0, \quad \partial^2\varphi/\partial x\partial y=0 \tag{1.5}$$

В соответствии с методом однородных решений представим решение уравнения (1.1) в виде

$$\varphi(x,y)=\varphi_0(x,y)+\sum_{k=1}^{\infty}(A_{1k}\operatorname{ch}\lambda_k x+A_{2k}\lambda_k\operatorname{sh}\lambda_k x)F_k(y) \tag{1.6}$$

Здесь частное решение $\varphi_0(x, y)$ включает возможные особенности решения в угловых точках и будет построено далее в п. 3, а сумма представляет собой регулярную часть решения. Чтобы граничные условия для функции $F_k(y)$ были однородными, потребуем, чтобы функция $\varphi_0(x, y)$ удовлетворяла условиям (1.5), т. е.

$$\partial^2\varphi_0/\partial x^2=0, \quad \partial^2\varphi_0/\partial x\partial y=0 \text{ при } y=\pm 1 \tag{1.7}$$

Однородные функции $F_k(y)$ являются решениями краевой задачи

$$F_k^{IV}+2g\lambda_k^2F_k''+qF_k\lambda_k^4=0, \quad F_k(\pm 1)=F_k'(\pm 1)=0 \tag{1.8}$$

получающейся в результате подстановки регулярной части решения (1.6) в уравнение (1.1) и граничные условия (1.5). Поскольку в рассматриваемой задаче $\varphi(x, y)$ — нечетная функция переменной y, $F_k(y)$ — также нечетные функции, т. е.

$$F_k(y)=c_{1k}\sin t_1\lambda_k y+c_{2k}\sin t_2\lambda_k y, \quad c_{1,2k}=\pm\sin t_{2,1}\lambda_k \tag{1.9}$$

где $t_{1,2}$ — корни характеристического уравнения $t^4-2gt^2+q=0$, которые, как показывает анализ, для реального диапазона изменения параметров g и q являются действительными. Подстановка (1.9) в (1.8) позволяет также получить следующее трансцендентное уравнение для λ_k:

$$t_1\cos t_1\lambda\sin t_2\lambda-t_2\cos t_2\lambda\sin t_1\lambda=0 \tag{1.10}$$

Как известно, функции $F_k(y)$ удовлетворяют условиям обобщенной ортогональности [3], которые для ортотропной полосы имеют вид $(i\neq k)$:

$$\int_{-1}^{1}(F_k''F_i''-q\lambda_k^2\lambda_i^2F_kF_i)\,dy=0 \tag{1.11}$$

Таким образом, построение регулярной части решения (1.6) сводится к определению двух систем постоянных A_{1k} и A_{2k} из двух пар граничных условий (1.2)—(1.4) на краях $x=\pm 1$. Отметим, что проблема одновременного разложения двух функций в ряды по функциям $F_k(y)$ с одной системой констант в принципе разрешима в силу двукратной полноты функций $F_k(y)$ [5, 8] и является основной в методе однородных решений. Достаточно просто она решается, как известно [3], лишь в случае разложения специального вида. Пусть, в частности, на краю полосы заданы функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ и граничные условия, записанные при помощи разложения типа (1.6), имеют вид

$$\varphi_1''(y)=\sum_{k=1}^{\infty}c_kF_k''(y), \quad \varphi_2(y)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\lambda_k^2F_k(y) \tag{1.12}$$

Такие условия соответствуют шарнирному опиранию края полосы, когда решение может быть получено в форме Файлона. В методе однородных решений специальная форма рядов (1.12) позволяет непосредственно использовать условие обобщенной ортогональности (1.11) и получить

$$c_k=\frac{\omega_k}{\varkappa_k}, \quad \omega_k=\int_{-1}^{1}(\varphi_1''F_k''-q\lambda_k^2\varphi_2F_k)\,dy$$

$$\varkappa_k = \int_{-1}^{1} [(F_k'')^2 - q\lambda_k^4 F_k^2]\,dy = (t_1^2 - t_2^2)^2 \sin^2 t_1\lambda_k \sin^2 t_2\lambda_k \tag{1.13}$$

Установим свойства, которыми должны обладать функции φ_1 и φ_2 для того, чтобы ряды (1.12) сходились к этим функциям. Для четных однородных функций эта задача была решена в [4], где ряды типа (1.12) с коэффициентами типа (1.13) суммировались путем сведения их с помощью теоремы о вычетах к интегралам на комплексной плоскости. Используя изложенный в [4] метод применительно к нечетным функциям F_k (1.9), можно доказать, что если функции φ_1'' и φ_2 непрерывны в интервале $-1<y<1$ и имеют в этом интервале ограниченное изменение, то второй ряд (1.12) с коэффициентами (1.13) сходится к $\varphi_2(y)$, а первый — к следующей функции:

$$\varphi_1''(y) - 3y\left[\varphi_1'(1) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_1'(y)\,dy\right]$$

Таким образом, для сходимости первого ряда (1.13) к $\varphi_1''(y)$ функция $\varphi_1(y)$ должна удовлетворять условию

$$\varphi_1'(1) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_1'(y)\,dy = 0 \tag{1.14}$$

2. Запишем граничные условия (1.2)—(1.4), определяющие постоянные A_{1k}, A_{2k} в регулярной части решения (1.6). Введем для сокращения записи новые константы

$$\begin{aligned} D_k^{(1,4)} &= \lambda_k^{-1}(\mp A_{1k}\,\mathrm{sh}\,\lambda_k + A_{2k}\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\lambda_k) \\ D_k^{(2,3)} &= -\lambda_k^{-2}(A_{1k}\,\mathrm{ch}\,\lambda_k \mp A_{2k}\lambda_k\,\mathrm{sh}\,\lambda_k) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Тогда из (1.2)—(1.4), (1.6) и (1.9) получим

$$\begin{gathered} \sum_{k=1} D_k^{(1,2)}\lambda_k^2[B_{1k}(t_1^2+\alpha_{1,2})\sin t_1\lambda_k y + B_{2k}(t_2^2+\alpha_{1,2})\sin t_2\lambda_k y] = \pm f_{1,2}(y) \\ \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{(3,4)}\lambda_k^2(B_{1k}\sin t_1\lambda_k y + B_{2k}\sin t_2\lambda_k y) = \mp f_{3,4}(y) \\ \alpha_1 = -\nu_2 h^2, \quad \alpha_2 = -(2g+\nu_1 q h^{-2}) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь B_{1k}, B_{2k} — постоянные, выражающиеся через c_{1k}, c_{2k}:

$$f_1 = \left(q\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^3} + (2g+\nu_2 h^2)\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x\,\partial y^2}\right)_{x=-1}, \quad f_2 = \left(q\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2} - \nu_2 h^2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\right)_{x=-1}$$

$$f_3 = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_{x=1}, \quad f_4 = \frac{d\tau}{\partial y} - \left(\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x\,\partial y^2}\right)_{x=1}$$

Целью дальнейших преобразований является приведение каждой пары условий (2.2) к виду (1.12); тогда для определения $D_k^{(i)}$ можно будет воспользоваться равенствами (1.13). Введем функции

$$U_j^{(i)} \quad {\scriptstyle (j=1,2;\ i=1,2,3,4)} \qquad U_1^{(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{(i)}\lambda_k^2 B_{1k}\sin t_1\lambda_k y,$$

$$U_2^{(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{(i)}\lambda_k^2 B_{2k}\sin t_2\lambda_k y \tag{2.3}$$

Как будет видно из дальнейшего, задание $U_j^{(i)}$ определяет решение поставленной задачи, т. е. если левые части равенств (2.3) известны, то в результате линейных комбинаций $U_j^{(i)}$ с функциями f_i, записанными в левой части условий (2.2), правые части (2.2) приводятся к форме типа (1.12). Функциям $U_j^{(i)}$ можно дать физическую интерпретацию — задание $U_j^{(1)}$ и $U_j^{(2)}$ соответствует заданию касательных и нормальных напряжений на краю, а $U_j^{(3)} U_j^{(4)}$ — заданию перемещений.

Установим соотношения между $U_j^{(i)}$, вытекающие из того, что эти функции определяются разложениями (2.3). Прежде всего введем еще одну систему функций

$$V_1^{(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{(i)} \lambda_k^2 B_{2k} \sin t_2 \lambda_k y, \qquad V_2^{(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{(i)} \lambda_k^2 B_{1k} \sin t_1 \lambda_k y \tag{2.4}$$

В силу условий (2.2) функции $V_j^{(i)}$ выражаются через $U_j^{(i)}$ следующим образом:

$$V_j^{(1,2)} = -(U_j^{(1,2)} \beta_j^{(1,2)} \mp f_{1,2} \xi_j^{(1,2)}), \qquad V_j^{(3,4)} = -(U_j^{(3,4)} + f_{3,4}) \tag{2.5}$$

$$\beta_j^{(1,2)} = (t_j^2 + \alpha_{1,2}) \xi_j^{(1,2)}, \qquad \xi_1^{(1,2)} = (t_2^2 + \alpha_{1,2})^{-1}, \qquad \xi_2^{(1,2)} = (t_1^2 + \alpha_{1,2})^{-1}$$

Составляя комбинации из функций (2.3) и (2.5):

$$\begin{aligned} G_j^{(1,2)} &= U_j^{(1,3)} \pm U_j^{(4,2)}, \qquad & H_j^{(1,2)} &= V_j^{(1,3)} \pm V_j^{(4,2)} \\ S_j^{(1,2)} &= U_j^{(4,2)} \mp U_j^{(1,3)}, \qquad & T_j^{(1,2)} &= V_j^{(4,2)} \mp V_j^{(1,3)} \end{aligned} \tag{2.6}$$

и учитывая равенства (2.1), запишем разложения, включающие системы коэффициентов A_{1k} и A_{2k} ($\eta_1 = \operatorname{ch} \lambda_k$, $\eta_2 = \operatorname{sh} \lambda_k / \lambda_k$):

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \eta_{1,2} \lambda_k^2 B_{jk} \sin t_j \lambda_k y = G_j^{(1,2)}, \qquad 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \eta_{1,2} \lambda_k^2 B_{lk} \sin t_l \lambda_k y = H_j^{(1,2)} \tag{2.7}$$

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} A_{1k} \eta_{2,1} \lambda_k^2 B_{jk} \sin t_j \lambda_k y = S_j^{(1,2)}, \qquad 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_{1k} \eta_{2,1} \lambda_k^2 B_{lk} \sin t_l \lambda_k y = T_j^{(1,2)} \tag{2.8}$$

где $l=2$ при $j=1$ и $l=1$ при $j=2$.

Проведем далее некоторые формальные преобразования равенств (2.7), (2.8). Представим функции $\eta_1(\lambda_k)$ и $\eta_2(\lambda_k)$ (они являются целыми и четными) в виде степенных рядов

$$\eta_1(\lambda_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_k^{2n}, \qquad \eta_2(\lambda_k) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda_k^{2n} \tag{2.9}$$

и подставим (2.9) в разложения (2.7), (2.8). Продифференцируем далее, например, $G_j^{(1)}$ и $G_j^{(2)}$ $2m$ раз по y и составим следующие комбинации:

$$(-1)^m \frac{b_m}{t_j^{2m}} \frac{d^{2m} G_j^{(1)}}{dy^{2m}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \sum_{n=0} b_m a_n \lambda_k^{2(m+n)} B_{jk} \lambda_k^2 \sin t_j \lambda_k y$$

$$(-1)^m \frac{a_m}{t_j^{2m}} \frac{d^{2m} G_j^{(1)}}{dy^{2m}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \sum_{n=0} a_m b_n \lambda_k^{2(m+n)} B_{jk} \lambda_k^2 \sin t_j \lambda_k y$$

Просуммируем эти выражения по m:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{b_m}{t_j^{2m}} \frac{d^{2m} G_j^{(1)}}{dy^{2m}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=n=0}^{\infty} A_{2k} a_n b_m \lambda_k^{2(m+n)} B_{jk} \lambda_k^2 \sin t_j \lambda_k y$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{a_m}{t_j^{2m}} \frac{d^{2m} G_j^{(2)}}{dy^{2m}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=n=0}^{\infty} A_{2k} a_m b_n \lambda_k^{2(m+n)} B_{jk} \lambda_k^2 \sin t_j \lambda_k y$$

Сравнивая правые части этих равенств, получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{t_j^{2m}} \frac{d^{2m}}{dy^{2m}} (b_m G_j^{(1)} - a_m G_j^{(2)}) = 0 \tag{2.10}$$

Аналогичные соотношения можно получить и для функций $H_j^{(i)}$, $S_j^{(i)}$, $T_j^{(i)}$, т. е.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{t_j^{2m}} \frac{d^{2m}}{dy^{2m}} (a_m S_j^{(1)} - b_m S_j^{(2)}) = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{t_l^{2m}} \frac{d^{2m}}{dy^{2m}} (b_m H_j^{(1)} - a_m H_j^{(2)}) = 0 \tag{2.11}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{t_l^{2m}} \frac{d^{2m}}{dy^{2m}} (a_m T_j^{(1)} - b_m T_j^{(2)}) = 0$$

Восемь равенств (2.10), (2.11) (в них следует принять $j=1$, $l=2$ и $j=2$, $l=1$) являются необходимыми условиями существования разложений (2.7), (2.8) или (2.2), (2.3), из которых (2.7), (2.8) получены в результате линейных преобразований.

По существу уравнения (2.10), (2.11) включают в качестве неизвестных функции $U_j^{(i)}$, через которые выражаются по формулам (2.5), (2.6) функции $G_j^{(i)}$, $H_j^{(i)}$, $S_j^{(i)}$, $T_j^{(i)}$. Запишем эти уравнения через функции $U_j^{(i)}$. Предварительно введем следующее обозначение:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1) C_m \frac{d^{2m} f}{dy^{2m}} = L(\psi) f \tag{2.12}$$

где символ в скобках означает, что C_m есть коэффициенты ряда Тейлора четной функции $\psi(z)$ некоторой переменной z, т. е.

$$\psi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m z^{2m} \tag{2.13}$$

Итак с помощью равенств (2.5), (2.6) из (2.10), (2.11) можно записать восемь уравнений относительно восьми функций $U_j^{(i)}$ ($j=1, 2$; $i=1, 2, 3, 4$). Исключая с помощью четырех из этих уравнений функции $U_j^{(2,3)}$ окончательно получим ($j=1$, $l=2$; $j=2$, $l=1$):

$$L(\psi_j) U_j^{(1)} = M_j^{(1)}, \qquad L(\psi_j) U_j^{(4)} = M_j^{(4)} \tag{2.14}$$

$$\psi_j(\lambda_k)=rr_j(1+\beta_j^{(1)}\beta_j^{(2)})+(\beta_j^{(1)}+\beta_j^{(2)})(s_is_j-p_ip_j)$$

$$r=\eta_2^2-\eta_1^2,\quad s=\eta_2^2+\eta_1^2,\quad p=-2\eta_1\eta_2$$

$$\eta_1(\lambda_k)=\operatorname{ch}\lambda_k,\quad \eta_2(\lambda_k)=\operatorname{sh}\lambda_k/\lambda_k,\quad \eta_j^{(1,2)}=\eta_{1,2}(\lambda_k t_j/t_l)$$

$$M_j^{(1,4)}=L(\psi_j^{(1,3)})N_j^{(1)}-L(\psi_j^{(2,4)})N_j^{(2)},\quad \psi_j^{(1,2)}=(r\beta_j^{(2)}\mp s)\eta_j^{(2,1)}\mp p\eta_j^{(1,2)}$$

$$\psi_j^{(3,4)}=(r\mp\beta_j^{(2)})\eta_j^{(2,1)}\mp p\beta_j^{(1)}\eta_j^{(1,2)}$$

$$N_j^{(1,2)}=\pm\xi_j^{(1)}L(\eta_j^{(2,1)})f_1\pm\zeta_j^{(2)}L(\eta_j^{(1,2)})f_2-L(\eta_j^{(1,2)})f_3-L(\eta_j^{(2,1)})f_4$$

Рассмотрим первые два уравнения (2.14), включающие функции $U_{1,2}^{(1)}$. Учитывая, что $U_{1,2}^{(1)}$ могут быть представлены в форме (2.3), будем искать эти функции в виде следующих разложений:

$$U_j^{(1)}=\sum_{k=1}^{\infty}R_k^{(1)}\lambda_k^2c_{jk}\sin t_j\lambda_k y \tag{2.15}$$

Подставим (2.15) в уравнения (2.14). Учитывая обозначение (2.12), будем иметь

$$\sum_k\sum_m C_m^{(j)}(t_j\lambda_k)^{2m}R_k^{(1)}\lambda_k^2c_{jk}\sin t_j\lambda_k y=M_j^{(1)} \tag{2.16}$$

где $C_m^{(j)}$ — коэффициенты ряда (2.13) для функции $\psi_j(\lambda_k)$. Подействуем теперь на правые части уравнений (2.16) дифференциальными операторами типа (2.12) и результат обозначим через

$$Y_j^{(1)}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^iC_i^{(l)}\frac{\partial^{2i}M_j^{(1)}}{\partial y^{2i}}(t_j)^{-2i} \tag{2.17}$$

где $Y_j^{(1)}$ ($j=1$, $l=2$; $j=2$, $l=1$) — известные функции, поскольку известны функции $M_j^{(1)}$. Подставляя $M_j^{(1)}$ из (2.16) в (2.17), меняя порядок суммирования по i и k и учитывая разложение (2.13) для функций $\psi_j(\lambda_k)$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}R_k^{(1)}\lambda_k^2\psi_1(\lambda_k)\psi_2(\lambda_k)c_{jk}\sin t_j\lambda_k y=Y_j^{(1)} \tag{2.18}$$

Из двух уравнений (2.18) необходимо определить постоянные $R_k^{(1)}$, т. е. имеем задачу типа (1.12). Эта задача вполне разрешима, так как ряды (2.18) приводятся к виду (1.12). Действительно, умножая уравнения (2.18) с индексами $j=1$, 2 соответственно на $t_{1,2}^2$ и складывая с учетом (1.9), можно записать соотношение, аналогичное первому разложению (1.12). Второе разложение получается в результате сложения уравнений (2.18). В результате будем иметь

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{\infty}R_k^{(1)}\psi_1(\lambda_k)\psi_2(\lambda_k)F_k''=-(t_1^2Y_1^{(1)}+t_2^2Y_2^{(1)})\\ \sum_{k=1}^{\infty}R_k^{(1)}\psi_1(\lambda_k)\psi_2(\lambda_k)\lambda_k^2F_k=Y_1^{(1)}+Y_2^{(1)}\end{gathered} \tag{2.19}$$

Постоянные $R_k^{(1)}$ единственным образом определяются формулами (1.13), т. е.

$$R_k^{(1)}=\omega_k^{(1)}/(\varkappa_k\psi_1(\lambda_k)\psi_2(\lambda_k)) \tag{2.20}$$

$$\omega_k^{(1)}=\lambda_k^2(t_2^2-t_1^2)\sum_{j=1}^{2}(-1)^j t_j^2\left(\int_{-1}^{1} Y_j^{(1)}\sin t_j\lambda_k y\,dy\right)c_{jk}=$$

$$=(t_2^2-t_1^2)\sum_{j=1}^{2}(-1)^j t_j^2(\psi_j^{(1)}N_j^{(1)}-\psi_j^{(2)}N_j^{(2)})\lambda_k^2 \tag{2.21}$$

Интегралы в (2.20) вычислены с учетом равенства (2.17) и обозначений к уравнениям (2.14).

Аналогично решается вторая группа уравнений (2.14), определяющая функции $U_j^{(4)}$. Для них справедливы разложения (2.15), в которых $R_k^{(1)}$ следует заменить на $R_k^{(4)}$, определяемое равенством (2.20), где $\omega_k^{(1)}$ заменяется на $\omega_k^{(4)}$, определяемое по второй формуле (2.21) с заменой $\psi_j^{(1,2)}$ на $\psi_j^{(3,4)}$.

Таким образом, функции $U_j^{(1,4)}$ и $V_j^{(1,4)}$, которые через них выражаются, найдены, т. е. в разложениях (2.3) известны левые части. Эти уравнения имеют такую же структуру, как и уравнения (2.18), и аналогичным образом приводится к форме типа (2.19), допускающей определение постоянных $D_k^{(1,4)}$. С учетом равенств (2.2) получим

$$W_1^{(1)}(y)=U_2^{(1)}(\beta_2^{(1)}-1)-f_1\xi_2^{(1)}=\sum_{k=1}^{\infty}D_k^{(1)}F_k''\lambda_k^2$$

$$W_2^{(1)}(y)=U_2^{(1)}(\beta_2^{(1)}t_1^{-2}-t_2^{-2})-f_1\xi_2^{(1)}t_1^{-2}=\sum_{k=1}^{\infty}D_k^{(1)}\lambda_k^4F_k$$

$$W_1^{(4)}(y)=f_4=\sum D_k^{(4)}\lambda_k^2F_k'' \tag{2.22}$$

$$W_2^{(4)}(y)=U_2^{(4)}(t_1^2-t_2^2)t_1^{-2}t_2^{-2}-f_4t_1^{-2}=\sum_{k=1}^{\infty}D_k^{(4)}\lambda_k^4F_k$$

Каждая пара разложений (2.22) имеет форму (1.12), т. е. постоянные $D_k^{(1,4)}$ определяются формулами (1.13), в которых для $\lambda_k^2D_k^{(1)}$, f_1'' и f_2 следует заменить на $W_1^{(1)}$ и $W_2^{(1)}$, а для $\lambda_k^2D_k^{(4)}$ — на $W_1^{(4)}$ и $W_2^{(4)}$. Постоянные A_{1k} и A_{2k}, входящие в решение (1.6), определяются с помощью равенств (2.1), т. е.

$$A_{1k}=(D_k^{(4)}-D_k^{(1)})/(2\lambda_k\,\mathrm{sh}\,\lambda_k),\qquad A_{2k}=(D_k^{(4)}+D_k^{(1)})/(2\lambda_k^2\,\mathrm{ch}\,\lambda_k) \tag{2.23}$$

Таким образом, регулярная часть решения (1.6) построена. В связи с тем, что дальнейшее решение принципиальных трудностей уже не представляет, опишем его, опуская промежуточные преобразования.

3. Рассмотрим частное решение $\varphi_0(x, y)$, входящее в соотношение (1.6). Предварительно запишем достаточные условия (1.14) сходимости разложений (2.22). При $y=1$ и соответственно при $x=\mp1$ имеем

$$\left(\int U_2^{(1)}dy-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dy\int U_2^{(1)}dy\right)(\beta_2^{(1)}-1)-\left(\int f_1\,dy-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dy\int f_1\,dy\right)\xi_2^{(1)}=0 \tag{3.1}$$

$$\tau-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\tau\,dy+\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}=0 \tag{3.2}$$

Для дальнейшего необходимо задать распределение касательных напряжений $\tau(y)$ при $x=1$. Пусть, например, $\tau=\tau_0(y^2-1)$. Тогда, выделяя в φ_0 регулярную часть, такую, чтобы для нее были выполнены условия (1.7) и (3.2), получим

$$\varphi_0=\tau_0 x(^1/_3 y^3-y)+\Phi(x, y) \qquad (3.3)$$

Функция $\Phi(x, y)$ естественно должна также удовлетворять условиям (1.7) и условию

$$\partial\Phi/\partial x=0 \quad \text{при } x=1, \quad y=1 \qquad (3.4)$$

Таким образом, форма (3.3) обеспечивает удовлетворение условия (3.2). Отметим, что попытка выполнить условие (3.1) за счет регулярного, например полиномиального частного решения, приводит к вырожденной системе относительно коэффициентов полинома. Это связано с тем, что для рассматриваемой полосы в угловых точках закрепленного края ($x=-1$, $y=\pm1$) имеют место особенности решения, которые должны быть выделены в функции $\Phi(x, y)$. В связи с этим запишем $\Phi(x, y)$ в виде

$$\Phi(x, y)=\psi(x, y)+\Phi_0(x, y) \qquad (3.5)$$

где ψ соответствует особым решениям в окрестности угловых точек, а Φ_0 — частное решение, с помощью которого обеспечивается выполнение функцией Φ условий (1.7) и (3.4). В силу нечетности $\Phi(x, y)$ по y выделим особенность в одной из угловых точек закрепленного края, например в точке $(-1, 1)$, и представим функцию ψ в виде $\psi=\psi_1(x, y)-\psi_1(x, -y)$. Здесь ψ_1 — однородная функция, записанная в координатах, связанных с угловой точкой $(-1, -1)$ [9], $\psi_1=2\operatorname{Re}(A_1 z_1^{1+\lambda}+A_2 z_2^{1+\lambda})$, где $z_1=(x+1)-\mu_{1,2}(y+1)$, $\mu_{1,2}=ia_{1,2}$, $a_{1,2}=t_{1,2}/h$, $A_j=A_{j1}+iA_{j2}$, $i=(-1)^{1/2}$.

Подчиним функцию ψ_1 следующим условиям. Заметим, что эта функция посредством равенства (3.3) входит в частное решение $\varphi_0(x, y)$ и, следовательно, в функции f_1 и f_2 граничных условий (2.2) при $x=-1$. В связи с тем, что эти функции определяют регулярную часть решения, потребуем, чтобы они не имели особенностей, т. е. чтобы операторы, образующие f_1 и f_2, при подстановке в них ψ вместо φ_0 обращались в нуль при $x=-1$. Кроме того, функция на продольной кромке полосы $y=-1$ должна удовлетворять условиям вида (1.7). Таким образом получим четыре однородных линейных алгебраических уравнения для определения постоянных A_{j1}, A_{j2} ($j=1, 2$). Из условий нетривиальности решения можно записать следующее трансцендентное уравнение для λ:

$$\begin{gathered}a_2^{2(\lambda-1)}b_2c_2+a_1^{2(\lambda-1)}b_1c_1-(a_1a_2)^{\lambda-1}[(c_1b_2+c_2b_1)\sin^2(^1/_2\pi\lambda)+\\+(c_2b_1a_1/a_2+c_1b_2a_2/a_1)\cos^2(^1/_2\pi\lambda)]=0 \qquad (3.6)\end{gathered}$$

$$b_{1,2}=(1+a_{1,2}^2), \qquad c_{1,2}=1-a_{1,2}^2\nu_2$$

В результате функция ψ определяется с точностью до постоянного множителя A и имеет вид

$$\psi(x, y)=A\psi_s, \qquad \psi_s(x, y)=\sum_{j=1}^{2} 2\operatorname{Re}(\alpha_1 z_{1,j}^{\lambda+1}+\alpha_2 z_{2,j}^{\lambda+1})$$

$$z_{k,j}=l(x+1)+\mu_k h((-1)^j y+1), \quad \alpha_1=-\gamma_1+i, \quad \alpha_2=\gamma_1+i\gamma_2 \qquad (3.7)$$

$$\gamma_1=[1+a_1^2\nu_1-(a_2/a_1)^\lambda(1+a_2^2\nu_1)]\operatorname{ctg}(^1/_2\pi\lambda)/[1+a_1^2\nu_1-(a_2/a_1)^{\lambda-1}(1+a_2^2\nu_1)],$$

$$\gamma_2=-a_2/a_1$$

где λ — корень уравнения (3.6) для которого $0<\operatorname{Re}\lambda<1$. Если такого корня нет, решение в рассматриваемой точке является регулярным.

Отметим, что введение частного решения ψ приводит к нарушению однородности граничных условий на продольных кромках полосы. Действительно, функция $\psi_1(x, y)$, удовлетворяя однородным граничным условиям при $y=-1$, является регулярной функцией, не равной нулю при $y=1$. Выполнение условий (1.7) и (3.4) при этом обеспечивается частным решением Φ_0, которое входит в (3.5) и может быть построено в форме Файлона — Рибьера, т. е. в виде разложений в ряды Фурье по ортонормированной системе функций $\{\cos r_k x\}$ и $\{\sin r_k x\}$, где $r_k={}^1/_2\pi\times\times(2k-1)$. Не останавливаясь на преобразованиях, запишем окончательно выражение для функции

$$\Phi_0(x, y)=A\Phi_{0s}, \qquad \Phi_{0s}=A_1xy+A_2x^2y+A_3xy^3+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(Y_k\cos r_kx+Y_k{}^0\sin r_kx), \qquad Y_k=d_{1k}\operatorname{sh}t_1r_ky+d_{2k}\operatorname{sh}t_2r_ky \tag{3.8}$$

$$Y_k{}^\circ=d_{1k}{}^\circ\operatorname{sh}t_1r_ky+d_{2k}{}^\circ\operatorname{sh}t_2r_2y, \quad A_2=-{}^1/_2[\partial^2\psi_s/\partial x^2]$$

$$A_3={}^1/_2([\partial\psi_s/\partial x]-[\partial^2\psi_s/(\partial x\partial y)]], \quad A_1=[\partial\psi_s/\partial x]-A_3$$

$$d_{1,2}=\Delta_{1,2k}/\Delta_k, \qquad \overset{\circ}{d}_{1,2k}=\overset{\circ}{\Delta}_{1,2k}/\Delta_k$$

$$\Delta_k=t_2\operatorname{ch}t_2r_k\operatorname{sh}t_1r_k-t_1\operatorname{ch}t_1r_k\operatorname{sh}t_2r_k, \qquad \Delta_{1,\,2k}=\pm L_kt_{2,\,1}\operatorname{ch}t_{2,\,1}r_k\mp M_k\operatorname{sh}t_{2,\,1}r_k$$

$$\overset{\circ}{\Delta}_{1,2k}=\pm L_k{}^\circ t_{2,1}\operatorname{ch}t_{2,1}r_k\mp M_k{}^\circ\operatorname{sh}t_{2,1}r_k, \qquad L_k=1/r_k{}^4\int_{-1}^{1}[\partial^4\psi_s/\partial x^4]\cos r_kx\,dx$$

$$M_k=1/r_k{}^3\int_{-1}^{1}(2A_2+[\partial^2\psi_s/(\partial x\,\partial y)]\cos r_kx\,dx, \qquad L_k{}^\circ=1/r_k{}^3\int_{-1}^{1}[\partial^3\psi_s/\partial x^3]\cos r_kx\,dx$$

$$M_k{}^\circ=1/r_k{}^4\int_{-1}^{1}[d^4\psi_s/(\partial x^3\,\partial y)]\cos r_kx\,dx, \qquad [f]={}^1/_2(f(x, y=1)+f(-x, y=1))$$

Разложение (3.8) включает полиномиальную часть, обеспечивающую существование в интервале $-1<x<1$ производных от Φ_0 до третьего порядка включительно.

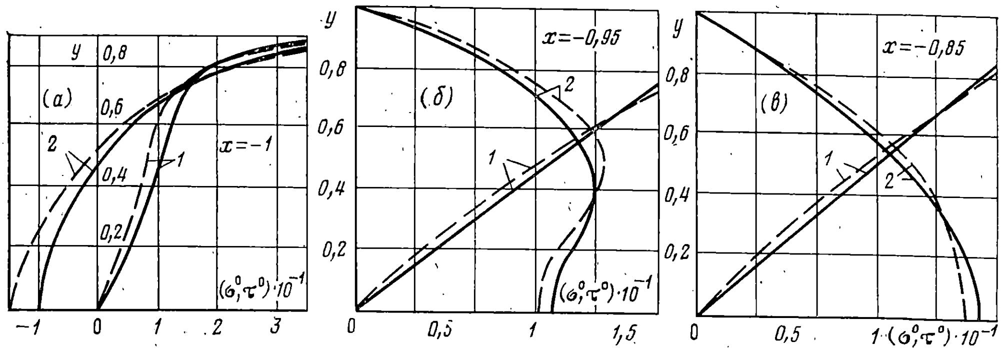
Для завершения решения необходимо найти постоянную A, входящую в нерегулярную часть решения (3.7), так, чтобы было выполнено условие (3.1). С этой целью выделим в функции напряжений и других введенных выше функциях составляющие, порождаемые функцией ψ (3.7). Согласно равенствам (3.3), (3.5), (3.7), (3.8), имеем $\varphi_0=\varphi_{0r}+A\varphi_{0s}$, где $\varphi_{0r}==\tau_0x({}^1/_3y^3-y)$, $\varphi_{0s}=\psi_s+\Phi_{0s}$.

Соответственно функции f_i, входящие в граничные условия (2.1), запишутся в виде $f_i=f_{ir}+Af_{is}$ $(i=1-4)$, где, например

$$f_{1r,s}=q\frac{\partial^3\varphi_{0r,s}}{\partial x^3}\bigg|_{x=-1}+(2g+\nu_2h^2)\frac{\partial^3\varphi_{0r,s}}{\partial x\,\partial y^2}\bigg|_{x=-1}$$

Разложение (2.15) преобразуется следующим образом: $U_j^{(1)}=U_{jr}^{(1)}++AU_{js}^{(1)}$, где $U_{jr}^{(1)}$ определяется равенством (2.15) при $R_k^{(1)}=R_{kr}^{(1)}$, а $U_{js}^{(1)}$ — при $R_k{}^{(1)}=R_{ks}^{(1)}$. Постоянные $R_{kr,s}^{(1)}$ находятся из равенств (2.20), причем для вычисления $R_{kr}^{(1)}$ в формуле (2.21) функцию $N_j^{(1,2)}$ следует определять при $f_j=f_{jr}$, а для вычисления $R_{ks}^{(1)}$ — при $f_j=f_{js}$. В результате из (3.1) получим $A=\chi_r/\chi_s$, где

$$\chi_{r,s}=\pm\sum_{k=1}^{\infty}(1-\beta_2{}^{(1)})R_{kr,s}^{(1)}(t_2\lambda_k\cos t_2\lambda_k+\sin t_2\lambda_k)\frac{c_{2k}}{t^2}\mp$$



Фиг. 2

$$\mp\xi_2^{(1)}\left(\int f_{1r,s}\,dy-\frac{1}{2}\int\limits_{-y}^{y}dy\int f_{1r,s}\,dy\right)\Bigg|_{y=1},$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи построено. Перемещения и напряжения определяются равенствами

$$u(x,y)=\frac{h^{-2}}{E_1}\left\{\int\limits_{-1}^{x}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}dx-\nu_2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}\right)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_{1k}(t_1^2+\alpha_1)\sin t_1\lambda_k y+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B_{2k}(t_2^2+\alpha_1)\sin t_2\lambda_k y\right]\left(X_k^{(1)}(-1)-X_k^{(1)}(x)\right)\lambda_k\right\}$$

$$v(x,y)=\frac{l^2h^{-4}}{E_1}\left\{\int f_2(x,y)\,dy+\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_{1k}(t_1^2+\alpha_2)\frac{1}{t_1}\cos t_1\lambda_k y+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B_{2k}(t_2^2+\alpha_2)\frac{1}{t_2}\cos t_2\lambda_k y\right]\lambda_k^2X_k^{(2)}(x)\right\},$$

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2X_k^{(2)}(x)F_k''(y)$$

$$\sigma_y=\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^4X_k^{(2)}(x)F_k(y), \qquad (3.9)$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y}-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2X_k^{(1)}(x)F_k'(y)$$

$$X_k^{(1)}(x)=\lambda_k^{-1}(A_{1k}\,\mathrm{sh}\,\lambda_k x+A_{2k}\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\lambda_k x),$$

$$X_k^{(2)}(x)=\lambda_k^{-2}(A_{1k}\,\mathrm{ch}\,\lambda_k x+A_{2k}\lambda_k\,\mathrm{sh}\,\lambda_k x)$$

В качестве примера на фиг. 2, *а—в* представлены построенные по формулам (3.9) распределения нормальных $\sigma^\circ={}^3/_2\sigma_x/\tau_0$ (кривая *1*) и касательных $\tau^\circ={}^3/_2\tau_{xy}/\tau_0$ (кривая *2*) напряжений по толщине полосы с $l/h=4$ в различных ее сечениях. Сплошные линии соответствуют изотропному материалу, штриховые — ортотропному материалу с параметрами $E_1/E_2=0{,}5$, $E_1/G=5$, $\nu_2=0{,}3$. Параметр λ, определяющий характер особенности в угловой точке закрепленного края, для изотропной полосы составляет 0,75, а для ортотропной — 0,7075.

В процессе расчета суммированием рядов проверялось выполнение граничных условий. Для рассматриваемой полосы по построению решения $u=0$. Перемещение v_y' на заделанном краю $x=-1$ при удержании в (3.9) 10 членов ряда в точках $y=0$; 0,125; 0,5; 0,75; 1,0 не превышает 2% от максимального прогиба на краю $x=1$. Касательные напряжения τ на краю $x=1$ не отличаются от заданного параболического распределения, а нормальные напряжения на этом краю не превышают 4% по отношению к максимальному значению касательных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каретко Н. П.* Об одном решении первой, второй и смешанной задач теории упругости для анизотропной полосы.: Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук, 1976, № 5, 103—106.
2. *Галфаян П. О.* Решение одной смешанной задачи теории упругости для прямоугольника.— Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. наук, 1964, т. 17, № 1, с. 39—61.
3. *Папкович П. Ф.* Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы.— Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 4, с. 335—339.
4. *Гринберг Г. А.* О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях.— ПММ, 1953, т. 17, вып. 2, с. 211—228.
5. *Ворович И. И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек.— В кн.: Тр. II Всес. съезда по теор. и прикл. механике. М.: Наука, 1966, с. 116—136.
6. *Васильев В. В., Лурье С. А.* Метод решения уравнений математической физики для сопряженных областей.— Докл. АН СССР, 1977, т. 233, вып. 5, с. 831—834.
7. *Лурье С. А.* Изгиб прямоугольной ортотропной пластинки, защемленной по контуру.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 1, с. 159—168.
8. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений.— Докл. АН СССР, 1951, т. 77, № 1, с. 11—14.
9. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.—Л.: Гостехиздат, 1950. 300 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.XII.1982