

УДК 539.3

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С УСЛОВИЯМИ ТРЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ

ВОВКУШЕВСКИЙ А. В.

Приведены вариационные постановки одного класса задач упругости с трением на границе как задач с идеальными односторонними связями, отличающиеся от известных постановок гладкостью (дифференцируемостью) функционалов, что позволяет применять разнообразные методы минимизации. Рассмотрен численный пример.

1. Рассмотрим упругое тело, занимающее двумерную область Ω с границей $S = S_f \cup S_u \cup S_c$. Обозначим через $\mathbf{u}$ вектор перемещений, $\boldsymbol{\sigma}_n$ — вектор поверхностных напряжений на площадке с внешней нормалью $\mathbf{n}$ и введем касательную $\boldsymbol{\tau}$, образующую правую пару с $\mathbf{n}$.

В Ω действуют объемные силы $\mathbf{Q}$, на S_f заданы поверхностные напряжения $\mathbf{F}$, на S_u — перемещения $\mathbf{U}$, а на S_c — условия вида

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{F}_n, \quad \sigma_n = (\boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{n}) \quad (1.1)$$

$$|\sigma_\tau| \leq g, \quad \sigma_\tau = (\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\tau}) \quad (1.2)$$

$$|\sigma_\tau| < g \Rightarrow u_\tau = 0, \quad u_\tau = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) \quad (1.3)$$

$$\sigma_\tau = g \Rightarrow u_\tau \leq 0, \quad \sigma_\tau = -g \Rightarrow u_\tau \geq 0$$

где $g > 0$ — предельная величина напряжений трения, $\mathbf{F}_n$ — заданные нормальные напряжения, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Пусть $\mathbf{F}_n < 0$, тогда естественно считать $g = -f\mathbf{F}_n$, где $f > 0$ — коэффициент трения.

Задачи с граничными условиями (1.1) — (1.3) рассматривались в [1–3]. Отметим условия применимости такой модели. Во-первых, нормальное контактное давление и напряжения трения могут быть определены независимо лишь в отдельных случаях [3], в частности при контакте симметричных (вблизи зоны контакта) тел из одинаковых материалов¹. Во-вторых, условия трения Кулона в перемещениях (1.3) следуют из имеющих ясный физический смысл условий в скоростях также только в частных случаях [4, 5], например при пропорциональном возрастании всех воздействий (простое нагружение).

Введем множество кинематически возможных перемещений V и функционал $J(\mathbf{u})$ ($W_2^1(\Omega)$ — пространство Соболева):

$$V = \{\mathbf{u} | u_i \in W_2^1(\Omega), i = 1, 2; \mathbf{u} = \mathbf{U} \text{ на } S_u\} \quad (1.4)$$

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) + j(\mathbf{u})$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) d\Omega \quad (1.5)$$

¹ См. также: Гольдштейн Р. В., Зазовский А. Ф., Спектор А. А., Федоренко Р. П. Решение пространственных контактных задач качения с проскальзыванием и сцеплением вариационным методом. — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1979, № 134. 67 с.

$$L(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} (\mathbf{Q}, \mathbf{u}) d\Omega + \int_{S_f} (\mathbf{F}, \mathbf{u}) dS + \int_{S_c} F_n u_n dS \quad (1.6)$$

$$j(\mathbf{u}) = \int_{S_c} g |u_\tau| dS \quad (1.7)$$

где $\sigma_{ij}(\mathbf{u})$ и $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций, линейно-зависящие от $\mathbf{u}$; по повторяющимся индексам производится суммирование.

В [1] показано, что задача упругости с условиями (1.1) — (1.3) эквивалентна следующей задаче минимизации:

$$J(\mathbf{u}) \rightarrow \inf (\mathbf{u} \in V) \quad (1.8)$$

Будем считать, что участок границы S_u невырожден и тензор констант упругости положительно определен. Тогда квадратичная форма (1.5) на V — строго выпуклая, решение задачи (1.8) существует и единственно.

Методы минимизации функционалов типа (1.4) рассматривались в [2, 6]. Специфика задачи состоит в том, что член (1.7) недифференцируем, и поэтому непригодны различные варианты градиентных методов, используемые при минимизации гладких функционалов. Ниже будет получена эквивалентная задача минимизации дифференцируемого функционала.

Введем на S_c непрерывную функцию w и примем обозначения

$$J_1(\mathbf{u}, w) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) + \int_{S_c} g w dS \quad (1.9)$$

$$V_1 = \{[\mathbf{u}, w] | \mathbf{u} \in V; w \in C(S_c), w = |u_\tau| \text{ на } S_c\}$$

где пара $[\mathbf{u}, w]$ — элемент множества, на котором определен функционал (1.9), $C(S_c)$ — пространство непрерывных на S_c функций. Очевидно, задача

$$J_1(\mathbf{u}, w) \rightarrow \inf ([\mathbf{u}, w] \in V_1) \quad (1.10)$$

эквивалентна (1.8), причем $J_1(\mathbf{u}, w) = J(\mathbf{u})$ при $[\mathbf{u}, w] \in V_1$.

Введем множество V_2 вида $V_2 = \{[\mathbf{u}, w] | \mathbf{u} \in V; w \in C(S_c), w \pm u_\tau \geq 0 \text{ на } S_c\}$.

Множество V_1 является подмножеством V_2 , условия

$$w \pm u_\tau \geq 0 \quad (1.11)$$

выделяют на плоскости w, u_τ конус с границей $w = |u_\tau|$.

Рассмотрим задачу

$$J_1(\mathbf{u}, w) \rightarrow \inf ([\mathbf{u}, w] \in V_2) \quad (1.12)$$

Отметим звездочкой некоторый элемент множества V_2 , $[\mathbf{u}^*, w^*] \in V_2$, обозначим $w^\circ = |u_\tau^*|$ и вычислим

$$J_1(\mathbf{u}^*, w^*) = J_1(\mathbf{u}^*, w^\circ) + \int_{S_c} g \Delta w dS \quad (1.13)$$

где $\Delta w = w^* - w^\circ \geq 0$ вследствие (1.11), а $[\mathbf{u}^*, w^\circ] \in V_1$. Так как $g > 0$, то из (1.13) следует

$$J_1(\mathbf{u}^*, w^*) \geq J_1(\mathbf{u}^*, w^\circ), \quad J_1(\mathbf{u}^*, w^*) > J_1(\mathbf{u}^*, w^\circ) \text{ при } w^* \neq w^\circ \quad (1.14)$$

Условие (1.14) означает, что точка минимума J_1 на V_2 не может находиться вне V_1 и, таким образом, (1.12) и (1.10) эквивалентны. Выполняются соотношения: $J_1(\mathbf{u}, w) \geq J(\mathbf{u})$ при $[\mathbf{u}, w] \in V_2$, $J_1(\mathbf{u}, w) > J(\mathbf{u})$ при $[\mathbf{u}, w] \in V_2 \setminus V_1$:

$$\inf_{[\mathbf{u}, w] \in V_2} J_1(\mathbf{u}, w) = \inf_{\mathbf{u} \in V} J(\mathbf{u})$$

Функционал (1.9) — гладкий, выпуклый (по u — строго выпуклый, по w — линейный), множество V_2 — выпуклое. Для решения задачи (1.12) можно использовать различные методы минимизации функционалов с ограничениями [6].

Отметим, что переход от задачи (1.8) к (1.12) можно осуществить и в том случае, если вместо (1.1) на S_c действует условие в перемещениях $u_n = U_n$ или группа условий, описывающих идеальные односторонние связи

$$u_n \leq \delta_n, \quad \sigma_n \leq F_n, \quad (u_n - \delta_n)(\sigma_n - F_n) = 0 \quad (1.15)$$

При этом изменяются только нагрузочный член функционала (1.6) и множество V , а все рассуждения остаются прежними. Простой физический смысл условий (1.1)–(1.3) при замене (1.1) на $u_n = U_n$ или (1.15) утрачивается вследствие нарушения соотношения $g = -f\sigma_n$, тем не менее такие постановки могут оказаться полезными. Например, в [7] задачи с условиями типа (1.15), (1.2) и (1.3) используются в качестве вспомогательных для решения более сложных задач.

2. Считаем, что напряжения трения σ_τ на S_c развиваются вследствие взаимодействия тела с некоторым упором, свойства которого рассматриваются ниже. Поверхность этого упора, в отличие от поверхности тела S_c^+ , обозначим S_c^- и все величины, относящиеся к S_c^- , пометим индексом $-$. Величины на S_c^+ оставим без дополнительного индекса, через S_c обозначим совокупность S_c^+ и S_c^- . Геометрически S_c , S_c^+ и S_c^- совпадают.

Нормаль и касательная на S_c^- считаются совпадающими с n и τ на S_c^+ , проекции вектора u^- перемещений точек S_c^- на n и τ равны соответственно $u_n^- = (u^-, n)$, $u_\tau^- = (u^-, \tau)$.

Введем на S_c единичные орты $n_1 = (n + \tau)/\sqrt{2}$, $n_2 = (n - \tau)/\sqrt{2}$. Проекция u и u^- на n_1 и n_2 вычисляются следующим образом:

$$u_{n1} = (u_n + u_\tau)/\sqrt{2}, \quad u_{n1}^- = (u_n^- + u_\tau^-)/\sqrt{2} \quad (2.1)$$

$$u_{n2} = (u_n - u_\tau)/\sqrt{2}, \quad u_{n2}^- = (u_n^- - u_\tau^-)/\sqrt{2}$$

Пусть на S_c действуют идеальные односторонние связи с кинематическими условиями

$$u_{n1} - u_{n1}^- \leq 0, \quad u_{n2} - u_{n2}^- \leq 0 \quad (2.2)$$

которые выполняются в каждой точке S_c одновременно. Задачи упругости с такими связями рассмотрены в [5].

Положим $u_\tau^- = 0$, и из (2.1) и (2.2) получим

$$(u_n^- - u_n) \pm u_\tau \geq 0 \quad (2.3)$$

Сравнивая (2.3) с (1.11), заключим, что $w = u_n^- - u_n$. С учетом этого запишем функционал (1.9):

$$J_2(u, u^-) = \frac{1}{2} a(u, u) - L(u) - \int_{S_c^+} g u_n dS - \int_{S_c^-} (-g) u_n^- dS \quad (2.4)$$

где g и $(-g)$ в последних двух членах имеют смысл заданных нормальных поверхностных напряжений на S_c^+ и S_c^- . Введем множество $V_3 = \{[u, u^-] | u \in V; u_{n1} \leq u_{n1}^-, u_{n2} \leq u_{n2}^-, u_\tau^- = 0 \text{ на } S_c\}$ и запишем задачу (1.12) в следующей эквивалентной форме:

$$J_2(u, u^-) \rightarrow \inf \quad ([u, u^-] \in V_3) \quad (2.5)$$

Можно получить на S_c^+ естественные граничные условия задачи (2.5), совпадающие с (1.1)–(1.3). Подобный способ представления граничных

условий с трением при помощи идеальных односторонних связей использовался в [5].

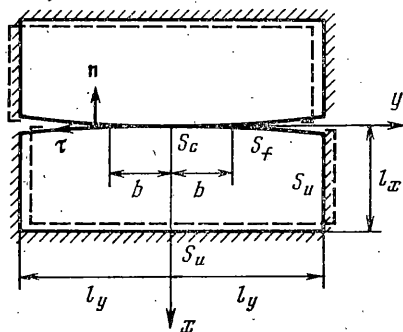
3. Для примера рассмотрим следующую задачу. Пусть тело занимает прямоугольную область $0 \leq x \leq l_x$, $-l_y \leq y \leq l_y$ и состоит из однородного материала с модулем упругости $E=1000$ и коэффициентом Пуассона $\nu=0,2$, пусть также $Q=0$, $l_y/l_x=1,5$. Граница S_u содержит сторону $x=l_x$ и $y=\pm l_y$; $S_f-x=0$ при $|y|>b$; $S_c-x=0$ при $|y|\leq b$, принято $l_y/b=2,4$, $b=15$.

На S_u задано $U_x=0$, $U_y=\text{const}$, на $S_f-F=0$, а на $S_c-F_n=0$ и $g=c(b^2-y^2)^{1/2}$.

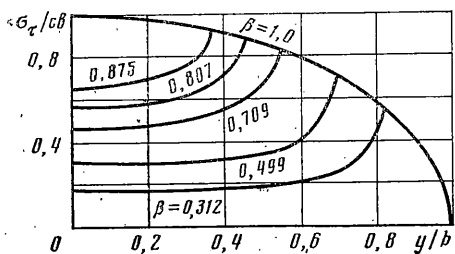
Можно показать, что к такой задаче сводится определение контактных напряжений σ_τ при сжатии со сдвигом двух одинаковых упругих тел, представленных на фиг. 1. Нормальные контактные напряжения σ_n определяются предварительно решением контактной задачи без трения. Аналогичный способ ранее применялся в [3].

Для определения σ_n использовалось аналитическое решение [8], справедливое, если участок контакта достаточно мал по сравнению с размерами тел. При зазоре между поверхностями $\delta_n=\alpha y^2$ получим $\sigma_n=-2P(b^2-y^2)^{1/2}/(\pi b^2)$, где при $\nu=0,2$ суммарная сила сжатия $P=0,8182 \alpha E b^2$. Таким образом $c=2Pf/(\pi b^2)=0,5192 \alpha E f$.

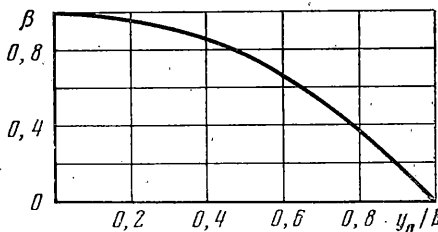
Задача решалась в постановке (2.5) методом конечных элементов по программе [9], при различных значениях $U_y>0$. Соответственно получа-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

лись различные графики σ_τ и значения суммарной сдвигающей силы $T=\int \sigma_\tau dy$ ($-b \leq y \leq b$).

Расчету подвергалась половина области $y \geq 0$, кинематические граничные условия на оси симметрии $y=0$ имели вид $u_x=0$. Сетка состояла из 952 треугольных элементов со сгущением вблизи S_c , на S_c приходилось 15 элементов. Общее число узлов (с учетом S_c) равнялось 538.

На фиг. 2 в безразмерных координатах представлены графики σ_τ на S_c , $\beta=T/(fP)$. График $\beta=1$ соответствует предельным напряжениям трения g . В область $y<0$ графики продолжают симметрично.

Координаты y_0 границы участка проскальзывания уточнялись совместным анализом σ_τ и u_τ , зависимость y_0 от β представлена на фиг 3. В зоне $|y|<y_0$ трение допредельное, $u_\tau=0$; при $|y|>y_0$ происходит проскальзывание поверхностей, $u_\tau<0$, $\sigma_\tau=g$. Следует отметить пики σ_τ в точках $y=y_0$.

Можно проверить, что графики на фиг. 2 и 3 остаются справедливыми при произвольных значениях α , E , f , P и b , удовлетворяющих двум равенствам для c . Естественно, параметр α должен быть достаточно малым, чтобы форма тел была близка к прямоугольной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. Кравчук А. С. Метод двойственности в задаче теории упругости с условием типа трения на границе.— Напряженно-деформированное состояние конструкций из упругих и вязкоупругих материалов: Сб. статей. Свердловск, УНЦ АН СССР, 1977, с. 31—40.
3. Спектор А. А. Вариационный метод исследования контактных задач с проскальзыванием и сцеплением.— Докл. АН СССР, 1977, т. 236, № 1, с. 39—42.
4. Кравчук А. С. К постановке краевых задач теории упругости с трением на границе.— Механика деформируемого твердого тела: Сб. статей. Куйбышев: Изд-е Куйбышев. ун-та, 1976, вып. 2, с. 102—105.
5. Вовкушевский А. В., Шойхет Б. А. Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов. М.: Энергоиздат, 1981. 136 с.
6. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
7. Кравчук А. С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 122—129.
8. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
9. Вовкушевский А. В., Зейлигер В. А. Программа решения задачи упругости с односторонними связями и уравнения Пуассона методом конечных элементов для ЭВМ БЭСМ-6 (шифр ТУОС). Л.: Изд-е Всес. н.-и. ин-та гидротехн., 1980. 127 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
3.XII.1982