

УДК 539.3

## УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРОВ С ВОЗМУЩЕННЫМИ БОКОВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

БЛОШКО Н. М., НЕМИШ Ю. Н.

Как известно [1, 2], аналитическое решение пространственных граничных задач теории упругости для цилиндров конечных размеров с возмущенными (в частности, гофрированными) боковыми поверхностями удалось получить, используя метод возмущения формы границы, только для специальных смешанных граничных условий на торцах [3, 4] или же при выполнении на них интегральных условий в смысле принципа Сен-Венана.

В публикуемой работе при помощи метода возмущения формы границы [1, 5] в сочетании с принципом суперпозиции [6], развитым применительно к исследованию упругого равновесия круговых цилиндров конечных размеров [7], рассматриваются трехмерные краевые задачи теории упругости для трансверсально-изотропных однородных сплошных цилиндров при выполнении на торцевых плоскостях произвольных граничных условий в напряжениях (в предположении, что условия парности касательных напряжений не нарушаются). В качестве примера исследовано осесимметричное напряженное состояние цилиндров с «косинусоидальной», трапециевидной и треугольной выточками, находящимися под действием осевого растяжения — сжатия. Сравнение числовых данных, полученных на основе указанного подхода в частном случае, с результатами из [8] (изотропный цилиндр с волнообразной гофрировкой), а также анализ практической сходимости свидетельствуют об эффективности применяемого метода.

Как показано в [9], применение в некоторых случаях численного метода конечных элементов к исследованию концентрации напряжений у дна мелкой круговой выточки на полосе приводит к значительному занижению коэффициента концентрации по сравнению с результатами в [8].

1. Рассмотрим упругий однородный трансверсально-изотропный сплошной цилиндр конечной длины  $2h$ , внешняя поверхность  $S_r$  которого описывается уравнением

$$r=1+\varepsilon f(z) \quad (|\varepsilon| \ll 1) \quad (1.1)$$

где  $f(z)$  — непрерывно дифференцируемая функция,  $r, \varphi, z$  — безразмерные круговые цилиндрические координаты, отнесенные к радиусу цилиндра  $r=r_0$ .

Предположим, что требуется определить напряженно-деформированное состояние цилиндра, находящегося под действием некоторых усилий  $F_k$  ( $k=r, z$ ) на боковой поверхности и  $G_h^\pm$  на торцевых плоскостях  $z=\pm h$ .

Ввиду сложности поверхности  $S_r$ , описываемой уравнением (1.1), переменные в граничных условиях не разделяются, а следовательно, не представляется возможным получить точное решение рассматриваемой задачи. Однако наличие в (1.1) малого параметра  $\varepsilon$  позволяет с помощью метода возмущения формы границы [1, 5] рассматриваемую граничную задачу свести к рекуррентной последовательности краевых задач для кругового цилиндра конечной длины. Следовательно, решение задачи ищется в виде рядов по положительным степеням  $\varepsilon$ .

В  $j$ -м приближении ( $j > 0$ ) получаем следующие граничные условия:

$$\left[ \sum_{s=0}^j G_1^{(s)} \sigma_{r\theta}^{(j-s)} + \sum_{s=1}^j G_2^{(s)} \sigma_{z\theta}^{(j-s)} \right]_{r=1} = F_h^{(j)}, \quad \sigma_{z\theta}^{(j)}|_{z=\pm h} = G_h^{\pm(j)} \quad (k=r, \varphi, z) \quad (1.2)$$

$$G_1^{(s)} = \sum_{m=0,2,\dots}^s (-1)^{m/2} \frac{(m-1)!!}{m!!(s-m)!} f^{s-m}(z) [f'(z)]^m \frac{\partial^{s-m}}{\partial r^{s-m}} \quad (1.3)$$

$$G_2^{(s)} = \sum_{m=0,2,\dots}^{s_*} (-1)^{1+m/2} \frac{(m-1)!!}{m!!(s-m-1)!} f^{s-m-1}(z) [f'(z)]^{m+1} \frac{\partial^{s-m-1}}{\partial r^{s-m-1}}$$

$S=s, S_*=s-2$  ( $s$  — четное);  $S=s-1, S_*=s-1$  ( $s$  — нечетное)

Согласно [10], в случае трансверсально-изотропной среды (цилиндрическая анизотропия) уравнения равновесия в цилиндрических координатах допускают осесимметричное решение через две гармонические функции. На этом основании для составляющих вектора перемещений в  $j$  приближении справедливы формулы

$$u_r^{(j)} = \frac{\partial}{\partial r} (\Phi_1^{(j)} + \Phi_2^{(j)}), \quad u_z^{(j)} = \frac{\partial}{\partial z} (k_1^* \Phi_1^{(j)} + k_2^* \Phi_2^{(j)}) \quad (1.4)$$

где постоянные  $k_1^*, k_2^*$  определяются из соотношений

$$k_i^* = (c_{11}\kappa_i - c_{44}) / (c_{13} + c_{44}) \quad (i=1, 2) \quad (1.5)$$

$$c_{14}c_{44}\kappa^2 + [c_{13}(c_{13} + 2c_{44}) - c_{11}c_{33}]\kappa + c_{33}c_{44} = 0$$

( $c_{ik}$  — упругие постоянные трансверсально-изотропного материала). Функции  $\Phi_i^{(j)}$  являются гармоническими относительно переменных  $\kappa_i^{1/2}r, \varphi, z$  (или  $r, \varphi, z/\kappa_i^{1/2}$ ) и, следовательно, удовлетворяют уравнению

$$\nabla_i^2 \Phi_i^{(j)} = 0 \quad \left( \nabla_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \kappa_i \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right). \quad (1.6)$$

Без ограничения общности предположим, что краевые условия на торцах и боковой поверхности цилиндра позволяют рассмотреть случай симметричного относительно плоскости  $z=0$  напряженного состояния. Тогда гармонические функции  $\Phi_i^{(j)}(r, z)$  можно представить в виде [11]:

$$\begin{aligned} \Phi_i^{(j)}(r, z) = & b_i^{(j)} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{\kappa_i} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,i}^{(j)} I_0(\sqrt{\kappa_i} k_n r) \cos k_n z + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} C_{m,i}^{(j)} \frac{\lambda_m z}{\sqrt{\kappa_i}} J_0(\lambda_m r) \quad \left( k_n = \frac{n\pi}{h} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $A_{n,i}^{(j)}, C_{m,i}^{(j)}$  — произвольные постоянные,  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя,  $J_0$  — функция Бесселя первого рода,  $\lambda_m$  — корни уравнения  $J_1(\lambda) = 0$ .

С учетом (1.4), (1.7) компоненты тензора напряжений в  $j$ -м приближении определяются согласно обобщенному закону Гука [12]. Так, например, выражение для  $\sigma_{zz}^{(j)}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(j)} = & - \sum_{i=1}^2 (k_i^* c_{13} - \kappa_i c_{11}) \frac{2b_i^{(j)}}{\kappa_i} - \\ & - \sum_{i=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,i}^{(j)} (k_i^* c_{33} - \kappa_i c_{13}) k_n^2 I_0(\sqrt{\kappa_i} k_n r) \cos k_n z + \\ & + \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^{\infty} C_{m,i}^{(j)} \frac{k_i^* c_{33} - \kappa_i c_{13}}{\kappa_i} \lambda_m^2 \operatorname{ch} \frac{\lambda_m z}{\sqrt{\kappa_i}} J_0(\lambda_m r) \end{aligned} \quad (1.8)$$

2. Предполагая корни характеристического уравнения (1.5) действительными и различными ( $\kappa_1 \neq \kappa_2$ ), определим напряженное состояние в трансверсально-изотропном цилиндре с боковой поверхностью  $S_r$ , описываемой уравнением (1.1). На основании изложенного в п. 1, граничные условия на боковой поверхности и на торцах в  $j$ -м приближении примут вид

$$\sigma_{rr}^{(j)}|_{r=1} = f_1^{(j)}(z), \quad \sigma_{rz}^{(j)}|_{r=1} = \varphi_1(z) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{zz}^{(j)}|_{z=\pm h} = f_2^{(j)}(r), \quad \sigma_{rz}^{(j)}|_{z=\pm h} = \pm \varphi_2^{(j)}(r)$$

Пользуясь методом суперпозиции [6, 7], развитым применительно к решению граничных задач для кругового изотропного цилиндра конечной длины, и удовлетворяя граничным условиям (2.1), приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $A_{n,i}^{(j)}$ ,  $C_{m,i}^{(j)}$  следующего вида:

$$x_n^{(j)} = \frac{c_{44}(1+k_1^*)}{t_n} \sum_{m=1}^{\infty} y_m^{(j)} \left[ \frac{1}{k_n^2 \kappa_1 + \lambda_m^2} - \frac{1}{k_n^2 \kappa_2 + \lambda_m^2} \right] + \frac{B_n^{(j)}}{t_n} \quad (2.2)$$

$$y_m^{(j)} = \frac{c_{44}(1+k_1^*)}{s_m} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(j)} \left[ \frac{\kappa_1}{k_n^2 \kappa_1 + \lambda_m^2} - \frac{\kappa_2}{k_n^2 \kappa_2 + \lambda_m^2} \right] + \frac{D_m^{(j)}}{s_m}$$

$$x_n^{(j)} = \frac{2(-1)^n}{\sqrt{\kappa_1}} A_{n,1}^{(j)} k_n^3 I_1(\sqrt{\kappa_1} k_n), \quad y_m^{(j)} = \frac{2}{h} C_{m,1}^{(j)} \lambda_m \operatorname{sh} \frac{\lambda_m h}{\sqrt{\kappa_1}} J_0(\lambda_m)$$

$$A_{n,2}^{(j)} = -A_{n,1}^{(j)} \frac{1+k_1^* I_1(\sqrt{\kappa_1} k_n)}{1+k_2^* I_1(\sqrt{\kappa_2} k_n)} - \frac{\varphi_{1n}^{(j)}}{c_{44}(1+k_2^*) I_1(\sqrt{\kappa_2} k_n)}$$

$$C_{m,2}^{(j)} = -C_{m,1}^{(j)} \frac{1+k_1^* \operatorname{sh}(\lambda_m h / \sqrt{\kappa_1})}{1+k_2^* \operatorname{sh}(\lambda_m h / \sqrt{\kappa_2})} - \frac{\varphi_{2m}^{(j)}}{c_{44}(1+k_2^*) \operatorname{sh}(\lambda_m h / \sqrt{\kappa_2})}$$

$$t_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{k_1^* - k_2^*}{1+k_2^*} - \frac{c_{11} - c_{12}}{k_n^2} + \frac{c_{44}(1+k_1^*)}{k_n \sqrt{\kappa_1}} \frac{I_0(\sqrt{\kappa_1} k_n)}{I_1(\sqrt{\kappa_1} k_n)} - \frac{c_{44}(1+k_1^*)}{k_n \sqrt{\kappa_2}} \frac{I_0(\sqrt{\kappa_2} k_n)}{I_1(\sqrt{\kappa_2} k_n)} \right]$$

$$s_m = \frac{h}{2\lambda_m} c_{44}(1+k_1^*) \left[ \sqrt{\kappa_1} \operatorname{cth} \frac{\lambda_m h}{\sqrt{\kappa_1}} - \sqrt{\kappa_2} \operatorname{cth} \frac{\lambda_m h}{\sqrt{\kappa_2}} \right]$$

$$B_n^{(j)} = (-1)^n f_{1n}^{(j)} - (-1)^n \varphi_{1n}^{(j)} \frac{c_{11} - c_{12}}{c_{44}(1+k_1^*) k_n} +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{\sqrt{\kappa_2}} \varphi_{1n}^{(j)} \frac{I_0(\sqrt{\kappa_2} k_n)}{I_1(\sqrt{\kappa_2} k_n)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\lambda_m \varphi_{2m}^{(j)}}{h(k_n^2 \kappa_2 + \lambda_m^2)} J_0(\lambda_m) \quad (2.3)$$

$$D_m^{(j)} = f_{2m}^{(j)} J_0(\lambda_m) + \varphi_{2m}^{(j)} \frac{1}{\sqrt{\kappa_2}} \operatorname{cth} \frac{\lambda_m h}{\sqrt{\kappa_2}} J_0(\lambda_m) - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n}^{(j)} \frac{2(-1)^n k_n \kappa_2}{k_n^2 \kappa_2 + \lambda_m^2}$$

где  $f_{1n}^{(j)}$ ,  $f_{2m}^{(j)}$ ,  $\varphi_{1n}^{(j)}$ ,  $\varphi_{2m}^{(j)}$  — коэффициенты Фурье и Фурье — Дини, соответствующих им функций, входящих в правые части (2.1).

Система из двух уравнений для определения постоянных  $b_i^{(j)}$  ( $i=1, 2$ ) имеет вид, аналогичный приведенному в [11]. Следуя методике, изложенной в [6], для системы (2.2) доказывается следующее утверждение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(j)} = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m^{(j)} = a_0^{(j)} \quad (2.4)$$

Для практических расчетов положим  $x_n^{(j)} = y_m^{(j)} = a_0^{(j)}$  при  $n \geq N, m \geq M$  (для достаточно больших  $N, M$ ). Это обстоятельство дает возможность значительно улучшить сходимость рядов для напряжений и их производных вблизи границы цилиндра. В частности, для осевых нормальных напряжений имеем

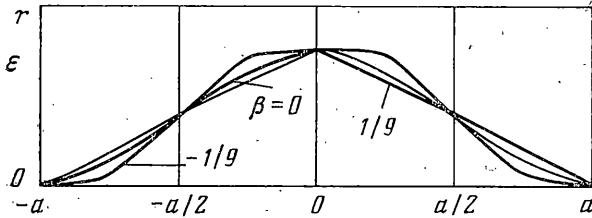
$$\begin{aligned} \sigma_{zz,1}^{(j)} = & -c_{44}(1+k_1^*) \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{2k_n} \left\{ x_n^{(j)} \left[ \sqrt{\kappa_1} \frac{I_0(\sqrt{\kappa_1} k_n r)}{I_1(\sqrt{\kappa_1} k_n r)} - \right. \right. \\ & - \sqrt{\kappa_2} \frac{I_0(\sqrt{\kappa_2} k_n r)}{I_1(\sqrt{\kappa_2} k_n r)} \left. \right] - a_0^{(j)} \left[ \frac{\sqrt{\kappa_1} \exp[-k_n(1-r)\sqrt{\kappa_1}]}{\sqrt{r}} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\sqrt{\kappa_2} \exp[-k_n(1-r)\sqrt{\kappa_2}]}{\sqrt{r}} \right] \right\} \cos k_n z + \\ & + c_{44}(1+k_1^*) \sum_{m=1}^M \left\{ \frac{h}{2\lambda_m} y_m^{(j)} \left[ \sqrt{\kappa_1} \frac{\text{ch}(\lambda_m z / \sqrt{\kappa_1})}{\text{sh}(\lambda_m h / \sqrt{\kappa_1})} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{\kappa_2} \frac{\text{ch}(\lambda_m z / \sqrt{\kappa_2})}{\text{sh}(\lambda_m h / \sqrt{\kappa_2})} \right] \frac{J_0(\lambda_m r)}{J_0(\lambda_m)} - \right. \\ & - \frac{(-1)^m h}{2\pi m \sqrt{r}} a_0^{(j)} \left[ \sqrt{\kappa_1} \exp \left[ - \left( m + \frac{1}{4} \right) \frac{\pi(h-z)}{\sqrt{\kappa_1}} \right] - \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{\kappa_2} \exp \left[ - \left( m + \frac{1}{4} \right) \frac{\pi(h-z)}{\sqrt{\kappa_2}} \right] \cos \left( m\pi r - \frac{\pi(1-r)}{4} \right) \right] \right\} - \\ & - \frac{c_{44}(1+k_1^*)}{2\sqrt{r}} a_0^{(j)} [\sqrt{\kappa_1} \tau_1(r, z) - \sqrt{\kappa_2} \tau_2(r, z)] + \\ & + \frac{hc_{44}(1+k_1^*)}{2\pi \sqrt{r}} a_0^{(j)} [\sqrt{\kappa_1} \gamma_1(r, z) - \sqrt{\kappa_2} \gamma_2(r, z)] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \tau_i(r, z) = & - \frac{h}{2\pi} \ln \left\{ 1 + 2 \exp \left[ - \frac{\pi \sqrt{\kappa_i}(1-r)}{h} \right] \cos \frac{\pi z}{h} + \exp \left[ - \frac{2\pi \sqrt{\kappa_i}(1-r)}{h} \right] \right\} \\ \gamma_i(r, z) = & - \frac{1}{2} \exp \left[ - \frac{\pi(h-z)}{4\sqrt{\kappa_i}} \right] \ln \left\{ 1 + 2 \exp \left[ - \frac{\pi(h-z)}{\sqrt{\kappa_i}} \right] \cos \pi r + \right. \\ & \left. + \exp \left[ - \frac{2\pi(h-z)}{\sqrt{\kappa_i}} \right] \right\} \cos \frac{\pi(1-r)}{4} - \\ & - \sin \frac{\pi(1-r)}{4} \exp \left[ - \frac{\pi(h-z)}{4\sqrt{\kappa_i}} \right] \text{arctg} \left\{ \frac{\exp[-\pi(h-z)/\sqrt{\kappa_i}] \sin \pi r}{1 + \exp[-\pi(h-z)/\sqrt{\kappa_i}] \cos \pi r} \right\} \end{aligned}$$

При этом  $\sigma_{zz,1}^{(j)}$  включает только те слагаемые  $\sigma_{zz}^{(j)}$ , которые стоят под знаком суммирования по  $n, m$  в (1.8).

Нетрудно убедиться в том, что при  $z \rightarrow h$  и  $r \rightarrow 1$  члены, стоящие вне суммы в (2.5), принимают вполне определенные конечные значения.

3. В качестве примера рассмотрим задачу об определении концентрации напряжений в трансверсально-изотропном цилиндре, находящемся под действием осевых усилий постоянной интенсивности  $p$  ( $p > 0$  — растяжение,  $p < 0$  — сжатие), содержащего выточку на боковой поверхности  $S_r$ .



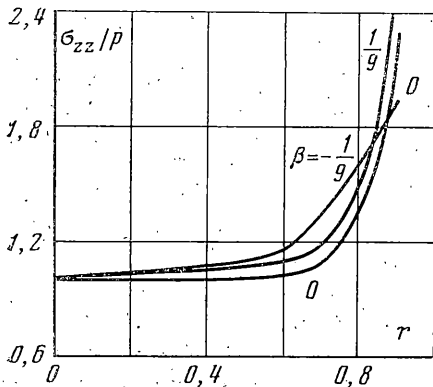
Фиг. 1

Функцию  $f(z)$ , характеризующую форму поверхности  $S_r$ , примем в виде

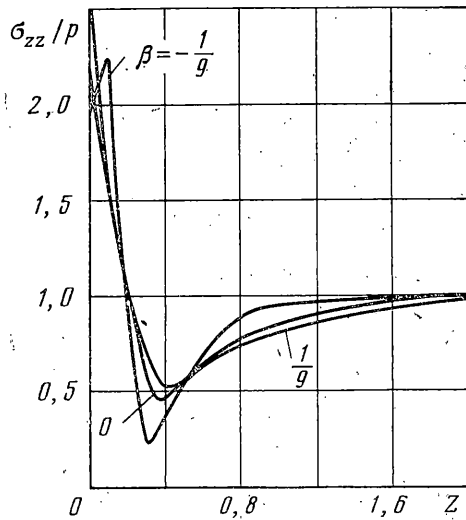
$$f(z) = \frac{1 + \beta + \cos(\pi z/a) + \beta \cos(3\pi z/a)}{2(1 + \beta)} \quad (|z| \leq a) \quad (3.1)$$

$$f(z) = 0 \quad (|z| > a).$$

При этом параметру  $\beta = 0$  соответствует волнообразная, а  $\beta = \pm 1/9$ , трапецевидная и треугольная с округленными углами форма выточки (фиг. 1).



Фиг. 2



Фиг. 3

Для указанной выше задачи граничные условия (2.1) примут вид

$$\sigma_{nr}|_{r=s_r} = 0, \quad \sigma_{nz}|_{r=s_r} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=\pm h} = p, \quad \sigma_{rz}|_{z=\pm h} = 0 \quad (3.2)$$

С учетом первых четырех приближений (т. е. с точностью до  $\varepsilon^4$  по сравнению с единицей) получены аналитические выражения для компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , которые определяются по формулам

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^3 \Delta_{ij}^{(k)}, \quad \Delta_{ij}^{(k)} = \varepsilon^k \varepsilon_{ij}^{(k)} \quad (k < 1) \quad (3.3)$$

$$\Delta_{ij}^{(h)} = \varepsilon^h \sum_{m=0}^h \frac{f^m(z)}{m!} \frac{\partial^m}{\partial r^m} \sigma_{ij}^{(h-m)} \quad (r \in S_r^*) \quad (3.4)$$

При этом поверхности уровня  $S_r^*$  описываются уравнением  $r = r_* + \varepsilon f(z)$  ( $r_* \leq 1$ ). В частности, значение  $r_* = 1$  соответствует боковой поверхности  $S_r$ .

Составлен численный алгоритм решения указанной задачи на языке Фортран-IV. Числовые расчеты для цилиндров выполнены при следующих геометрических па-

Таблица 1

$\beta$	$\Delta_{zz}^{(0)}$	$\Delta_{zz}^{(1)}$	$\Delta_{zz}^{(2)}$	$\Delta_{zz}^{(3)}$	$\sigma_{zz}/p$	$\Delta_{zz}^{(4)}$
0	1,000 43,5%	1,049 44,4%	0,225 9,8%	0,053 2,3%	2,297 100%	0,042 0,5%
1/9	1,000 38,0%	1,193 45,4%	0,352 13,4%	0,085 3,2%	2,630 100%	0,021 0,8%
-1/9	1,000 44,3%	1,071 47,4%	0,130 5,8%	0,058 2,5%	2,259 100%	0,026 1,2%

Таблица 2

$h$	$z$	$\sigma_{zz}/p$	$\sigma_{zz}^H/p$	$\Delta, \%$
2	0	1,370	1,358	0,1
4	1	1,908	1,896	0,6
4	0	1,981	1,896	4,5

раметрах:  $h=2$ ,  $a=0,4$ ,  $\varepsilon=0,05$ ,  $0,10$ ,  $0,15$ ,  $0,20$  и упругих постоянных [в  $10^{10}$  Па]  $c_{11}=5,97$ ,  $c_{12}=2,62$ ,  $c_{13}=2,17$ ,  $c_{33}=6,17$ ,  $c_{44}=1,64$ .

Расчеты показали, что определяющими являются осевые напряжения  $\sigma_{zz}$ . Распределение напряжений  $\sigma_{zz}$  по толщине цилиндра в сечении  $z=0$  показано на фиг. 2, по высоте на боковой поверхности — на фиг. 3.

Числовые данные табл. 1 показывают практическую сходимость итерационного процесса.

Компоненты найденных первых четырех приближений удовлетворяют неравен-

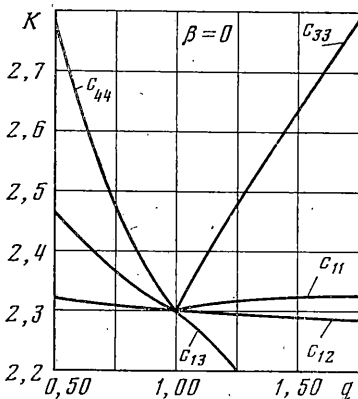
ву  $\Delta_{zz}^{(m)} / \Delta_{zz}^{(m-1)} \leq \Delta_{zz}^{(m-1)} / \Delta_{zz}^{(m-2)}$  ( $m=2, 3$ ). Если предположить, что и пятое прибли-

жение ( $m=4$ ) будет удовлетворять аналогичному неравенству, то его оценка не превышает 1,2% (табл. 1).

Приведенные числовые результаты свидетельствуют о том, что применяемый вариант метода возмущения формы границы [1, 5] решения пространственных задач об упругом равновесии цилиндров конечной длины с возмущенными боковыми поверхностями приводит к быстро сходящемуся итерационному процессу.

На фиг. 4 представлена зависимость коэффициента концентрации напряжений  $K$  (т. е. значения относительного осевого напряжения у дна выточки) для волнообразной выточки ( $\beta=0$ ) от упругих постоянных. При этом в качестве базовых выбирались представленные выше постоянные; параметр  $q$  является множителем при каждой из постоянных поочередно. Как видно из фиг. 4, наибольшее влияние оказывают постоянные  $c_{33}$  и  $c_{44}$ , что нетрудно объяснить исходя из обобщенного закона Гука.

О степени точности и достоверности получаемых на основании изложенного подхода числовых значений для напряжений можно судить по данным табл. 2, которая отображает результаты сравнения напряжений  $\sigma_{zz}/p$  в изотропном (коэффициент Пуассона  $\nu=0,25$ ) поперечно гофрированном цилиндре конечных размеров ( $f(z)=$



Фиг. 4

$=\cos \lambda_k z$ ,  $\lambda_k = k\pi/h$ ) с известными результатами  $\sigma_{zz}^H/p$ , полученными по формулам из [8] для бесконечного цилиндра с мелкой выточкой при одноосном растяжении. При этом значения  $\sigma_{zz}/p$  определялись по формулам типа (3.3), (3.4) с точностью  $O(\varepsilon^3)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н., Немиш Ю. Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. Киев: Вища школа, 1982. 350 с.
2. Немиш Ю. Н. Трехмерные граничные задачи теории упругости для неканонических областей.— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 2, с. 3–39.
3. Немиш Ю. Н., Чернопиский Д. И. Осесимметричное напряженное состояние деформируемых цилиндров переменной толщины.— Прикл. механика, 1975, т. 11, № 10, с. 9–18.
4. Немиш Ю. Н., Чернопиский Д. И. Некоторые трехмерные граничные задачи для продольно гофрированных толстостенных цилиндров.— Прикл. механика, 1978, т. 14, № 3, с. 34–44.
5. Немиш Ю. М. Пружина рівновага деформівних циліндрів змінної товщини.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 2, с. 155–158.
6. Lamé G. Lecons sur la theorie mathematique del e'lasticité des corps solids. P.: Bachelier, 1952. 335 p.
7. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.
8. Neuber H. Kerbspannungslehre. B.: Springer, 1958. 225 S.
9. Nishimura Atsuko. Finite element analysis of flat bar with shallow circular notch. I. Stress concentration factor for tension.— Фукуока дайгаку когаку суюо. Fukuoka Univ. Rev. Technol. Sci., 1981, No. 27, p. 13–17.
10. Elliott H. A. Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals.— Proc. Camb. Phil. Soc., 1948, v. 44, pt. 4, p. 522–533.
11. Баблюян А. А. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра из трансверсально-изотропного материала.— Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1961, т. 14, № 4, с. 61–70.
12. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

Киев

Поступила в редакцию  
2.XI.1982