МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1984

УДК 539.385

ОБ ОДНОМ ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ОПИСАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ НАГРУЖЕНИЯ. Ч. II

ЗАВОЙЧИНСКИЙ Б. И.

Современные теории прочности описывают критическую ситуацию либо на октаэдрической площадке [1] (критерии типа $M(y_0, y_u)=1$, где y_0, y_u – первый и второй инварианты тензора нагружения или повреждения соответственно), либо на плоскости максимального касательного нагружения [2–3] (критерии типа $M(y_{\max}, y_n)=1$, где $2y_{\max}=y_1-y_3$, $2y_n=y_1+y_3$ при условии $y_1\geqslant y_2\geqslant y_3$, y_1, y_2, y_3 – главные компоненты тензора нагружения или повреждения), либо на плоскости, перпендикулярной y_1 ($M(y_1)=1$) [4] и т. п.

Естественно предположить, что эти теории являются частными случаями некоторой общей теории, в которой положение критической площадки обусловлено всей предысторией нагружения.

Рассматриваемая в публикуемой работе теория исходит из того, что определяющие соотношения между параметрами предельного процесса нагружения и коэффициенты предельной плоскости находятся в результате исследования экстремальных свойств некоторого пространственного функционала от процесса нагружения.

1. Рассматривается координатный тетраэдр, наклонная грань которого имеет единичную нормаль $\mathbf{n}=(n_1, n_2, n_3)$.

Процесс простого нагружения может быть представлен в главных осях так:

$$y_k(x)=y_k^+f(x)+y_0f_1(x)\quad (k=1, 2, 3) \tag{1.1}$$

$$|f(x)|\leqslant 1,\qquad |f_1(x)|\leqslant 1,\qquad 3y_0f_1(x)=\sum_{k=1}^{3} y_k(x)$$

Предположим, компоненты y_k^+ $k=(1, 2, 3)$ пронумерованы так, что $|y_1^+|\geqslant|y_2^+|\geqslant|y_3^+|$; обозначим $\alpha_k=y_k^+/y_1^+$ $(k=1, 2, 3)$, $\alpha=y_0/y_1^+$, при этом $\alpha_1=1$, $-1\leqslant\alpha_2\leqslant-0{,}5$, $-0{,}5\leqslant\alpha_3\leqslant 0$. Тогда соотношение (1.1) примет вид:

$$y_k(x)=y_1^+[\alpha_kf(x)+\alpha f_1(x)]\quad (k=1, 2, 3) \tag{1.2}$$

Процесс нагружения $\mathbf{Y}_n=\mathbf{Y}_n(x)$ на наклонной грани с нормалью $\mathbf{n}$ представляется следующей зависимостью:

$$\mathbf{Y}_n(x)=\overset{+}{y}_{n,1}(x)\mathbf{n}+y_{n,2}(x)\mathbf{m} \tag{1.3}$$

$$\overset{+}{y}_{n,1}(x)=y_1^+[f(x)\,y_1+f_1(x)\alpha]=y_{n,1}(x)+y_0(x)$$

$$y_{n,2}(x)=y_1^+f(x)\,(y_2-y_1^2)^{0,5},\quad y_{n,1}(x)=y_1^+f(x)\,y_1$$

$$y_0(x)=y_1^+f_1(x)\alpha,\ y_1=\alpha_kn_k^2=1+(\alpha_2-1)\,n_2^2+(\alpha_3-1)\,n_3^2$$

$$y_2=\alpha_k^2n_k^2=1+(\alpha_2^2-1)\,n_2^2+(\alpha_3^2-1)\,n_3^2$$

Координаты единичного вектора $\mathbf{m}$ определяются следующей системой:

$$\langle\mathbf{n}, \mathbf{Y}_n, \mathbf{m}\rangle=0,\qquad (\mathbf{mn})=0,\qquad \sum_{i=1}^{3} m_i^2=1 \tag{1.4}$$

Под предельным процессом $y_k^*=y_k^*$ (t,x) $(k=1,2,3)$, $x\in[0,t]$ понимается такой процесс малых упруговязкопластических деформаций, который приводит к достижению предельного состояния элемента в момент времени t, называемый долговечностью.

Компоненты предельного процесса нагружения $y_k^*=y_k^*(t,x)$ $(k=1,2,3)$, соответствующие данному нагружению $y_k=y_k(x)$, целесообразно задать в следующем однопараметрическом виде

$$y_k^*(t,x)=y_k(x)/\mu(t),\quad x\in[0,t],\quad \mathrm{Y}_n^*(t,x)=\mathrm{Y}_n(x)/\mu(t) \tag{1.5}$$

Утверждение. Предельный процесс нагружения реализует максимум целевого функционала по пространственно-временным координатам

$$\max\{\|\Pi(z,\mathrm{Y}_n^*(t,x)]_{x=0}^{t}\|:0\leqslant z\leqslant t;\ n_2,\ n_3\}=1 \tag{1.6}$$

При конкретизации постулата (1.6) с учетом (1.1)—(1.5) функцию $\mu(t)$ предлагается находить по следующему выражению

$$\mu(t)=\max\{J(z,\ n_2,\ n_3):0\leqslant z\leqslant t;\ n_2,\ n_3\} \tag{1.7}$$

$$J=(J_1^q+J_2^q)^{1/q}\quad (q=1\vee 2) \tag{1.8}$$

для пластичных материалов

$$\begin{gathered} J_1=y_{n,1}^2(z)/|\Pi_1^+[z,y_{n,1}(x)]_{x=0}^{t}|+y_0^2(z)/|\Pi_0^+[z,y_0(x)]_{x=0}^{t}| \\ J_2=y_{n,2}^2(z)/|\Pi_2^+[z,y_{n,2}(x)]_{x=0}^{t}| \end{gathered} \tag{1.9}$$

для хрупких материалов

$$J_1=|\Pi_1^-[z,y_{n,1}(x)]_{x=0}^{t}|+|\Pi_0^-[z,y_0(x)]_{x=0}^{t}|,\qquad J_2=|\Pi_2^-[z,y_{n,2}(x)]_{x=0}^{t}| \tag{1.10}$$

Здесь $\Pi_i^{\pm}=\Pi_i^{\pm}[z,y(x)]_{x=0}^{t}$ $(i=0,1,2)$ — линейные интегральные операторы, свойства которых изучались в первой части статьи [7].

Функционал J инвариантен относительно преобразований вращения и отражения ввиду инвариантности компонент y_0, $y_{n,1}$, $y_{n,2}$. Поэтому требование постулата изотропии [5] выполнено.

2. Соотношение (1.8) с помощью (1.3), (1.9), (1.10) преобразуется так:

$$J=p_2|y_1^+|[|y_2-y_1^2|^{q/2}+(p_1|y_1|+p_0|\alpha|)^q]^{1/q} \tag{2.1}$$

для пластичных материалов

$$\begin{gathered} p_0=\frac{|\Pi_2^+[z,f(x)]_{x=0}^{t}|}{|\Pi_0^+[z,f_1(x)]_{x=0}^{t}|}\frac{f_1^2(z)}{f^2(z)},\qquad p_1=\frac{|\Pi_2^+[z,f(x)]_{x=0}^{t}|}{|\Pi_1^+[z,f(x)]_{x=0}^{t}|} \\ p_2=f^2(z)/|\Pi_2^+[z,f(x)]_{x=0}^{t}| \end{gathered} \tag{2.2}$$

для хрупких материалов

$$\begin{gathered} p_0=|\Pi_0^-(z,f_1(x)]_{x=0}^{t}|/|\Pi_2^-[z,f(x)]_{x=0}^{t}| \\ p_1=|\Pi_1^-[z,f(x)]_{x=0}^{t}|/|\Pi_2^-[z,f(x)]_{x=0}^{t}|,\qquad p_2=|\Pi_2^-[z,f(x)]_{x=0}^{t}| \end{gathered} \tag{2.3}$$

В соответствии с (1.7) сначала можно найти максимум J по n_2 и n_3, считая $z=\mathrm{const}$:

$$\frac{\partial J}{\partial n_i}=\frac{\partial J}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_i}+\frac{\partial J}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial n_i}=0\quad {\scriptstyle (i=2,3)}\quad d^2J<0 \tag{2.4}$$

Система (2.4) сводится к одной из систем:

$$n_3=0,\quad \partial J/\partial y_1+(1+\alpha_2)\partial J/\partial y_2=0 \tag{2.5}$$

$$n_2=0, \quad \partial J/\partial y_1+(1+\alpha_3)\partial J/\partial y_2=0 \tag{2.6}$$

а именно к той системе, решение которой обеспечивает большее значение J по соотношению (2.1).

На основании (2.1), (2.5) и (2.6) находятся такие зависимости при $q=1$ и $q=2$ соответственно

$$n_i^2=0{,}5[1-p_1/(1+p_1^2)^{0{,}5}] \quad (i=2\vee3) \tag{2.7}$$

$$n_i^2=[p_0p_1\alpha+p_1^2+0{,}5(\alpha_i-1)]/(1-\alpha_i)(p_1^2-1) \quad (i=2\vee3) \tag{2.8}$$

В случае $q=1$ достаточное условие существования максимума выполняется, так как

$$(\partial^2J/\partial n_i^2)/(1-\alpha_i)=-n_i(1-\alpha_i)(1-n_i^2)^{-0{,}5}[3+ +n_i^2(1-n_i^2)^{-1}]-2p_1<0 \quad (i=2\vee3) \tag{2.9}$$

В случае $q=2$ условие $d^2J<0$ эквивалентно следующему неравенству

$$(1-\alpha_i)/2\geqslant p_1^2+p_0p_1|\alpha| \quad (i=2\vee3) \tag{2.10}$$

Критерий (1.7) с учетом (2.1), (2.7), (2.8) и условия $\mu(t)=1$ преобразуется при $q=1$ и $q=2$ соответственно

$$\max\{p_2[(1+p_1^2)^{0{,}5}(1-\alpha_i)+p_1(1+\alpha_i)+2p_0|\alpha|]:z\in[0,t]\}= =2/|y_1^+| \quad (i=2\vee3) \tag{2.11}$$

$$\max\{p_2[(1-\alpha_i)^2+(p_1(1+\alpha_i)+2p_0|\alpha|)^2/(1-p_1^2)]^{0{,}5}:z\in[0,t]\}= =2/|y_1^+| \quad (i=2\vee3) \tag{2.12}$$

В соотношениях (2.11) и (2.12) функционалы p_0, p_1 и p_2 определяются зависимостями (2.2) или (2.3), в которых $\Pi_i^\pm$ представляются в виде интегралов с симметрическими ядрами, либо в форме сходящихся рядов [6, 7] [1]:

$$\Pi_i^\pm[z,f(x)]_{x=0}^t=\lambda_i^\pm|f(z)|-\left|\frac{1}{t}\int_0^t K_i^\pm(z,x)f(x)\,dx\right|= =\lambda_i^\pm|f(z)|-\left|\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_i^\pm(k,t)f_k(t)\varphi_k(z)\right| \quad (i=0,1,2) \tag{2.13}$$

где $\varphi_k=\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, \infty)$ — полная замкнутая ортогональная система собственных функций для интервала $[0, t]$:

$$f_k(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\varphi_k(x)\,dx, \qquad \frac{1}{t}\int_0^t K_i^\pm(z,x)\varphi_k(x)\,dx=\lambda_i^\pm(k,t)\varphi_k(z)$$

Функции $\lambda_i^\pm$ и $\lambda_i^\pm(k, t)$ соотношения (2.13) находятся с помощью (2.11) или (2.12) при изучении сдвигового, одноосного и двухосного (или объемного) процессов, в которых $f(x)=f_1(x)=\varphi_k(x)$.

Для этого случая при $\lambda_i^\pm(k, t)=\lambda_i^\pm-\lambda_i^\pm(k, t)$ имеем

$$p_0=\lambda_2^\pm(k,t)/\lambda_0^\pm(k,t),\ p_1=\lambda_2^\pm(k,t)/\lambda_1^\pm(k,t),\ p_2=|\varphi_k(z)|(\lambda_2^\pm(k,t))^{\mp1} \tag{2.14}$$

Сдвиговый процесс характеризуется значениями параметров $\alpha_2=-1$, $\alpha_3=\alpha=0$, $|y_1^+|=y_{12}^*$. С учетом соотношений (2.11) и (2.12) при $\alpha_2=-1$ имеем соответственно

$$p_2=2/(1+p_1^2)^{0{,}5}y_{12}^* \tag{2.15}$$

---

[1] См. *Завойчинский Б. И.* О теории предельных процессов нагружения. М., 1984.— 23 с. Деп. в ВИНИТИ. 01.03.84; № 1160–84.

$$p_2=1/y_{12}^*,\ p_2=(\lambda_2^{\pm}(k,\ t))^{\mp 1}. \tag{2.16}$$

При этом предполагается, что $\varphi_k=\varphi_k(x)$ являются ортонормированными функциями, и реализован максимум по времени.

При изучении предельных процессов напряжений или деформаций имеем $y_{12}^*=\tau(k,\ t)$ или $y_{12}^*=\gamma(k,\ t)$, где $\tau=\tau(k,\ t)$, $\gamma=\gamma(k,\ t)$ — семейство кривых малоцикловой и ограниченной усталости при симметричном кручении в условиях мягкого и жесткого нагружения соответственно.

Анализ показывает, что для случая $\alpha_3=0$ по соотношениям (2.11) и (2.12) нельзя найти вещественые функции $p_0,\ p_1,\ p_2$.

Одноосный процесс имеет следующие значения параметров: $\alpha_2=\alpha_3=-0{,}5$. Обозначив $|y_1^+|=y_{11}^*$, $\alpha=\alpha_0$, получим для предельных процессов напряжений или деформаций $y_{11}^*={}^2/_3\sigma(k,\ t)$, $\alpha_0=0{,}5$; $y_{11}^*={}^2/_3(1+\mu)\varepsilon(k,\ t)$, $\alpha_0=(1-2\mu)/2(1+\mu)$, где $\sigma=\sigma(k,\ t)$, $\varepsilon=\varepsilon(k,\ t)$ — семейство кривых малоцикловой и ограниченной усталости при симметричном одноосном процессе в условиях мягкого и жесткого нагружений соответственно, μ — коэффициент Пуассона.

С учетом соотношений (2.11) и (2.15) находим

$$y_{11}^*(k,\ t)\,[1{,}5(1+p_1^2)^{0,5}+0{,}5p_1+2\alpha_0 p_0]=2y_{12}^*(k,\ t)\,(1+p_1^2)^{0,5}. \tag{2.17}$$

Из соотношений (2.12) и (2.16) получаем такую взаимосвязь

$$y_{11}^*(k,\ t)\,[(\alpha_0 p_0+{}^1/_4 p_1)^2/(1-p_1^2)+{}^9/_{16}]^{0,5}=y_{12}^*(k,\ t) \tag{2.18}$$

При двухосном предельном процессе параметры равны: $\alpha_2=\alpha_3=-0{,}5$, $|y_1^+|=y_{22}^*(k,\ t)$, $\alpha=\alpha'$.

Здесь для напряжений и деформаций соответственно

$$\begin{gathered} y_{22}^*(k,\ t)={}^2/_3\sigma_{11}(k,\ t),\ \alpha'=1{,}0 \\ y_{22}^*(k,\ t)={}^2/_3(1+\mu)\,\varepsilon_{11}(k,\ t),\ \alpha'=(1-2\mu)/(1+\mu) \end{gathered} \tag{2.19}$$

где $\sigma_{11}=\sigma_{11}(k,\ t)$, $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{11}(k,\ t)$ — семейство кривых малоцикловой и ограниченной усталости при симметричном двухосном мягком и жестком нагружении соответственно [2].

Из соотношений (2.11) и (2.15) получается следующая зависимость:

$$y_{22}^*(k,\ t)\,[1{,}5(1+p_1^2)^{0,5}+0{,}5p_1+2\alpha' p_0]=2y_{12}^*(k,\ t)\,(1+p_1^2)^{0,5} \tag{2.20}$$

а соотношения (2.11) и (2.16) преобразуются к следующему виду:

$$y_{22}^*(k,\ t)\,[(\alpha' p_0+{}^1/_4 p_1)^2/(1-p_1^2)+{}^9/_{16}]^{0,5}/y_{12}^*(k,\ t)=1 \tag{2.21}$$

При решении системы уравнений (2.15), (2.17) и (2.20) с учетом (2.14) находятся собственные значения оператора (2.13):

$$\begin{gathered} \lambda_1^{\pm}=(2q_1)^{\mp 1},\ \lambda_0^{\pm}=(2q_2)^{\mp 1},\ \lambda_2^{\pm}=[(y_{12}^*)^{-2}-q_1^2]^{\mp 0,5}2^{\mp 1} \\ q_1=4(2/y_{11}^*-1/y_{22}^*)-3/y_{12}^*,\ \ q_2=(1/y_{22}^*-1/y_{11}^*)/\alpha_0 \end{gathered} \tag{2.22}$$

При решении системы уравнений (2.16), (2.18) и (2.21) с учетом (2.14) находим

$$\lambda_1^{\pm}=(y_{12}^*)^{\pm 1}(1+q_1^{-2})^{\pm 0,5},\ \lambda_0^{\pm}=(y_{12}^*)^{\pm 1}(q_1^2 q_2^{-2}+q_2^2)^{\pm 0,5},\ \lambda_2^{\pm}=(y_{12}^*)^{\pm 1} \tag{2.23}$$

$$q_1=4(2-q)\,m_2^{0,5},\qquad q_2=(1-q)\,m_2^{0,5}/\alpha_0$$

$$q^2=m_2/m_1,\ m_i=y_{12}^{*2}/y_{ii}^{*2}-{}^9/_{16}\quad (i=1,\ 2)$$

3. Таким образом, для случая $f=f_1=\varphi_k(x)$ по (2.11), (2.14), (2.22)

[2] При $k=0$ функции y_{12}^*, y_{11}^* и y_{22}^* описывают кривые длительной прочности в условиях ползучести или релаксации при сдвиге, одноосном и двухосном нагружении соответственно.

имеем

$$y_1^+[-(1+2\alpha_2)/y_{12}^*-4(1+\alpha_2)(0{,}5/y_{22}^*-1/y_{11}^*)+$$
$$+(1/y_{22}^*-1/y_{11}^*)\alpha/\alpha_0]=1 \qquad (3.1)$$

а критерий (2.12) с учетом (2.14), (2.23) записывается

$$y_1^+[0{,}25(1-\alpha_2)^2+m_1(\alpha(q-1)/\alpha_0+2(2-q)(1+\alpha_2)^2]^{0,5}/y_{12}^*=1 \qquad (3.2)$$

Определяющие функции соотношений (2.15) — (3.2) для предельных процессов напряжений или деформаций равны

$$y_{12}^*=\tau(k,t),\ y_{11}^*={}^2/_3\sigma(k,t)$$
$$y_{22}^*={}^2/_3\sigma_{11}(k,\ t),\ \ \alpha_0=0{,}5,\ \ \alpha'=1{,}0 \qquad (3.3)$$
$$y_{12}^*=\gamma(k,t),\ y_{11}^*={}^2/_3(1+\mu)\varepsilon(k,t)$$
$$y_{22}^*={}^2/_3(1+\mu)\varepsilon_{11}(k,t),\ \alpha_0=(1-2\mu)/2(1+\mu)$$

При плоском напряженном состоянии соотношение (3.1) может быть выражено через максимальное касательное напряжение $\tau_{max}=(\sigma_1-\sigma_2)/2$ и нормальное напряжение к площадке максимального касательного напряжения $\sigma_n=(\sigma_1+\sigma_2)/2$ для $\sigma_n/\tau_{max}\in[0,\ 1]$ в виде

$$\tau_{max}+\sigma_n(2\tau/\sigma-1)=\tau \qquad (3.4)$$

или через максимальный сдвиг $\gamma_{max}=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2$ и нормальную деформацию к площадке максимального сдвига $\varepsilon_n=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2$ в виде

$$\gamma_{max}+\varepsilon_n(2\gamma/\varepsilon-1-\mu)(1-\mu)=\gamma \qquad (3.5)$$

При экспериментальном исследовании циклической прочности тонкостенных цилиндров при синхронном симметричном нагружении осевой силой и крутящим моментом изучается процесс

$$2\sigma_i(x)=(\sigma_a+(-1)^{i+1}\sqrt{\sigma_a^2+4\tau_a^2})\sin\omega x \quad (i=1,\ 2)$$
$$2\tau_{max}=\sqrt{\sigma_a^2+4\tau_a^2},\ 2\sigma_n=\sigma_a \qquad (3.6)$$

и соотношение (3.4) преобразуется следующим образом:

$$(\sigma/\tau-1)(\sigma_a/\sigma)^2+(2-\sigma/\tau)\sigma_a/\sigma+(\tau_a/\tau)^2=1 \qquad (3.7)$$

Соотношение (3.7) применялось Гафом [8, 9] при изучении выносливости двух видов чугунов и стальных образцов с геометрическим концентратором напряжений.

При $\mu=0{,}5$ зависимость (3.5) переписывается $\gamma_{max}+(4\gamma/\varepsilon-3)\varepsilon_n=\gamma$ и совпадает с теорией Блази — Замрика [2], имеющей экспериментальное подтверждение для области малоцикловой усталости ряда хрупких материалов.

Зависимости, аналогичные (3.4) и (3.5), получаются и на основе критерия (3.2):

$$\tau_{max}^2+(4\tau^2/\sigma^2-1)\sigma_n^2=\tau^2 \qquad (3.8)$$

$$\gamma_{max}^2+(4\gamma^2/\varepsilon^2(1+\mu)^2-1)(1+\mu)^2\varepsilon_n^2/(1-\mu)^2=\gamma^2 \qquad (3.9)$$

Для случая (3.6) соотношение (3.8) преобразуется к виду

$$(\sigma_a/\sigma)^2+(\tau_a/\tau)^2=1 \qquad (3.10)$$

Зависимость (3.10) совпадает с формулой Гафа [8, 9] и обоснована многочисленными экспериментами по выносливости углеродистых и легированных сталей.

В области ограниченной долговечности установлено соответствие соотношения (3.10) экспериментальным данным по циклической прочности полых образцов из стали 45 [10], из стали S15C и S45C [11].

При $\mu=0{,}5$ соотношение (3.9) представляется в виде

$$\gamma_{\max}^2+(16\gamma^2/\varepsilon^2-9)\,\varepsilon_n^{\,2}=\gamma^2 \tag{3.11}$$

который совпадает с теорией Брауна — Миллера [3], подтвержденной результатами экспериментов для двух сталей в области малоцикловой усталости и различных температур.

При экспериментальном исследовании циклической прочности тонкостенных цилиндров при синхронном симметричном осевом деформировании и симметричной закрутке изучается процесс

$$2\varepsilon_i(x)=[\varepsilon_a(1-\mu)+(-1)^{i+1}(\varepsilon_a^{\,2}(1+\mu)^2+\gamma_a^{\,2})^{0,5}]\sin\omega x \quad (i=1,\,2) \tag{3.12}$$

Для этого случая соотношение (3.9) преобразуется к виду

$$(\varepsilon_a/\varepsilon)^2+(\gamma_a/\gamma)^2=1 \tag{3.14}$$

который использован Блассом для описания малоцикловой усталости пластичных сталей.

Развиваемая здесь теория предельных процессов нагружения и многочисленные экспериментальные данные позволяют провести приближенную классификацию материалов по их механическим свойствам при симметричном одноосном нагружении σ, сдвиге τ и двухосном нагружении $\sigma_{-0,5}$, характеризуемом отношением $\sigma_2/\sigma_1=-0{,}5$, где $\sigma_i=\max\{\sigma_i(z):z\in[0,t]\}$ $(i=1,\,2)$.

Классификация материалов по параметрам $\eta_1=\sigma/\tau$ и $\eta_2=\sigma_{-0,5}/\tau$ представлена в следующей таблице.

Хрупкие материалы		Пластичные материалы	
$\sqrt{2}\leqslant\eta_1<\sqrt{3}$		$\sqrt{3}\leqslant\eta_1\leqslant2{,}0$	
I группа $1{,}2\leqslant\eta_2<1{,}3$	II группа $1{,}3\leqslant\eta_2\leqslant1{,}35$	I группа $1{,}2\leqslant\eta_2<1{,}3$	II группа $1{,}3\leqslant\eta_2\leqslant1{,}35$

4. Итак, простое нагружение материалов вида (1.1), в котором

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(t)\varphi_k(x) \quad \text{и} \quad f_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k(t)\varphi_k(x)$$

должно удовлетворять следующим соотношениям.

Для хрупких материалов с помощью (2.11), (2.3), (2.13), (2.14), (2.22) получается критерий прочности

$$\max\{[|y_1^+-y_2^+|\Pi_2(z,t)+{}^1/_2|y_1^++y_2^\pm|p_1(z,t)+$$
$$+|y_0|\Pi_0(z,t)]:z\in[0,t]\}=1 \tag{4.1}$$

$$\Pi_2(z,t)={}^1/_2(p_2(z,t)^2+p_1(z,t)^2)^{0,5},\ \Pi_0(z,t)=p_0(z,t)/\alpha_0$$

Здесь для материалов первой и второй групп соответственно

$$p_i(z,t)=\left|\sum_{k=0}^{\infty}q_i(k,t)f_k(t)\varphi_k(z)\right| \quad (i=1,2) \quad p_0(z,t)=\left|\sum_{k=0}^{\infty}q_0(k,t)g_k(t)\varphi_k(z)\right| \tag{4.2}$$

$$p_i(z,t)=\left|\sum_{k=0}^{\infty}q_i(k,t)^{-1}f_k(t)\varphi_k(z)\right|^{-1}p_i^-(z) \quad (i=1,2) \quad p_1^-(z)=1, \quad p_2^-(z)=f(z)^2 \tag{4.3}$$

$$p_0(z,t)=\alpha_0^2 f_1(z)^2 f(z)^{-2}\left|\sum_{k=0}^{\infty} q_0(k,t)^{-1} g_k(t)\varphi_k(z)\right|^{-1},$$

$$q_0(k,t)=y_{22}^*(k,t)^{-1}-y_{11}^*(k,t)^{-1}$$

$$q_2(k,t)=(y_{12}^*(k,t)^{-2}-q_1(k,t)^2)^{0{,}5},\ q_1(k,t)=$$
$$=4(2y_{11}^*(k,t)^{-1}-y_{22}^*(k,t)^{-1})-3y_{12}^*(k,t)^{-1} \tag{4.4}$$

Функции y_{11}^*, y_{22}^*, y_{12}^* определяются по (3.3).

Для пластичных материалов зависимости (2.12), (2.2), (2.13), (2.14), (2.23) определяют следующую теорию прочности

$$\max\{[(y_1^+-y_2^+)^2 p_2(z,t)^2+(|y_1^++y_2^+|p_1(z,t)+$$
$$+|y_0|p_0(z,t))^2/(1-p_1^2/p_2^2)]^{0{,}5} : z\in[0,t]\}=1 \tag{4.5}$$

где для материалов первой и второй групп соответственно

$$p_i(z,t)={}^1/_2\left|\sum_{k=0}^{\infty} q_i^+(k,t)^{-1} f_k(t)\varphi_k(z)\right| \quad (i=1,2)$$

$$p_0(z,t)={}^1/_2\left|\sum_{k=0}^{\infty} q_0^+(k,t)^{-1} g_k(t)\varphi_k(z)\right| \tag{4.6}$$

$$p_i(z,t)={}^1/_2\left|\sum_{k=0}^{\infty} q_i^+(k,t) f_k(t)\varphi_k(z)\right|^{-1} f(z)^2 \quad (i=1,2)$$

$$p_0(z,t)={}^1/_2\left|\sum_{k=0}^{\infty} q_0^+(k,t) g_k(t)\varphi_k(z)\right|^{-1} f_1(z)^2 \tag{4.7}$$

$$q_0^+(k,t)=y_{12}^*(k,t)(q_1(k,t)^2 q_2(k,t)^{-2}+q_2(k,t)^2)^{0{,}5} \tag{4.8}$$

$$q_1^+(k,t)=y_{12}^*(k,t)(1+q(k,t)^{-2})^{0{,}5},\ q_2^+(k,t)=y_{12}^*(k,t)$$

$$q_1(k,t)=4(2-q(k,t))m_1(k,t)^{0{,}5},\ q_2(k,t)=(1-q(k,t))m_1(k,t)^{0{,}5}d_0^{-1} \tag{4.9}$$

$$q(k,t)^2=m_2(k,t)/m_1(k,t),\ m_i(k,t)=y_{12}^*(k,t)^2 y_{ii}^*(k,t)^{-2}-{}^9/_{16}$$

$$(i=1,2)$$

Функции y_{11}^*, y_{22}^*, y_{12}^* определяются соотношениями (3.3).

При условии $y_{11}^*(k,t)=y_{22}^*(k,t)=2/\sqrt{3}y_{12}^*(k,t)$ критерий прочности (4.5), (4.7)—(4.9) дает обобщение энергетической теории прочности для произвольного пропорционального нагружения

$$\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2=\sigma^{*2},\qquad \sigma^*=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma(k,t)f_k(t)\varphi_k(t) \tag{4.10}$$

Циклическая прочность элементов при наличии геометрического концентратора напряжений приближенно описывается соотношениями (4.1), (4.2), (4.4), в которых $\sigma_{11}=\sigma_{11}(\omega,\omega t)$, $\sigma=\sigma_{-1}(\omega,\omega t)$, $\tau=\tau_{-1}(\omega,\omega t)$ — семейство кривых усталости для данного элемента при симметричном двухосном, одноосном и сдвиговом нагружении соответственно.

Для выносливости металлов установлено соответствие между значениями пределов усталости по этим соотношениям и экспериментальными данными для цилиндров с отверстием, для образцов с надрезом в виде острой круговой выточки, для образцов с отверстием, галтелью и шлицевым вырезом [12—16].

Для ограниченной долговечности металлов также получено удовлетворительное соответствие этих соотношений экспериментальным данным по циклической прочности полых цилиндров с внешней кольцевой выточкой, изготовленных из нормализованной стали 45 [13], сварного соединения, состоящего из двух фланцев и трубы [14].

Проведенное сопоставление прогноза по соотношениям (4.5)—(4.9) и (4.1)—(4.4) с экспериментальными данными по выносливости полых цилиндров в условиях несимметричных однородных и неоднородных предельных процессов [15, 16] позволяет сделать вывод об их удовлетворительном соответствии.

5. При исследовании некоторых непериодических предельных процессов простого нагружения эффективным оказывается прием п. 7 первой части [7].

Нагружению вида

$$y(x)=\varphi_k(x)\sum_{i=1}^{n} y_i[h(x-x_{i-1})-h(x-x_i)] \qquad (5.1)$$

при условии $\varphi_k(x_{i-1})=\varphi_k(x_i)=0$, $\varphi_k(t)=1$, $y_n \geqslant y_i$ $(i=1,\ldots,n-1)$ соответствуют следующие взаимосвязи предельных параметров простого процесса

для пластичных материалов

$$\lambda^+/y_n^*-\sum_{i=1}^{n}(y_i^*/y_n^*)\,[y^*(t_{i-1}/t,k)-y^*(t_i/t,k)]=1 \qquad (5.2)$$

$$y^*(z,k)/\lambda^+=1-r+(r^2-z^2)^{0,5}$$

$$r=[1+(1-y_{-1}(t,k)/\lambda^+)^2]/2(1-y_{-1}(t,k)/\lambda^+)$$

где y_i^* $(i=1,\ldots,n)$ — предельные амплитуды интенсивности напряжений или деформаций; $y=y(x)$ — интенсивность напряжений или деформаций

для хрупких материалов

$$y_n^*/\lambda^+ +\sum_{i=1}^{n} y_i^*(y^*(t_i/t,k)^{-1}-y^*(t_{i-1}/t,k)^{-1})=1 \qquad (5.3)$$

$$y^*(z,k)/\lambda^+=r+y_{-1}(t,k)/\lambda^+-(r^2-(z-1)^2]^{0,5}$$

где y_i^* $(i=1,\ldots,n)$ — предельные амплитуды максимального главного напряжения или максимальной главной деформации, $y=y(x)$ — максимальное главное напряжение или максимальная главная деформация, λ^+ — предел прочности при статическом простом нагружении с заданными параметрами процесса α_2, α_3, α_0, $y_{-1}=y_{-1}(t,k)$ — семейство кривых малоцикловой и ограниченной усталости при простом нагружении с заданными параметрами процесса α_2, α_3, α_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Об одной теории длительной прочности.— Инж. ж. МТТ, 1967, № 3, с. 21—35.
2. *Blass J. J., Zamrik S. Y.* Multiaxial Low-Cycle Fatigue of Type 304 Strainless steel.— In: ASME — MPC. Properties Councl. Symp. on Creep-Fatigue Interaction, New York: ASME, 1976, p. 129—159.
3. *Brown M. W., Miller K. J.* High temperature low cycle biaxial fatigue of two steels.— Fatigue Engng Mater. and Struct., 1979, v. 1, No. 2, p. 217—229.
4. *Мякотин Е. А.* Использование критерия σ_1 при оценке длительной прочности конструкционных сталей при плоском напряженном состоянии.— Проблемы прочности, 1981, № 2, с. 5—10.
5. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. 287 с.
6. *Завойчинский Б. И.* Стохастическая теория предельных процессов нагружения.— В кн.: Вопросы прочности и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1984, с. 85—96.
7. *Завойчинский Б. И.* Об одном вариационном принципе описания предельных процессов нагружения. Ч. I.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 4, с. 159—165.

8. *Gough H. J., Pollard H. V.* The Strength of Metals under Combined Alternating Stresses.— Proc. Inst. Mech. Engrs, 1935, v. 131, p. 3—54.
9. *Gough H. J.* Engineering Steels under combined cyclic and Static Stresses.— J. Appl. Mech., 1950, v. 17, No. 2, p. 113—125.
10. *Филатов Э. Я., Панфилов Ю. А.* Сопротивление усталости конструкционной стали при двухосном напряженном состоянии.— Проблемы прочности, 1972, № 10, с. 33—36.
11. *Hoshi S., Okamoto Y., Nakamura H.* Fatigue life estimation of unnotched carbon steels speciments under combined bending and torsion.— J. Soc. Mater. Sci., 1980, v. 29, No. 319, p. 334—339.
12. *Ужик Г. В.* Прочность металлов и влияние концентрации напряжений при изгибе с кручением в условиях симметричных циклов переменных нагрузок.— Вестн. машиностроения, 1951, № 7, с. 5—14.
13. *Панфилов Ю. А., Филатов Э. Я.* Сопротивление усталости конструкционной стали при неоднородном сложном напряженном состоянии.— Проблемы прочности, 1980, № 3, с. 24—26.
14. *Панфилов Ю. А.* Исследование сопротивления усталости сварных элементов при совместном изгибе и кручении.— Проблемы прочности, 1978, № 9, с. 39—40.
15. *Ужик Г. В.* Прочность металлов и влияние концентрации напряжений при изгибе с кручением в условиях несимметричных циклов переменных нагрузок.— Вестн. машиностроения, 1954, № 4, с. 11—14.
16. *Серенсен С. В.* Несущая способность и расчет на прочность деталей при статических и переменных напряжениях.— Вестн. машиностроения, 1954, № 4, с. 3—10.

Москва

Поступила в редакцию
21.XII.1983

В № 4 на с. 159 в статье Завойчинского Б. И. в заголовке следует читать: **«Об одном вариационном принципе описания предельных процессов нагружения. Ч. I».**