

УДК 539.376

## КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

ЛЬВОВ Г. И.

Исследование взаимодействия тонких оболочек с жесткими телами является актуальной проблемой механики твердого деформируемого тела. Контактным задачам для оболочек из линейно-упругого материала посвящена обширная литература. В монографиях [1-3] рассмотрены различные аспекты этой проблемы и имеется подробная библиография. Обзор исследований взаимодействия жестких тел с упругими тонкостенными элементами приведен в [4].

Контактные задачи для оболочек из нелинейно-упругого материала рассматривались в [5, 6], упругопластическое деформирование оболочек жесткими телами - в [7].

Широкое распространение тонкостенных элементов в конструкциях, работающих при повышенных температурах, обуславливает актуальность исследований ползучести оболочек при контактных нагружениях [8]. Смешанные задачи ползучести оболочек ставятся и при анализе некоторых технологических процессов [9, 10]. В то же время, как показывают исследования контактных задач ползучести и вязкоупругости для массивных тел [11-13], реономные свойства деформируемой среды могут вызывать новые качественные эффекты: изменение с течением времени зон контакта, перераспределение контактных давлений и т. д.

В публикуемой работе в геометрически линейной постановке рассматриваются задачи неустановившейся ползучести пологих оболочек, взаимодействующих с абсолютно жесткими телами (штампами).

Предполагается, что трение в зоне контакта отсутствует, а поверхность штампа является гладкой, т. е. имеет непрерывно вращающуюся касательную плоскость в зоне, где возможен контакт.

С помощью математического аппарата теории вариационных неравенств задачи приводятся к проблеме минимизации выпуклого функционала на замкнутом множестве допустимых перемещений.

Разработаны численные методы решения и приводятся результаты для двумерных и одномерных контактных задач.

1. Рассмотрим пологую тонкую оболочку, срединная поверхность которой  $S^*$  может быть задана параметрическим уравнением  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(q^1, q^2)$ , которое осуществляет гомеоморфное отображение срединной поверхности  $S^*$  на область  $S$  плоскости  $q^1, q^2$ . Будем предполагать, что срединная поверхность оболочки достаточно гладкая  $\mathbf{R}(q^1, q^2) \in C^2(S)$ , а область  $S$  является конечной суммой ограниченных звездных областей с кусочно-гладкой границей.

В процессе ползучести или при мгновенном нагружении оболочка может соприкасаться с абсолютно жестким штампом по части поверхности, отображение которой на плоскость  $q^1, q^2$  представляет собой некоторую область, граница которой подлежит определению.

Зададим поверхность штампа уравнением относительно декартовых координат ее точек  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ .

Для определенности примем, что внутри штампа  $f < 0$ , вне его  $f > 0$ .

Условия взаимодействия оболочки со штампом требуют, чтобы вектор перемещения точек срединной поверхности  $\mathbf{U}$  удовлетворял неравенству  $f(\mathbf{R} + \mathbf{U}) \geq 0$ , которое сформулировано при допущении, что штамп входит в контакт со срединной поверхностью оболочки. От такого допущения легко отказаться при решении конкретных задач. В силу малости перемещений данное условие может быть линеаризовано по  $\mathbf{U}$ :

$$f(\mathbf{R}) + \mathbf{U} \operatorname{grad} f(\mathbf{R}) \geq 0 \quad (1.1)$$

Законы состояния физически обоснованных теорий ползучести формулируются относительно скоростей деформаций. Поэтому разрешающие системы уравнений и дополнительные условия краевых задач ползучести твердых тел строятся относительно скоростей изменения компонентов напряженно-деформированного состояния. Ограничение (1.1) должно удовлетворяться в течение всего процесса деформирования. Рассматривая приращение вектора перемещения точек срединной поверхности на бесконечно малом интервале времени  $dU = U dt$ , получаем ограничение на вектор скорости перемещения

$$f(\mathbf{R}) + (U + U' dt) \operatorname{grad} f(\mathbf{R}) \geq 0 \quad (1.2)$$

в котором  $U$  — значение вектора перемещения в начале интервала времени  $dt$ .

Вектор скорости перемещения  $U'(q^1, q^2)$  может быть представлен в местном базисе срединной поверхности оболочки своими ковариантными или контравариантными компонентами

$$U' = u_h \cdot \mathbf{R}^h + w \cdot \mathbf{m} = u^h \cdot \mathbf{R}_h + w \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{R}_h = \partial \mathbf{R} / \partial q^h \quad (h=1, 2) \quad (1.3)$$

Здесь  $\mathbf{R}_h$  — координатные векторы, образующие основной базис срединной поверхности,  $\mathbf{R}^h$  — векторы взаимного базиса,  $\mathbf{m}$  — единичный вектор нормали.

Ковариантные компоненты тензоров скоростей тангенциальной и изгибной деформации срединной поверхности связаны со скоростями перемещений соотношениями теории пологих оболочек

$$e_{ih} = 0,5 (\nabla_i u_h + \nabla_h u_i) - w \cdot b_{ih}, \quad \kappa_{ih} = -\nabla_i \nabla_h w \quad (i, h=1, 2) \quad (1.4)$$

где  $\nabla_i$  — знак ковариантной производной в метрике срединной поверхности,  $b_{ih}$  — ковариантные компоненты второй квадратичной формы срединной поверхности. Тензор скоростей деформаций для точки, находящейся на расстоянии  $z$  от срединной поверхности, определяется с привлечением гипотез Кирхгофа — Лява

$$\varepsilon_{ih} = e_{ih} + z \kappa_{ih} \quad (1.5)$$

Скорость полной деформации представим в виде суммы упругой составляющей и скорости деформации ползучести

$$\varepsilon_{ih} = [(1+\mu)\sigma_{ih} - g_{ih}\sigma^j_j] / E + p_{ih}, \quad \sigma^j_j = g_{ih}\sigma^{ih}, \quad p_{ih} = \partial \Phi / \partial \sigma^{ih} \quad (i, h=1, 2) \quad (1.6)$$

где  $E$ ,  $\mu$  — упругие постоянные,  $\Phi$  — потенциал ползучести, вид которого определяется используемой теорией ползучести,  $g_{ih}$  — ковариантные компоненты метрического тензора срединной поверхности.

Рассмотрим такие законы состояния, для которых потенциал ползучести не зависит от скорости изменения напряжений и полных деформаций. Этим свойством обладает большинство технических теорий ползучести [14, 15].

Скорости изменения усилий и моментов определяются соотношениями

$$T^{ij} = H^{ijkl} h e_{kl} - H^{ijkl} \int_{-0,5h}^{0,5h} p_{kl} dz, \quad M^{ij} = H^{ijkl} \frac{h^3}{12} \kappa_{kl} - H^{ijkl} \int_{-0,5h}^{0,5h} p_{kl} z dz \quad (1.7)$$

$$H^{ijkl} = \frac{E}{1-\mu^2} [\mu g^{ij} g^{kl} + (1-\mu) g^{ik} g^{jl}]$$

Для рассмотрения условий равновесия представим область  $S$  на каждом интервале времени  $dt$  в виде  $S = S_0 \cup S_{0h} \cup S_h \cup S_{h0}$ , где  $S_0$  — отображение на плоскость  $q^1, q^2$  части поверхности оболочки, которая не касалась штампа на данном интервале времени;  $S_{0h}$  соответствует поверхности, вошедшей в контакт за время  $dt$ ;  $S_h$  — зона, в которой контакт имелся в течение всего данного интервала времени;  $S_{h0}$  определяет часть поверхности, отошедшей от штампа за время  $dt$ .

В области контакта условие (1.1) выполняется со знаком равенства. При малых перемещениях оболочки в зоне контакта можно принять, что

$$\text{grad } f(\mathbf{R}) = \mathbf{n} |\text{grad } f(\mathbf{R})| \quad (V(q^1, q^2) \in S_h \cup S_{0h}) \quad (1.8)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный нормальный вектор срединной поверхности.

В различных областях оболочки должны быть выполнены уравнения равновесия

$$\nabla_i T^{ih*} - p^{h*} = 0 \quad (V(q^1, q^2) \in S) \quad (1.9)$$

$$\nabla_i \nabla_h M^{ih*} + b_{ih} T^{ih*} + p^{s*} = 0 \quad (V(q^1, q^2) \in S_0)$$

$$\nabla_i \nabla_h M^{ih*} + b_{ih} T^{ih*} + q^{*} + p^{s*} = 0 \quad (V(q^1, q^2) \in S_{h_0})$$

где  $p^{i*}$ ,  $q^{*}$  — скорости изменения внешней нагрузки и контактного давления. При помощи (1.2), (1.8) получаем соотношения, определяющие скорость нормального перемещения в остальных областях

$$f(\mathbf{R}) + (w + w^* dt) |\text{grad } f(\mathbf{R})| = 0 \quad (V(q^1, q^2) \in S_{0h}) \quad w^* = 0 \quad (1.10)$$

$$(V(q^1, q^2) \in S_h)$$

Система уравнений (1.4), (1.7), (1.9), (1.10) должна быть дополнена начальным условием (упругое решение), соотношениями непрерывности на границах между зонами области  $S$  и условиями закрепления оболочки.

Границы между зонами заранее неизвестны и подлежат определению в ходе решения, что существенно осложняет решение поставленных краевых задач. Эффективным способом преодоления этих затруднений является приведение контактных задач к экстремальным проблемам с помощью теории вариационных неравенств [16].

2. Введем функционал скоростей перемещений

$$J(\mathbf{U}^*) = \frac{1}{2} \int_S \int_{-0,5h}^{0,5h} H^{ijkl} (e_{ij}^* + z \kappa_{ij}^* - p_{ij}^*) (e_{kl}^* + z \kappa_{kl}^* - p_{kl}^*) dz dS - \int_S \mathbf{P}^* \mathbf{U}^* dS \quad (2.1)$$

определенный на пространстве Соболева  $H = H_0^1(S) \times H_0^1(S) \times H_0^2(S)$  при жестком защемлении оболочки и  $H = H_0^1(S) \times H_0^1(S) \times (H^2(S) \cap H_0^1(S))$  при шарнирном опирании на ее границе. В функционале (2.1)  $\mathbf{P}^*$  — вектор скорости изменения внешней нагрузки, включающей и часть, связанную с исчезновением контактного давления на  $S_{h_0}$ . В таких пространствах можно по аналогии с [17] ввести норму, используя скалярное произведение

$$\|\mathbf{U}^*\|^2 = a(\mathbf{U}^*, \mathbf{U}^*) = \int_S H^{ijkl} [h e_{ij}^*(\mathbf{U}^*) e_{kl}^*(\mathbf{U}^*) + \frac{1}{12} h^3 \kappa_{ij}^*(\mathbf{U}^*) \kappa_{kl}^*(\mathbf{U}^*)] dS \quad (2.2)$$

В каждый момент времени скорости деформаций ползучести определяются значениями напряжений, деформаций ползучести и другими структурными параметрами, входящими в потенциал (1.6). Поэтому в функционале (2.1) можно выделить симметричный билинейный  $a(\mathbf{U}^*, \mathbf{U}^*)$  и линейный  $L(\mathbf{U}^*)$  функционалы, а также постоянную часть

$$J(\mathbf{U}^*) = \frac{1}{2} a(\mathbf{U}^*, \mathbf{U}^*) - L(\mathbf{U}^*) + C \quad (2.3)$$

$$L(\mathbf{U}^*) = \int_S \left[ H^{ijkl} \left( e_{ij}^* \int_{-0,5h}^{0,5h} p_{kl}^* dz + \kappa_{ij}^* \int_{-0,5h}^{0,5h} p_{kl}^* z dz \right) + \mathbf{P}^* \mathbf{U}^* \right] dS, \quad (2.4)$$

$$C = \frac{1}{2} \int_S \int_{-0,5h}^{0,5h} H^{ijkl} p_{ij}^* p_{kl}^* dz dS$$

Кинематически допустимое множество  $K$  скоростей перемещений для каждого интервала времени  $dt$  образует вектор-функции из  $H$ , удовлетворяющие неравенству

$$f(\mathbf{R}) + (w + w^* dt) |\text{grad } f(\mathbf{R})| \geq 0 \quad (2.5)$$

Обобщенным решением поставленной в п. 1 контактной задачи является вектор-функция  $\mathbf{U}^*(q^1, q^2)$ , для которой выполняется вариационное неравенство

$$a(\mathbf{U}^*; \mathbf{U}^{0*} - \mathbf{U}^*) \geq L(\mathbf{U}^{0*} - \mathbf{U}^*) \quad (\forall \mathbf{U}^{0*} \in K, \mathbf{U}^* \in K) \quad (2.6)$$

Действительно, пусть  $\mathbf{U}^*(q^1, q^2)$  — решение системы (1.4), (1.7), (1.9), (1.10). Умножим скалярно уравнения равновесия (1.9) на элемент  $(\mathbf{U}^{0*} - \mathbf{U}^*)$  и проинтегрируем полученное выражение по  $S$ :

$$\int_S [(\nabla_i T^{ik*} + p^{k*})(u_k^{0*} - u_k^*) + (\nabla_i \nabla_k M^{ik*} + b_{ik} T^{ik*} + p^{3*} + q^*)(w^{0*} - w^*)] dS = 0$$

С учетом формул Грина, соотношений (1.4), (1.7) и условий закрепления уравнение (2.7) приводится к виду

$$a(\mathbf{U}^*, \mathbf{U}^{0*} - \mathbf{U}^*) - L(\mathbf{U}^{0*} - \mathbf{U}^*) = \int_{S_0 \cup S_{0k}} q^*(w^{0*} - w^*) dS \quad (2.8)$$

Так как в области  $S_{0k}$  величина  $q^* \geq 0$  и  $(w^{0*} - w^*) \geq 0$ , а в области  $S_k$   $w^{0*} = w^* = 0$ , то правая часть уравнения (2.8) неотрицательна. Следовательно, решение исходной краевой задачи удовлетворяет неравенству (2.6).

Предположим теперь, что  $\mathbf{U}^*(q^1, q^2)$  — решение вариационного неравенства (2.6). Рассмотрим свойства этого решения, используя пространство  $D(S)$  бесконечно дифференцируемых функций  $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$  с носителем, компактным в  $S$ . Пусть  $\Phi$  принимает произвольные значения из подпространства  $\Phi = \{\Phi | \Phi \in D(S), \Phi_3 = 0\}$ . Подставляя в (2.6) элементы  $\mathbf{U}^{0*} = \mathbf{U}^* \pm \varepsilon \Phi$ , которые при достаточно малых  $\varepsilon$  принадлежат множеству  $K$ , получаем вариационное уравнение

$$a(\mathbf{U}^*, \Phi) = L(\Phi) \quad (2.9)$$

Из него с помощью формулы Грина получаем, что решение неравенства (2.6) является обобщенным решением первого уравнения системы (1.9). Рассматривая неравенство (2.6) на элементах  $\mathbf{U}^{0*} = \mathbf{U}^* \pm \varepsilon \Phi$ , где  $\Phi \in \Phi_0$ ,  $\Phi_0 = \{\Phi | \Phi \in D(S_0 \cup S_{0k}), \Phi_1 = \Phi_2 = 0\}$ , снова получаем уравнение (2.9), из которого следуют остальные уравнения равновесия (1.9).

Если  $\Phi$  принимает значения из множества  $\Phi_k = \{\Phi | \Phi \in D(S_{0k}), \Phi_3 \geq 0, \Phi_1 = \Phi_2 = 0\}$ , то элемент  $\mathbf{U}^{0*} = \mathbf{U}^* + \varepsilon \Phi$  принадлежит  $K$ . Подставляя такой элемент в (2.6), получаем

$$\int_{S_{0k}} [-T^{ij*}(\mathbf{U}^*) b_{ij} \Phi_3 - M^{ij*}(\mathbf{U}^*) \nabla_i \nabla_j \Phi_3] dS \geq \int_{S_{0k}} p^{3*} \Phi_3 dS \quad (2.10)$$

После преобразований, аналогичных предыдущим, (2.10) приводится к виду

$$\int_{S_{0k}} [-T^{ij*}(\mathbf{U}^*) b_{ij} - \nabla_i \nabla_j M^{ij*}(\mathbf{U}^*) - p^3] \Phi_3 dS \geq 0 \quad (2.11)$$

откуда следует, что приращение контактного давления в  $S_{0k}$  неотрицательно. Таким образом, из (2.6) следуют основные уравнения исходной контактной задачи.

Контактное давление в зонах  $S_{0k}$  и  $S_k$  находится из уравнений равновесия по конечным значениям усилий и моментов.

Решение вариационного неравенства (2.6) эквивалентно задаче минимизации квадратичного функционала (2.3) (константа  $C$  может быть опущена):

$$J(U') \leq J(U'') \quad (\forall U'' \in K, U' \in K) \quad (2.12)$$

Это утверждение основывается на строгой выпуклости функционала  $J(U')$ , которая следует [17] из положительной определенности симметричной билинейной формы (2.2). Линейный функционал  $L(U')$  будет непрерывным на  $H$  при условии, что  $p^1, p^2 \in L_2(S)$ ,  $p^3 \in L(S)$ , а интегралы по толщине оболочки от скоростей деформаций ползучести являются непрерывными ограниченными функциями в  $S$ . Последнее свойство характерно для наиболее распространенных теорий ползучести инкрементального типа. Исключения составляют лишь соотношения теории упрочнений для начального момента времени, когда скорости деформаций ползучести бесконечны. Однако при интегрировании этих соотношений на конечном интервале времени отмеченная особенность устраняется.

Известно [18], что для непрерывного положительно-определенного симметричного функционала  $a(U^i, U^j)$  и линейного функционала  $L(U^i)$  существует единственная функция  $U^i \in K$ , являющаяся решением задачи (2.12). Этим доказывается существование и единственность локального решения рассматриваемой контактной задачи: определения скоростей перемещений на бесконечно малом интервале времени  $dt$ .

3. Для интегрирования по времени начальной задачи неустановившейся ползучести используется метод шагов [14], предусматривающий разбиение рассматриваемого интервала времени  $(0, T)$  на конечное число достаточно малых отрезков  $\{t_k = \Delta t k \ (k=0, 1, 2, \dots, k_1), \Delta t = T/k_1\}$ . Приращения вектора перемещений на каждом шаге по времени  $\Delta U = U^i \Delta t$  находятся решением экстремальной задачи вида (2.12). Приведение контактных задач ползучести оболочек к экстремальной проблеме позволяет использовать для их решения эффективные методы теории оптимизации. Практическая реализация таких методов связана с заменой исходной задачи некоторой конечномерной.

Рассмотрим численное решение контактных задач для прямоугольных в плане пологих оболочек. Параметризация срединной поверхности может быть осуществлена при помощи ортогональной системы криволинейных координат  $x_1, x_2$  с евклидовой метрикой. Функционал (2.1) для таких задач определим на конечных приращениях перемещений

$$J(\Delta U) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \int_S \left( h \Delta e_{ij} \Delta e_{kl} + \frac{h^3}{12} \Delta \kappa_{ij} \Delta \kappa_{kl} \right) dS - C_{ijkl} \int_S \left[ \Delta e_{ij} \int_{-0,5h}^{0,5h} \Delta p_{kl} dz + \Delta \kappa_{ij} \int_{-0,5h}^{0,5h} \Delta p_{kl} z dz \right] dS - \int_S \Delta p \Delta w dS \quad (3.1)$$

$$C_{ijkl} = E [\mu \delta_{ij} \delta_{kl} + (1-\mu) \delta_{ik} \delta_{jl}] / (1-\mu^2)$$

Введем в области  $S = \{-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$  прямоугольную равномерную сетку  $\omega = \{x_i = ih_x, y_j = jh_y \ (i, j = \pm(0, 1, 2, \dots, M))\}$ ,  $h_x = a/N$ ,  $h_y = b/M$ . Непрерывным компонентам вектора перемещения  $U\{u, v, w\}$  поставим в соответствие сеточные функции  $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ ,  $v_{ij} = v(x_i, y_j)$ ,  $w_{ij} = w(x_i, y_j)$ . Для аппроксимации функционала (3.1) функцией  $J_h(\Delta U_{ij})$  заменим интегралы по области  $S$  квадратурными формулами трапеций и прямоугольников, а производные — разностными соотношениями. Такая замена соответствует внешней аппроксимации задачи [19]. Интегралы по толщине оболочки вычисляются по квадратурным формулам Гаусса.

Множество  $K$  аппроксимируем заданием локальных ограничений для  $\Delta w_{ij}(\mathbf{R}_{ij}=\mathbf{R}(x_i, y_j))$ :

$$f(\mathbf{R}_{ij}) + (w_{ij} + \Delta w_{ij}) |\text{grad } f(\mathbf{R}_{ij})| \geq 0 \quad (\forall \Delta U_{ij} \in K_h) \quad (3.2)$$

Для решения задачи нелинейного программирования

$$J_h(\Delta U_{ij}) \leq J_h(\Delta U_{ij}^0) \quad (\forall \Delta U_{ij}^0 \in K_h, \Delta U_{ij} \in K_h) \quad (3.3)$$

использовался метод последовательной верхней релаксации с проекцией [19].

Качественные особенности решений контактных задач рассматриваемого класса исследованы на примере квадратной пластины, прогибы которой ограничены плоскостью, находящейся на расстоянии  $\delta$  от поверхности пластины. Приращения прогибов пластины должны удовлетворять ограничению  $\Delta w \leq \delta - w$ .

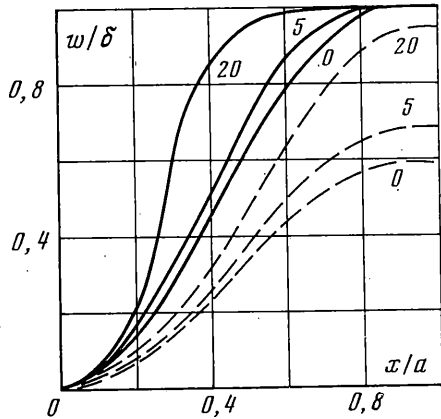
Потенциал ползучести в (1.8) принимался в виде

$$\Phi = \frac{B}{n+1} \sigma_0^{n+1}, \quad \sigma_0^2 = \frac{3}{2} (\sigma_{ik} \sigma^{ik} - 3\sigma^2),$$

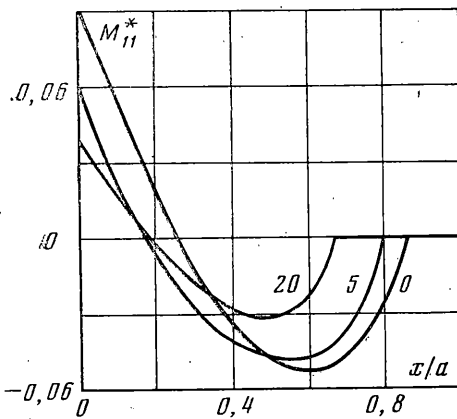
$$3\sigma = \sigma_i^i \quad (i, k=1, 2)$$

где  $\sigma_0$  — интенсивность напряжений,  $B, n$  — константы, определяемые по кривым простого последствия [15].

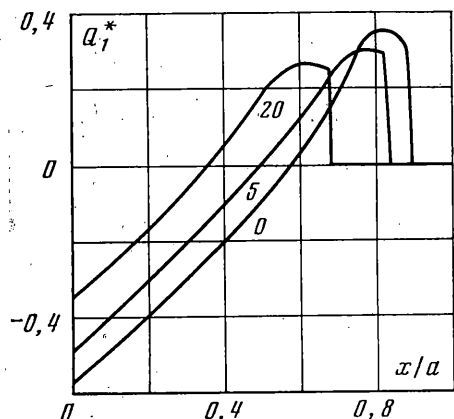
Численные результаты получены на сетке с  $M=N=32$  при 40 интервалах времени. Размеры пластины и механические свойства материала приняты:  $a=b=0,15$  м;  $h=0,006$  м;  $\delta=5 \cdot 10^{-4}$  м;  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu=0,3$ ;  $B=0,12 \cdot 10^{-9}$  (МПа) $^{-n}$ /ч;  $n=3$ . Пластина нагружена равномерным давлением  $p=0,4$  МПа, края пластины жестко защемлены. На фиг. 1 показано распределение прогибов пластины для различных моментов времени на линии  $y=0$  (сплошные кривые) и  $y=2/3b$  (штриховые



Фиг. 1



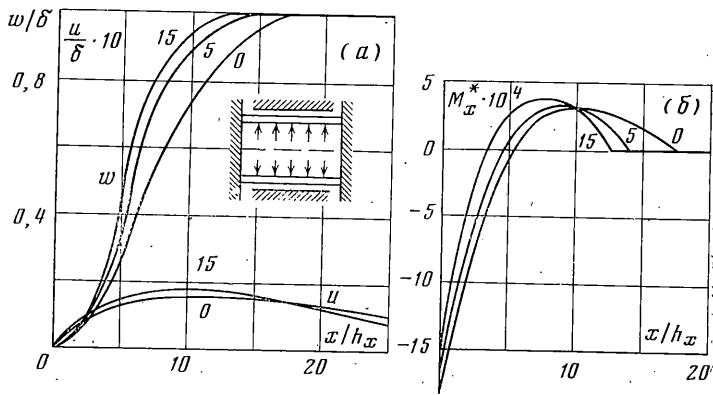
Фиг. 2



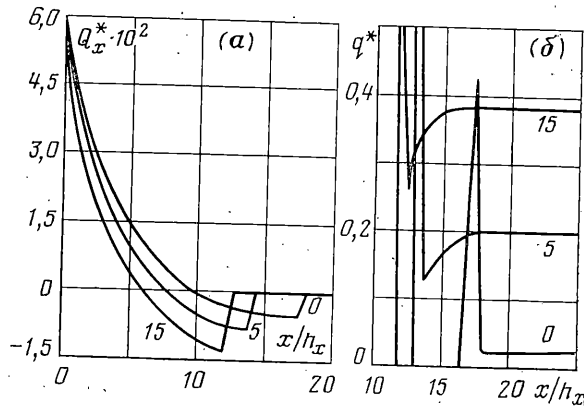
Фиг. 3

кривые). Цифрами отмечено время в часах. Безразмерные изгибающие моменты  $M_{11}^* = M_{11}/ra^2$  и перерезывающие силы  $Q_1^* = Q_1/ra$  показаны для линии  $y=0$  на фиг. 2, 3.

В качестве второго примера рассмотрена осесимметричная задача ползучести цилиндрической оболочки, прогибы которой ограничены соосным с ней жестким цилиндром. Оболочка нагружена постоянным внутренним давлением, края оболочки защемлены. На каждом этапе нагружения приращения перемещений должны удов-



Фиг. 4



Фиг. 5

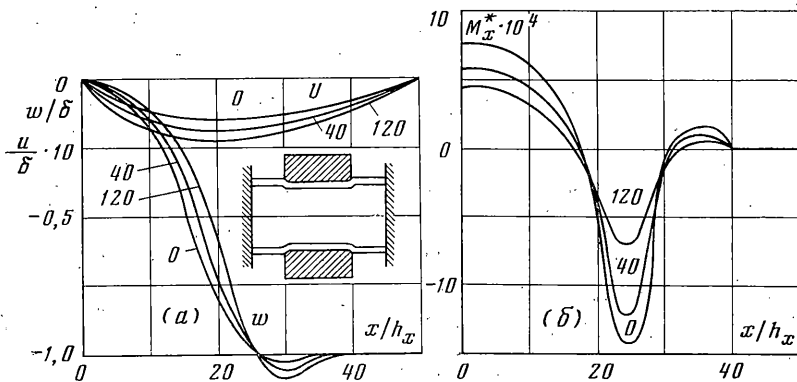
летворять ограничению  $\Delta w \leq \delta - w$ , где  $\delta$  — зазор между оболочкой и цилиндром. Функционал (3.1) для осесимметрично нагруженных цилиндрических оболочек может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}
 J(\Delta U) = & \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\mu^2} \int_0^l \left\{ \left[ \frac{d}{dx} (\Delta u) \right]^2 + \frac{h^2}{12} \left[ \frac{d^2}{dx^2} (\Delta w) \right]^2 + 2\mu \frac{d}{dx} (\Delta u) \frac{\Delta w}{R} + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{\Delta w}{R} \right)^2 \right\} dx - \frac{E}{1-\mu^2} \int_0^l \left[ \frac{d}{dx} (\Delta u) \cdot (D_{11} + \mu D_{22}) - \frac{d^2}{dx^2} (\Delta w) (C_{11} + \mu C_{22}) + \right. \\
 & \left. + \frac{\Delta w}{R} (D_{22} + \mu D_{11}) \right] dx - \int_0^l \Delta p \Delta w dx \\
 & D_{ij} = \int_{-0,5h}^{0,5h} \Delta p_{ij} dz, \quad C_{ij} = \int_{-0,5h}^{0,5h} \Delta p_{ij} z dz
 \end{aligned}$$

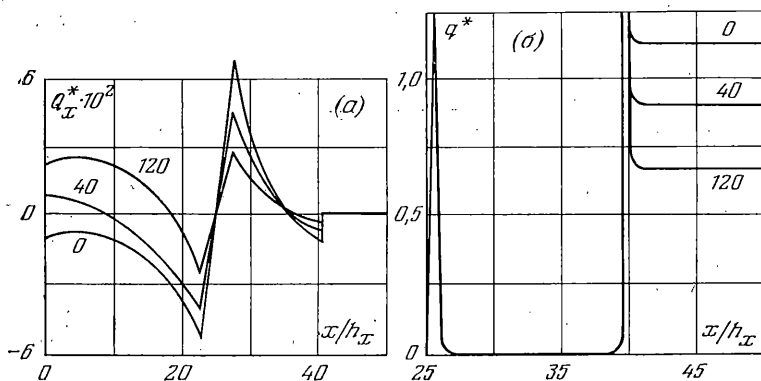
Численные результаты получены на сетке со 100 узлами для оболочки с размерами  $R=1$  м,  $h=6 \cdot 10^{-3}$  м,  $l=1$  м,  $\delta=2,87 \cdot 10^{-4}$  м. Механические свойства материала те же, что и в первом примере. Число шагов по времени — 60, давление  $p=0,4$  МПа.

На фиг. 4 показано для различных моментов времени распределение перемещений и изгибающего момента  $M_x^* = M_x / (pR^2)$ . Перерезывающие силы  $Q_x^* = Q_x / (pR)$  и контактное давление  $q^* = q/p$  между оболочкой и бандажом приводятся на фиг. 5.

Исследование релаксации контактных напряжений выполнено на примере цилиндрической оболочки, на которую с натягом  $\delta$  посажен осесимметричный бандаж (фиг. 6): Вычисления проведены при  $\delta=10^{-4}$  м,  $p=0$ , длина бандажа  $l_0=0,5l$ . Ос-



Фиг. 6



Фиг. 7

тальные исходные данные те же, что и в предыдущем примере. На фиг. 6 показано распределение перемещений и изгибающих моментов  $M_x^* = M_x / (\delta E h)$ . Перерезывающие силы  $Q_x^* = Q_x R / (\delta E h)$  и контактное давление  $q^* = q R^2 / (\delta E h)$  для различных моментов времени представлены на фиг. 7.

Анализ результатов решения контактных задач ползучести оболочек показывает, что особенность в контактном давлении на границе зоны контакта перемещается вместе с границей. В зоне контакта давление меняется с течением времени, вследствие чего процессы установившейся ползучести не реализуются даже при стационарных внешних нагрузках.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григорюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
2. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактные задачи теории оболочек и стержней. М.: Машиностроение, 1978. 248 с.
3. Пелех Б. Л., Сухорольский М. А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. Киев: Наук. думка, 1980. 214 с.
4. Попов Г. Я., Толкачев В. М. Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 4, с. 192–206.
5. Львов Г. И. Вариационная постановка контактной задачи для линейно-упругих и физически нелинейных пологих оболочек. — ПММ, 1982, т. 46, вып. 5, с. 841–846.
6. Львов Г. И. Вариационная постановка контактной задачи для физически нелинейных пологих оболочек. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 6, с. 45–47.
7. Львов Г. И. Взаимодействие упругопластической оболочки с жестким штампом. — Прикл. механика, 1980, т. 16, № 11, с. 58–64.
8. Бурлаков А. В., Львов Г. И., Морачковский О. К. Длительная прочность оболочек. Харьков: Вища школа, 1981. 102 с.
9. Малинин Н. Н., Романов К. И. Исследование процесса газостатической формовки длинной мембраны. — Машиноведение, 1982, № 4, с. 98–101.



10. Горев Б. В., Клопов И. Д., Раевская Г. А., Соснин О. В. К вопросу обработки материалов давлением в режиме ползучести.— ПМТФ, 1980, № 5, с. 185—191.
11. Арутюнян Н. Х. Контактные задачи теории ползучести.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 5, с. 897—906.
12. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
13. Зайцев Е. А., Кравчук А. С. Решение на ЭВМ контактных задач вязкоупругости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 93—98.
14. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
15. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 398 с.
16. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
17. Ворович И. И., Лебедев Л. П., Шлафман Ш. М. О некоторых прямых методах существования решения в нелинейной теории упругих непологих оболочек вращения.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 2, с. 339—348.
18. Сеа Ж. Оптимизация. М.: Мир, 1973. 244 с.
19. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.

Харьков

Поступила в редакцию  
14.I.1983