МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1984

УДК 539.385

ОБ ОДНОЙ ЧАСТНОЙ ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ

ШЕРМАН Д. И.

В работе Н. Х. Арутюняна [1], посвященной кручению бруса частной конфигурации, задача была приведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Детально проведенное им изучение системы позволило установить ее вполне-регулярность и тем самым применимость в принципе для ее эффективного разрешения метода последовательных приближений.

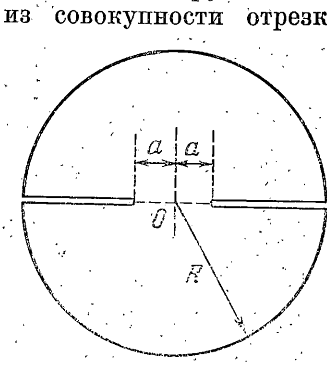
Ниже дается решение другой задачи кручения круглого бруса, ослабленного двумя прямолинейными продольными разрезами. В этом случае задача также приводится к решению вполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

1. Допустим, что действию крутящего момента подвержен круглый брус, симметрично ослабленный двумя продольными разрезами, геометрически примыкающими к одной и той же плоскости; при этом поперечное сечение S бруса имеет форму круга радиуса R с прямолинейными разрезами, берущими начало в концах одного и того же диаметра и проникающими вдоль него на некоторую глубину $R-a$, где $a<R$ (фигура). Краевые условия задачи будут таковы:

$$\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}=0 \text{ на } \gamma_1,\ \gamma_2 \tag{1.1}$$

$$\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}=t^2-R^2 \text{ на } \gamma^* \tag{1.2}$$

Здесь $\varphi(z)$ — искомая функция, регулярная в области сечения S, γ_1 и γ_2 — верхняя и нижняя полуокружности, составляющие окружность γ, γ^* — прямолинейный участок, образованный из совокупности отрезков $(-R, -a)$ и (a, R), каждый из которых (в качестве отдельного звена полного контура) проходится дважды во взаимно противоположных направлениях.



Приступая к изучению сформулированной задачи, введем дополнительно обозначение $\nu(t)$ для неизвестной удвоенной вещественной части функции $\varphi(z)$ на отрезке $(-a, a)$ и положим

$$g(t)=t^2-R^2 \text{ на } \gamma^*,\quad g(t)=\nu(t)=\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}\quad (-a<t<a) \tag{1.3}$$

При этом выражение для $\varphi(z)$ в верхнем полукруге зададим (что правомерно) формулой

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} g(t)\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1}{t-R^2/z}\right)dt+2iC_1 \tag{1.4}$$

где C_1 — вещественная постоянная, а γ_0 — диаметр, направленный вдоль вещественной оси. В нижнем полукруге, сохраняя взятое направление обхода γ_0 (совпадающее с направлением оси абсцисс), примем

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0} g(t)\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1}{t-R^2/z}\right)dt+2iC_2 \qquad (1.5)$$

причем C_2 — вообще говоря, иная вещественная постоянная.

Примечание. Функцию $\varphi(z)$, регулярную, например, в верхнем полукруге, ограниченном диаметром γ_0 и полуокружностью γ_1, нетрудно воспроизвести в подходящей форме по какому-либо из известных или подчас заново принимаемых к рассмотрению некоторых корректных краевых условий (включающих и те, что встречаются в тексте):

$$\varkappa_0\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}=\varkappa_0 f_0(t) \text{ на } \gamma_0,\ \beta=|(\varkappa_1-\varkappa_0)/2|$$

$$\varkappa_1\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}=\varkappa_1 f_1(t) \text{ на } \gamma_1,\ \varepsilon=(1+\operatorname{sgn}\varkappa_0)/2 \text{ при } \varkappa_0=\varkappa_1$$

Здесь $f_0(t)$ и $f_1(t)$ – задаваемые (непрерывные по Гельдеру) функции; каждый из параметров $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ может принимать (независимо от другого) значения ± 1. Как видно, величина β (соответственно, ε) равна единице для различных по знаку (одновременно положительных) $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ и обращается в нуль для одинаковых по знаку (одновременно отрицательных) значений тех же параметров. Отвечающий этим условиям общий вид функций $\varphi(z)$ будет таков:

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k} f_k(t)\left[\frac{1}{t-z}+(-1)^{\beta}\frac{1}{t-R^2/z}\right]dt+$$
$$+(1-\beta)\left[-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{f_1(t)}{t}dt+i^{\varepsilon}C_0\right]$$

где C_0 – вещественная постоянная; содержащее ее (равно как и ε) последнее слагаемое выпадает при $\beta=1$. Выбором же $\beta=0$ либо можно распоряжаться по усмотрению, либо же он предопределяется дополнительными соображениями, обычно всегда сопутствующими возможным более сложным вопросам, в которых разобранная задача теории потенциала для полукруга служит лишь промежуточным звеном (подобное на самом деле имеет место и в настоящей работе, что становится очевидным при $\varkappa_0=\varkappa_1=1$ и $f_1(t)=0$).

Требование соблюдения обязательного условия непрерывности функции $\varphi(z)$ на отрезке $(-a, a)$ при переходе к его точкам (сверху и снизу отрезка) позволяет (опираясь на два последних равенства) получить для плотности $\nu(t)$ сингулярное интегральное уравнение вида [1]:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\nu(t)\frac{dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\nu(t)\frac{dt}{t-R^2/t_0}=f(t_0)+2iC \quad (-a<t_0<a) \qquad (1.6)$$

где вещественная постоянная $C=C_2-C_1$, а функция $f(t_0)$ известна и определяется выражением

$$f(t_0)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^*} g(t)\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1}{t-R^2/z}\right)dt\Bigg|_{z\to t_0,\operatorname{Im} z>0}-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^*} g(t)\left(\frac{1}{t-z}+\frac{1}{t-R^2/z}\right)dt\Bigg|_{z\to t_0,\ \operatorname{Im} z<0} \qquad (1.7)$$

Как видно, ядро первого интеграла в (1.6) содержит хорошо изученную особенность типа Коши [3].

[1] Мы придем к нему, сопоставив между собой предельные величины (1.4) и (1.5), получаемые при переменном z, устремляющемся сверху и снизу (поочередно со стороны $\operatorname{Im} z>0$ и $\operatorname{Im} z<0$) к переменной t_0 отрезка $(-a, a)$. Заметим, что та же интерпретируемая здесь задача рассматривалась ранее с позиции теории конформных отображений [2].

Стереотипные вычисления приводят к равенству

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*}\frac{t^2-R^2}{t-R^2/t_0}dt=\frac{a(R-a)}{\pi i}\frac{t_0}{a}+$$
$$+\frac{1}{\pi i}(t_0{}^2-R^2)\sum_{n=1}^{\infty}{}^*\frac{1}{n+2}\left(\frac{a}{R}\right)^n\left[1-\left(\frac{a}{R}\right)^{n+2}\right]\left(\frac{t_0}{a}\right)^n \tag{1.8}$$

Заметим, что звездочки, проставляемые у символов сумм, указывают здесь и далее на то, что смежные значения индекса, по которому ведется суммирование, различаются между собой на две единицы. При выводе формулы (1.8) было использовано соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*}\frac{t^2-R^2}{t-R^2/t_0}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*}\frac{t^2-R^4/t_0{}^2}{t-R^2/t_0}dt-\left(R^2-\frac{R^4}{t_0{}^2}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*}\frac{dt}{t-R^2/t_0}$$

и, дополнительно к нему, легко устанавливаемые равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*}\left(t+\frac{R^2}{t_0}\right)dt=\frac{R^2(R-a)}{\pi i t_0},\quad -\left(R^2-\frac{R^4}{t_0{}^2}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*}\frac{dt}{t-R^2/t_0}=$$
$$=\frac{t_0{}^2-R^2}{t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*}\frac{dt}{1-tt_0/R^2}=\frac{(t_0{}^2-R^2)}{2\pi i t_0}\left[2(R-a)+\int_{\gamma^*}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{tt_0}{R^2}\right)^k dt\right]$$

Отсюда не столь уж трудно прийти к выражению (1.8).

Как легко усмотреть, входящий в (1.8) ряд сходится в круге $|z|<R$. Кроме того

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*}\frac{t^2-R^2}{t-z}dt=\frac{a(R-a)}{\pi i}\frac{z}{a}+(z^2-R^2)\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*}\frac{dt}{t-z} \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-z}=\pm\frac{1}{2},\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{a-z}{-a-z} \tag{1.10}$$

Первый из интегралов (1.10) в окрестности удаленной точки вещественной оси вычисляется (при любом z) как главное значение по Коши. Учитывая ту же формулу, найдем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{dt}{t-z}=\pm\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}{}^*\frac{1}{n}\left(\frac{a}{R}\right)^n\left(\frac{z}{a}\right)^n\qquad (|z|<R) \tag{1.11}$$

В этой формуле (как и в предшествующей) знак плюс или минус при первом слагаемом справа берется в зависимости от того, лежит точка z в верхнем или нижнем полукруге; кроме того, следующий вслед за первым членом ряд сходится в круге $|z|<R$ и получается разложением такого же элементарного интеграла, что стоит слева в (1.10), распространенного по полубесконечным лучам $(-\infty, -R)$ и (R, ∞), или (что то же самое) вдоль вещественной оси с выключенным отрезком γ_0 (при сохранении приданного ей направления).

Вычитая почленно из (1.11) соответственные слагаемые второй формулы (1.10), получим для интеграла (1.9) [2]:

[2] Следует учесть соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*}\frac{t^2-R^2}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*}(t+z)\,dt+(z^2-R^2)\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*}\frac{dt}{t-z}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^*}\frac{t^2-R^2}{t-z}\,dt=\frac{a(R-a)}{\pi i}\frac{z}{a}+$$

$$+(z^2-R^2)\left[\pm\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}{}^*\frac{1}{n}\left(\frac{a}{R}\right)^n\left(\frac{z}{a}\right)^n-\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{a-z}{-a-z}\right] \tag{1.12}$$

где (как и в (1.10)) выбирается ветвь логарифма с аргументом, равным πi на верхнем берегу разреза, проведенного вдоль отрезка $(-a, a)$.

На основании (1.8) и (1.9) из равенства (1.7) находим (при этом надо не упускать из внимания приращение, испытываемое логарифмическим членом при переходе с верхнего на нижний берег разреза $(-a, a)$) [3]:

$$f(t_0)=-\frac{4a(R-a)}{\pi i}\frac{t_0}{a}+\frac{(t_0{}^2-R^2)}{\pi i}\left[\sum_{n=1}^{\infty}{}^*\sigma_n\left(\frac{t_0}{a}\right)^n-\pi i+\ln\frac{a-t_0}{-a-t_0}\right] \tag{1.13}$$

$$\sigma_n=\frac{2}{n+2}\left[\frac{2}{n}+\left(\frac{a}{R}\right)^{n+2}\right]\left(\frac{a}{R}\right)^n \tag{1.14}$$

Введем зависящие от $\nu(t)$ функционалы

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi i a^k}\int\limits_{-a}^{a}\nu(t)\,t^{k-1}\,dt\qquad (k=1, 2,\ldots),\quad \lambda=\left(\frac{a}{R}\right)^2 \tag{1.15}$$

При помощи их интегральное уравнение (1.6) преобразуется к форме

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\nu(t)}{t-t_0}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\lambda^n\left(\frac{t_0}{a}\right)^n+f(t_0)+2iC \tag{1.16}$$

Обратив это уравнение и введя обозначение $\zeta(t)=\sqrt{a^2-t^2}$, будем иметь

$$\nu(t_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n\lambda^n}{\zeta(t_0)\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\zeta(t)}{t-t_0}\left(\frac{t}{a}\right)^n dt+F(t_0) \tag{1.17}$$

причем условимся считать, что содержащийся в этой формуле радикал $\zeta(t)$ принимает положительные значения на верхнем берегу разреза $(-a, a)$. Функция $F(t_0)$ определяется равенством

$$F(t_0)=\frac{1}{\pi i\zeta(t_0)}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\zeta(t)}{t-t_0}[f(t)+2iC]\,dt+\frac{C_0}{\zeta(t_0)} \tag{1.18}$$

или

$$F(t_0)=\frac{1}{\zeta(t_0)}\left[\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-a}^{a}\frac{\zeta(t)f(t)}{t-t_0}\,dt-(2Ct_0-C_0)\right] \tag{1.19}$$

Отметим, что входящие в последнюю формулу постоянные C и C_0 определяются в дальнейшем из условий ограниченности искомой плотности $\nu(t)$ в концевых точках $t=\pm a$.

---

[3] Как видно, функция $f(t_0)$, определяемая равенством (1.13), нечетная от переменного t_0 в интервале $(-a; a)$; это вытекает из таких равенств, следующих одно за другим:

$$-\pi i+\ln\frac{a-t_0}{-a-t_0}=-\pi i+\int\limits_{-a}^{a}\frac{dt}{t-z}=\int\limits_{-a}^{a}\frac{dt}{t-t_0}=-\int\limits_{-a}^{a}\frac{dt}{t+t_0},$$

где $z\to t_0$ из верхней полуплоскости.

Рассмотрим теперь интеграл

$$P(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}\frac{\zeta(t)}{t-z}\left(\frac{t}{a}\right)^n dt \quad (n\geqslant 1) \tag{1.20}$$

Пусть $C(\gamma_a)$ — замкнутый контур, состоящий из отрезка γ_a (соединяющего точки $t=\pm a$), проходимого дважды во взаимно противоположных направлениях, и окружностей сколь угодно малого радиуса с центрами в точках $t=\pm a$. На вещественной оси вне отрезка γ_a (при $|t|>a$) имеем (множитель t перед радикалом регулирует знак выражения):

$$\zeta(t)=-it\sqrt{1-a^2/t^2}=-it\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{1/2}^k\left(\frac{a}{t}\right)^{2k} \tag{1.21}$$

Согласно теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(\gamma_a)}\frac{\zeta(t)}{t-z}\left(\frac{t}{a}\right)^n dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R\to\infty)}\frac{\zeta(t)}{t-z}\left(\frac{t}{a}\right)^n dt=\zeta(z)\left(\frac{z}{a}\right)^n$$

где $C(R\to\infty)$ — окружность сколь угодно большого радиуса (охватывающая контур $C(\gamma_a)$). Легко видеть, что ($\beta={}^1/_2(n+1-k)$):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R\to\infty)}\frac{\zeta(t)}{t-z}\left(\frac{t}{a}\right)^n dt=-ia\sum_{k=0,1}^{n+1}{}^{*}(-1)^{\beta}C_{1/2}^{\beta}\left(\frac{z}{a}\right)^k$$

причем в сумме справа индекс k принимает либо четные, либо нечетные значения, смотря по тому, нечетно или четно n.

Теперь нетрудно выписать значение функции $P(z)$, точнее, определяющего ее интеграла

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}\frac{\zeta(t)}{t-z}\left(\frac{t}{a}\right)^n dt=\zeta(z)\left(\frac{z}{a}\right)^n+ia\sum_{k=0,1}^{n+1}{}^{*}(-1)^{\beta}C_{1/2}^{\beta}\left(\frac{z}{a}\right)^k$$

и затем связанного с ним интеграла (в смысле главного значения по Коши):

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\zeta(t)}{t-t}\left(\frac{t}{a}\right)^n dt=ia\sum_{k=0,1}^{n+1}{}^{*}(-1)^{\beta}C_{1/2}^{\beta}\left(\frac{t_0}{a}\right)^k \tag{1.22}$$

Приведем еще используемые ниже равенства

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\zeta(t)}\left(\frac{t}{a}\right)^n\frac{dt}{t-t_0}=-\frac{i}{a}\sum_{k=0,1}^{n-1}{}^{*}(-1)^{(\beta-1)}C_{-1/2}^{(\beta-1)}\left(\frac{t_0}{a}\right)^k \tag{1.23}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\zeta(t)}\left(\frac{t}{a}\right)^n\frac{dt}{t-R^2/z}=\frac{i}{a}\left(\frac{R}{a}\right)^{n-1}\left(\frac{R}{z}\right)^{n-1}\left[\left(1-\left(\frac{a}{R}\right)^2\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-1/2}-\right. \tag{1.24}$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{E(n-1)}{}^{*}(-1)^{k/2}C_{-1/2}^{k/2}\left(\frac{R}{a}\right)^{-k}\left(\frac{R}{z}\right)^{-k}\right],\quad E(n-1)=n-1-\varepsilon(n)\quad (\varepsilon=0,1)$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\zeta(t)(t^2-R^2)\left(\frac{t}{a}\right)^n\frac{dt}{t-t_0}=ia(t_0^2-R^2)\sum_{k=0,1}^{n+1}{}^{*}(-1)^{\beta}C_{1/2}^{\beta}\left(\frac{t_0}{a}\right)^k+$$

$$+ia^3(-1]^{\varkappa}C_{1/2}{}^{\varkappa}\left(\frac{t_0}{a}\right)^{\varepsilon(n)}, \quad \varkappa=\frac{n+3-\varepsilon(n)}{2} \tag{1.25}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\zeta(t)\ln\frac{a-t}{-a-t}(t^2-R^2)\frac{dt}{t-t_0}=$$

$$=\pi i\left[(t_0{}^2-R^2)\left(\zeta(t_0)+it_0-\frac{2a}{\pi}\right)-i\frac{a^2}{2}\left(t_0+i\frac{2}{3}\frac{a}{\pi}\right)\right] \tag{1.26}$$

В формуле (1.25) $\varepsilon(n)$ нужно считать равным нулю для нечетного n и единице для четного n. В силу формулы (1.22) уравнение (1.17) примет вид

$$\nu(t_0)=ia\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\lambda^n[\zeta(t_0)]^{-1}\sum_{k=0,1}^{n+1}{}^{*}(-1)^{\beta}C_{1/2}{}^{\beta}\left(\frac{t_0}{a}\right)^k+F(t_0) \tag{1.27}$$

где $F(t_0)$ определяется формулой (1.19).

2. В дальнейшем понадобится известное и в достаточной мере очевидное соотношение

$$\sum_{k=0,1}^{n+1}{}^{*}(-1)^{\beta}C_{1/2}{}^{\beta}=(-1)^{l}C_{-1/2}{}^{l} \tag{2.1}$$

при целом l, принимающем значения $(n+1)/2$ или $n/2$.

Положив в формуле (1.20) переменную $z=a$ и подсчитав находящийся в ее левой части интеграл, получим еще такое (подобное предшествующему) соотношение

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{2\beta}C_{-1/2}^{2\beta}C_{1/2}{}^{k}=(-1)^{l}C_{-1/2}^{l} \tag{2.2}$$

Для того чтобы прийти к бесконечной системе линейных уравнений для неизвестных α_n, умножим обе части уравнения (1.27) на выражение $(\pi i a^m)^{-1}t_0{}^{m-1}dt_0$, где m — некоторое целое положительное число, и проинтегрируем их по отрезку γ_a. Тогда, имея в виду, что интеграл

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{t^{2\omega}}{\zeta(t)}dt=-i(-1)^{\omega}C_{-1/2}{}^{\omega}a^{2\omega}, \quad \omega=\frac{m+n-1}{2} \tag{2.3}$$

если m и n различной четности, и равен нулю, если m и n одинаковой четности, получим следующую систему уравнений:

$$\alpha_m=\sum_{n=1,2}^{\infty}{}^{*}C_{m,n}\lambda^n\alpha_n+f_m \quad (m=1,2,\ldots) \tag{2.4}$$

$$C_{m,n}=\sum_{k=0,1}^{n+1}{}^{*}(-1)^{\beta}C_{1/2}{}^{\beta}(-1)^{\mu}C_{-1/2}{}^{\mu}, \quad \mu=\frac{m+k-1}{2} \tag{2.5}$$

где n пробегает целые значения одной и той же четности с m, f_m — некоторые величины, содержащие постоянные C_0 и C. Ясно, что система (2.4) распадается на две (одновременно) для четных и нечетных значений индексов m и n.

Формула (2.5) намного проще формулы для коэффициентов соответствующей системы, которая может быть непосредственно формально получена из (1.17) на основе формулы (1.15); она проще еще и потому, что состоит уже из конечной суммы слагаемых, каждое из которых является произведением двух табулируемых величин. Таким образом, коэффициенты системы (2.4), вообще говоря, сравнительно нетрудно подсчитать с желаемой точностью; тем не менее, с увеличением числа уравнений, удерживаемых в системе (2.4), подсчет тех же величин (2.5) все же постепенно осложняется. Однако представляется возможным существенно облегчить счет этих коэффициентов, упростив их выражения. Действительно, полагая индекс $n=1, 3, 5, \ldots$ при любом (фиксированном) нечетном m и потом $n=2, 4, 6, \ldots$ при четном m и раскрывая далее выражения для $C_{m,n}$ путем метода полной индукции, придем к заключению, что

$$C_{m,n}=\frac{m-1}{m+n}(-1)^{(n+1)/2}C_{-1/2}^{(n+1)/2}(-1)^{(m-1)/2}C_{-1/2}^{(m-1)/2} \tag{2.6}$$

для (одновременно) нечетных m и n и

$$C_{m,n}=\frac{m}{m+n}(-1)^{n/2}C_{-1/2}^{n/2}(-1)^{m/2}C_{-1/2}^{m/2} \tag{2.7}$$

для четных m и n. Для определенности акцентируем внимание на выводе первой из этих формул.

Посредством простых выкладок без затруднений находим

$$C_{m,1}=\frac{m-1}{m+1}(-1)^{1}C_{-1/2}^{1}(-1)^{(m-1)/2}C_{-1/2}^{(m-1)/2}$$

$$C_{m,3}=\frac{m-1}{m+3}(-1)^{2}C_{-1/2}^{2}(-1)^{(m-1)/2}C_{-1/2}^{(m-1)/2}$$

Примем условно, что (для всякого m) справедливо соотношение ($n\geqslant3$):

$$C_{m,n-2}=\frac{m-1}{m+n-2}(-1)^{(n-1)/2}C_{-1/2}^{(n-1)/2}(-1)^{(m-1)/2}C_{-1/2}^{(m-1)/2}$$

и заменим в (2.5) индекс суммирования k на k_1+2 (опустив потом нижний индекс у k_1). Тогда получим $C_{m,n}=C_{m+2,n-2}+(-1)^{(n+1)/2}C_{1/2}^{(n+1)/2}\times$ $\times(-1)^{(m-1)/2}C_{-1/2}^{(m-1)/2}$ или же (в согласии с предпоследней формулой):

$$C_{m,n}=\frac{m+1}{m+n}(-1)^{(n-1)/2}C_{-1/2}^{(n-1)/2}(-1)^{(m+1)/2}C_{-1/2}^{(m+1)/2}+$$

$$+(-1)^{(n+1)/2}C_{1/2}^{(n+1)/2}(-1)^{(m-1)/2}C_{-1/2}^{(m-1)/2}$$

Учитывая затем соотношения

$$(-1)^{k}C_{-1/2}^{k}=\frac{2k-1}{2k}(-1)^{k-1}C_{-1/2}^{k-1},\quad (-1)^{(k+1)/2}C_{1/2}^{(k+1)/2}=-\frac{1}{k}(-1)^{(k+1)/2}C_{-1/2}^{(k+1)/2}$$

и выполнив само собой напрашивающиеся преобразования, придем к формуле (2.6). Совершенно так же можно убедиться в корректности формулы (2.7), предлагаемой для индексов m и n иной четности.

3. Величины $C_{m,n}$, как видно из (2.6) и (2.7), положительны для всякого целого m, превосходящего единицу ($C_{1,n}=0$). Это обстоятельство несколько облегчает точный подсчет (по индексу n) суммы коэффициентов $\lambda^n C_{m,n}$ любого (отвечающего выбранному четному номеру m) уравнения системы (2.4). Это удается сделать посредством специального, достаточно подробно ниже излагаемого приема. Обозначим указанную сумму через $C_m(\lambda)$:

$$C_m(\lambda)=\sum_{n=2}^{\infty}{}^{*}\lambda^n C_{m,n} \qquad (m=2,4,\ldots) \tag{3.1}$$

Положив под знаком суммы в (1.16) (распространенной по четным n) величину $\alpha_n=1$ и вновь проделав те же выкладки, что и выше, очевидно, придем к выражению (2.4) с суммарным первым членом, в точности совпадающим с (3.1). Однако можно поступить и по-иному, слегка видоизменив прием в начальной стадии, точнее говоря, учтя, до того как приступить к последующим операциям, что первое слагаемое справа в (1.16) (при тех же $\alpha_n=1$) представимо в следующей элементарной замкнутой форме:

$$\theta(t_0)=\sum_{n=2}^{\infty}{}^{*}\lambda^n\left(\frac{t_0}{a}\right)^n=-1-\frac{a}{2\lambda}\left[\frac{1}{t_0-a/\lambda}-\frac{1}{t_0+a/\lambda}\right]\quad(\lambda<1)\qquad(3.2)$$

Функция справа, рассматриваемая от переменного z, имеет полюсы первого порядка $t=\pm a/\lambda$, расположенные на вещественной оси вне разреза $(-a, a)$. Составим интеграл типа Коши с плотностью $\zeta(t)$, взятый по замкнутому контуру, образованному (при надлежащем обходе) из дважды проходимого (во взаимно противоположных направлениях) отрезка $(-a, a)$ и окружностей исчезающе малого радиуса, охватывающих раздельно точки $t=\pm a$ и, наряду с ними, $t=\pm a/\lambda$ при наличии извне ограничивающей область окружности сколь угодно возрастающего радиуса. Тогда, помня определение радикала (1.20), выпишем формулы, полученные применительно к каждому из слагаемых, содержащихся справа в (3.2):

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\zeta(t)}{t-t_0}dt=it_0,\quad \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\zeta(t)}{t-t_0}\frac{dt}{t\mp a/\lambda}=i\pm i\frac{a}{\lambda}\frac{\mu_0}{t_0\mp a/\lambda}\qquad(3.3)$$

где $\mu_0=\sqrt{1-\lambda^2}$. Воспроизведем вкратце вывод второго из этих равенств (весьма важного для последующего). Согласно формуле Коши, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(\gamma_a)}\frac{\zeta(t)}{t\mp a/\lambda}\frac{dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{C(\pm a/\lambda)}\frac{\zeta(t)}{t\mp a/\lambda}\frac{dt}{t-z}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R\to\infty)}\frac{\zeta(t)}{t\mp a/\lambda}\frac{dt}{t-z}=\frac{\zeta(z)}{z\mp a/\lambda}$$

где $\zeta(t)=\sqrt{a^2-t^2}$, $C(\gamma_a)$ — замкнутый контур, состоящий из двух прямолинейных отрезков $(-a, a)$ с противоположными направлениями обхода, $C(\pm a/\lambda)$ — окружности исчезающе малого радиуса ρ с центрами в точках $t=\pm a/\lambda$, $C(R\to\infty)$ — окружность неограниченно возрастающего радиуса R с центром в начале координат, охватывающая указанные внутренние границы. Приняв во внимание, что при $|t|>a$ справедливы разложения

$$\zeta(t)=-it+\frac{i}{2}\frac{a^2}{t}+\ldots,\quad \frac{\zeta(t)}{t\mp a/\lambda}=-i\mp i\frac{a/\lambda}{t\mp a/\lambda}+\frac{i}{2}\frac{a^2}{t(t\mp a/\lambda)}+\ldots$$

приходим к соотношениям

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R\to\infty)}\frac{\zeta(t)}{t\mp a/\lambda}\frac{dt}{t-z}=-i,\quad \frac{1}{(t\mp a/\lambda)(t-z)}=\frac{1}{z\mp a/\lambda}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t\mp a/\lambda}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho(\pm a/\lambda)}\frac{\zeta(t)}{t-z}dt=0,\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho(\pm a/\lambda)}\frac{\zeta(t)}{t\mp a/\lambda}dt=\mp i\frac{a\mu_0}{\lambda}$$

В результате находим (в согласии с формулой Коши):

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}\frac{\zeta(t)}{t\mp a/\lambda}\frac{dt}{t-z}=i+\frac{\zeta(z)\pm ia\lambda^{-1}\mu_0}{z\mp a/\lambda}$$

Устремляя теперь $z \to t_0$ на отрезок γ_a сверху, получаем (используемое ниже) равенство

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\zeta(t)}{t \mp a/\lambda}\frac{dt}{t-t_0}=i\left(1\pm\frac{a}{\lambda}\frac{\mu_0}{t_0\mp a/\lambda}\right)$$

В добавление к предыдущим рассмотрим парный интеграл

$$\Lambda(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\zeta(t_0)}{t_0-z}dt_0\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\zeta(t)}\frac{f_0(t)-f_0(t_0)}{t-t_0}dt$$

или равный ему (но несколько упрощенный):

$$\Lambda(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\zeta(t_0)}{t_0-z}dt_0\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\zeta(t)}\frac{f_0(t)}{t-t_0}dt$$

Изменив здесь порядок интегрирования (что возможно), получим

$$\Lambda(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{f_0(t)}{\zeta(t)}dt\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\zeta(t_0)}{(t_0-z)(t_0-t)}dt_0$$

Нетрудно усмотреть, что $\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\zeta(t_0)}{(t_0-z)(t_0-t)}dt_0=i-\frac{\zeta(z)}{t-z}$, так что значение требуемого парного интеграла

$$\Lambda(z)=\frac{\zeta(z)}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{f_0(t)}{\zeta(t)}\frac{dt}{t-z} \tag{3.4}$$

Отсюда, устремляя $z \to t_0$ на отрезок $(-a, a)$, будем иметь

$$\Lambda(z)_{z\to t_0}=\Lambda(t_0)=f_0(t_0)+\frac{\zeta(t_0)}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{f_0(t)-f_0(t_0)}{t-t_0}\frac{dt}{\zeta(t)}$$

Ниже понадобится также учесть значение интеграла (при четном n):

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\zeta(t)}\left[\left(\frac{t}{a}\right)^{n+1}-\frac{t}{a}\right]\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{\zeta(z)}\left[\left(\frac{z}{a}\right)^{n+1}-\frac{z}{a}\right]-$$
$$-\frac{i}{a}\left[\sum_{k=0}^{n}{}^{*}(-1)^{(n-k)/2}C_{-1/2}^{(n-k)/2}\left(\frac{z}{a}\right)^{k}-1\right] \tag{3.5}$$

и, кроме того, вытекающего из него (при переходе к пределу при $z \to t_0$ на $(-a, a)$) интеграла в смысле главного значения по Коши

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\zeta(t)}\left[\left(\frac{t}{a}\right)^{n+1}-\frac{t}{a}\right]\frac{dt}{t-t_0}=$$
$$=-\frac{i}{a}\left[\sum_{k=0}^{n}{}^{*}(-1)^{(n-k)/2}C_{-1/2}^{(n-k)/2}\left(\frac{t_0}{a}\right)^{k}-1\right] \tag{3.6}$$

В частности, при помощи полученных выражений (и учитывая (3.2)) приходим к равенству

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}\frac{\zeta(t)}{t-t}\theta(t)dt=\Omega(t_0) \tag{3.7}$$

где функция справа задается сперва в форме выражения

$$\Omega(t_0)=-it_0-i\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2\sqrt{1-\lambda^2}\left[\frac{1}{t_0-a/\lambda}+\frac{1}{t_0+a/\lambda}\right] \tag{3.8}$$

а затем в форме разложения $\Omega(t_0)=-it_0+2i\frac{a}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2}\sum_{k=1}^{\infty}{}^{*}\lambda^k\left(\frac{t_0}{a}\right)^k$

причем индекс суммирования в нем принимает нечетные значения.

Заключительная операция, которая должна привести к намеченной цели, такова:

$$C_m(\lambda)=\frac{1}{\pi i a^m}\int_{-a}^{a}\frac{t^{m-1}}{\zeta(t)}\Omega(t)\,dt \tag{3.9}$$

Используя формулу (2.3), придем к явному и удобному выражению для интересующей нас величины $C_m(\lambda)$:

$$C_m(\lambda)=\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}{}^{*}\lambda^k(-1)^{\mu}C_{-1/2}^{\mu}-(-1)^{m/2}C_{-1/2}^{m/2}\quad(m=2,4,\ldots) \tag{3.10}$$

Отсюда после преобразований, не нуждающихся в особых пояснениях, получим (заметив лишь, что поначалу в последнем равенстве следует $k-1$ заменить на $2k_1$, а затем отбросить у k_1 нижний индекс)

$$C_m(\lambda)=\mu_0\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{2k}(-1)^{k+m/2}C_{-1/2}^{k+m/2}-(1-\mu_0)(-1)^{m/2}C_{-1/2}^{m/2}\quad(m=2,4,6,\ldots) \tag{3.11}$$

В свою очередь это равенство, положив $n=k+m/2$ и проделав необходимые вычисления, можно записать и так:

$$C_m(\lambda)=\lambda^{-m}\left[1-\mu_0\sum_{n=0}^{m/2}(-1)^n C_{-1/2}^{n}\lambda^{2n}\right]-(1-\mu_0)(-1)^{m/2}C_{-1/2}^{m/2}\quad(m=2,4,6,\ldots) \tag{3.12}$$

Величина $C_m(\lambda)$ по своему определению является положительной. Путем элементарных рассуждений нетрудно убедиться, что это вытекает также из формулы (3.11). В самом деле, непосредственно можно проверить, что для всякого целого положительного m справедливо неравенство $(-1)^1C_{-1/2}^{1}(-1)^mC_{-1/2}^{m}<(-1)^{m+1}C_{-1/2}^{m+1}$.

Допустим, что при некотором целом положительном k также имеем

$$(-1)^kC_{-1/2}^{k}(-1)^mC_{-1/2}^{m}<(-1)^{m+k}C_{-1/2}^{m+k} \tag{3.13}$$

Тогда последовательно находим

$$(-1)^{k+1}C_{-1/2}^{k+1}(-1)^mC_{-1/2}^{m}=\frac{2k+1}{2k+2}(-1)^kC_{-1/2}^{k}(-1)^mC_{-1/2}^{m}<$$

$$<\frac{2k+1}{2k+2}(-1)^{m+k}C_{-1/2}^{m+k}=\frac{2k+1}{k+1}\,\frac{m+k+1}{2(m+k)+1}(-1)^qC_{-1/2}^{q}=$$

$$=\left[1-\frac{1}{2k+2}\left(1-\frac{2k+1}{2(m+k)+1}\right)\right](-1)^qC_{-1/2}^{q}<(-1)^qC_{-1/2}^{q},\quad q=m+k+1$$

Таким образом, неравенство (3.13) справедливо для любых k и m. Поэтому из (3.11) без труда получаем

$$C_m(\lambda)>\mu_0(-1)^{m/2}C_{-1/2}^{m/2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kC_{-1/2}^{k}\lambda^{2k}-(1-\mu_0)(-1)^{m/2}C_{-1/2}^{m/2}=0$$

т. е. $C_m(\lambda)$ является положительной величиной. Наконец, осуществляемый в (3.12) переход к пределу $\lambda\to1$ $(a\to R)$ непосредственно приводит к важному соотношению

$$C_m(1)=1-(-1)^{m/2}C_{-1/2}^{m/2}<1 \qquad (3.14)$$

справедливому для каждого фиксированного m. Другими словами, для всякого уравнения системы, и только при неограниченно возрастающем номере уравнения, упомянутая сумма коэффициентов стремится к единице. Из изложенного следует, что для значений $\lambda<1$ сумма коэффициентов любого уравнения системы всегда (в согласии с (3.1)) остается меньше единицы; более того, эта сумма, как легко заключить из (3.11), стремится к нулю с возрастанием номера уравнения системы. Сказанное позволяет утверждать, что (как угодно) укороченная система (2.4) является вполне регулярной и, стало быть, разрешима методом последовательных приближений. Из формул (3.12), в частности, находим после элементарных преобразований (при $\lambda\leqslant1$):

$$C_2(\lambda)=\frac{1-\mu_0}{2(1+\mu_0)}<\frac{1}{2},\quad C_4(\lambda)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+\mu_0)^2}+\frac{1}{1+\mu_0}\right]-\frac{3}{8}<\frac{5}{8}$$

Примечание. Для сопоставления остановимся вкратце на случае, когда суммирование в (3.1) ведется по нечетным n (с ним встречаемся, когда свободный член уравнения (1.6) в отличие от разобранного ранее является четной функцией).

Сумма коэффициентов соответствующей бесконечной системы уравнений вычисляется по формуле

$$C_m(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}{}^{*}\lambda^nC_{m,n}\qquad(m=1,3,5,\ldots) \qquad (3.15)$$

где $C_{m,n}$ определяется по формуле (2.5). При этом

$$P(t_0)=\sum_{n=1}^{\infty}{}^{*}\lambda^n\left(\frac{t_0}{a}\right)^n=-\frac{a}{2\lambda}\left[\frac{1}{t_0-a/\lambda}+\frac{1}{t_0+a/\lambda}\right] \qquad (3.16)$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\zeta(t)P(t)}{t-t_0}dt=\Omega(t_0)=-i\frac{a}{\lambda}-\frac{i}{2}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2\mu_0\left[\frac{1}{t_0-a/\lambda}-\frac{1}{t_0+a/\lambda}\right] \qquad (3.17)$$

Как прежде, требуемая величина

$$C_m(\lambda)=\frac{1}{\pi i a^m}\int_{-a}^{a}\Omega(t)\frac{t^{m-1}}{\zeta(t)}dt \qquad (3.18)$$

Для нее после простых выкладок получаем

$$C_m(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\left[\mu_0\sum_{k=0}^{\infty}{}^{*}\lambda^k(-1)^{\mu}C_{-1/2}^{\mu}-(-1)^{(m-1)/2}C_{-1/2}^{(m-1)/2}\right] \qquad (3.19)$$

откуда (из-за (3.13) и независимо от определения величины $C_m(\lambda)$) заключаем, что она положительна при $\lambda\leqslant1$. Для нее находим

$$C_m(\lambda)=\frac{\mu_0}{\lambda_m}\sum_{n=(m-1)/2}^{\infty}(-1)^nC_{-1/2}^{n}\lambda^{2n}-\frac{1}{\lambda}(-1)^{(m-1)/2}C_{-1/2}^{(m-1)/2} \qquad (3.20)$$

Затем, учитывая очевидное соотношение $\sum_{n=(m-1)/2}^{\infty} (-1)^n C_{-1/2}^{n} \lambda^{2n} = \frac{1}{\mu_0} - \sum_{n=0}^{(m-3)/2} (-1)^n C_{-1/2}^{n} \lambda^{2n}$, получаем

$$C_m(\lambda) = \frac{1}{\lambda^m}\left[1-\mu_0 \sum_{n=0}^{(m-3)/2} (-1)^n C_{-1/2}^{n} \lambda^{2n}\right] - \frac{1}{\lambda}(-1)^{(m-1)/2} C_{-1/2}^{(m-1)/2} \quad (m=1,3,\ldots) \tag{3.21}$$

причем сумма, заключенная в квадратных скобках этой формулы, очевидно, выпадает при $m=1$ (вытекающее из нее соотношение $C_1(\lambda)=0$ согласуется с (3.18)). Переход в ней к пределу при $\lambda\to 1$ дает формулу, аналогичную (3.14): $C_m(1) = 1-(-1)^{(m-1)/2} C_{-1/2}^{(m-1)/2} < 1$ $(m=1, 3, \ldots)$

Поскольку постоянные C_0 и C включены в свободные члены системы (2.4), то величины α_n, найденные из нее, будут зависеть от них. Добавочные условия для определения этих постоянных нетрудно выписать из требования ограниченности плотности $\nu(t)$ в концах $t=\pm a$. Приведем (1.27) в более обозримой форме

$$\nu(t_0) = \frac{1}{\zeta(t_0)}\left\{ia \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda^n \sum_{m=0,1}^{n+1}{}^{*} (-1)^p C_{-1/2}^{p} \left(\frac{t_0}{a}\right)^m + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{\zeta(t)}{t-t_0} f_0(t)\,dt - 2Ct_0 + C_0\right\}, \quad p = \frac{n+1-m}{2}$$

и, приравняв выражение в фигурных скобках нулю при $t=\pm a$, найдем[4] следующие соотношения, обеспечивающие конечность плотности в рассматриваемом замкнутом интервале $(-a, a)$:

$$2C_0 = i\sum_{n=2}^{\infty}{}^{*} (-1)^{n/2} C_{-1/2}^{n/2} \alpha_n \lambda^n, \quad \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{f_0(t)}{\zeta(t)}\,dt = 0$$

$$C = -ia \sum_{n=1}^{\infty}{}^{*} (-1)^{(n+1)/2} C_{-1/2}^{(n+1)/2} \alpha_n \lambda_n + \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{t f_0(t)}{\zeta(t)}\,dt, \quad \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{1}{\zeta(t)} \frac{dt}{t-t_0} = 0 \tag{3.22}$$

Внеся сюда зависящие от C_0 и C величины α_n, придем к системе двух уравнений относительно тех же C_0 и C. Подставив далее C_0 и C в первоначальные α_n, найдем в конечном счете итоговые выражения для последних.

То же равенство, предшествующее (3.22), при разбиении суммирования в нем по четным и нечетным значениям индекса преобразуется к виду

$$\nu(t_0) = \frac{1}{\zeta(t)}\left\{ia \sum_{n=1}^{\infty}{}^{*} \alpha_n \lambda^n \sum_{m=0}^{n+1}{}^{*} (-1)^p C_{1/2}^{p} \left[\left(\frac{t_0}{a}\right)^m - 1\right] + \right.$$

$$+ ia \sum_{n=2}^{\infty}{}^{*} \alpha_n \lambda^n \sum_{m=1}^{n+1}{}^{*} (-1)^p C_{1/2}^{p} \left[\left(\frac{t_0}{a}\right)^m - \frac{t_0}{a}\right] +$$

[4] Поскольку функция $f_0(t)$ нечетная в интервале $(-a, a)$, интеграл слева во втором из выписываемых равенств (3.22) обращается в нуль.

$$+\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\zeta(t)}{t-t_0}f_0(t)\,dt+\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{tf_0(t)}{\zeta(t)}dt\Big\}$$

Очевидно, первые слагаемые в обеих внутренних суммах, отвечающие по порядку значениям индекса $m=0$ и $m=1$, принимают нулевые значения; кроме того, целесообразно в первой двойной сумме заменить $m-1$ на m_1 и затем n на n_1+1 (отбросив после этих преобразований нижние индексы у m_1 и n_1). Помимо этого два последних слагаемых, содержащихся здесь в фигурных скобках, могут быть в силу (3.22) записаны в форме [5]:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}f_0(t)\left[\frac{\zeta(t)}{t-t_0}+\frac{t+t_0}{\zeta(t)}\right]dt=(a^2-t_0^2)\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\zeta(t)}\frac{f_0(t)-f_0(t_0)}{t-t_0}dt \tag{3.23}$$

более удобной для численного анализа. В результате придадим выражению для искомой плотности следующий вид (с достаточно явственно проступающими качественными атрибутами):

$$\nu(t_0)=\frac{1}{\zeta(t_0)}\Big\{ia\sum_{n=1}^{\infty}{}^{*}\lambda^n\left(\alpha_n+\lambda\alpha_{n+1}\frac{t_0}{a}\right)\sum_{m=2}^{n+1}{}^{*}(-1)^pC_{1/2}^{p}\left[\left(\frac{t_0}{a}\right)^m-1\right]+$$

$$+(a^2-t_0^2)\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\zeta(t)}\frac{f_0(t)-f_0(t_0)}{t-t_0}dt\Big\} \tag{3.24}$$

Из последней формулы вытекает, что определяемая ею плотность $\nu(t_0)$ на самом деле остается непрерывной в концах интервала $(-a,a)$.

Приведем еще важные для последующего формулы (в их правых частях нижние пределы суммирования принимаются соответственно равными нулю либо единице, смотря по тому, нечетное либо четное задаваемое n):

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\zeta(t)}\left(\frac{t}{a}\right)^n\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{\zeta(z)}\left(\frac{z}{a}\right)^k-\frac{i}{a}\sum_{k=0,1}^{n-1}{}^{*}(-1)^{(\beta-1)}C_{-1/2}^{(\beta-1)}\left(\frac{z}{a}\right)^k \tag{3.25}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\zeta(t)}\left(\frac{t}{a}\right)^n\frac{dt}{t-t_0}=-\frac{i}{a}\sum_{k=0,1}^{n-1}{}^{*}(-1)^{(\beta-1)}C_{-1/2}^{(\beta-1)}\left(\frac{t_0}{a}\right)^k \tag{3.26}$$

4. Введем в рассмотрение следующие сравнительно несложные функции:

$$p_n(t)=\frac{1}{\zeta(t)}\left[\left(\frac{t}{a}\right)^n-1\right],\quad q_n(t)=\frac{t}{a}p_n(t),$$
$$r(t_0)=\zeta(t_0)\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\zeta(t)}\frac{f_0(t)-f_0(t_0)}{t-t_0}dt \tag{4.1}$$

Как видно, имеют место соотношения

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}p_n(t)\frac{dt}{t-z}=p_n(z)-\frac{i}{a}\sum_{k=1}^{n-1}{}^{*}(-1)^{(\beta-1)}C_{-1/2}^{(\beta-1)}\left(\frac{z}{a}\right)^k$$

[5] Ясно, что в данном случае наличие в числителе подынтегральной функции преднамеренно введенного вычитаемого слагаемого $f_0(t_0)$ заметно усиливает его сходимость и позволяет, не сказываясь на самой величине исходного интеграла, надежнее подсчитать его с желаемой точностью.

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} q_n(t)\frac{dt}{t-z}=q_n(z)-\frac{i}{a}\left[\sum_{k=0}^{n}{}^{*}(-1)^{(n-k)/2}C_{-1/2}^{(n-k)/2}\left(\frac{z}{a}\right)^{k}-1\right]$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} p_n(t)\frac{dt}{t-t_0}=-\frac{i}{a}\sum_{k=1}^{n-1}{}^{*}(-1)^{(\beta-1)}C_{-1/2}^{(\beta-1)}\left(\frac{t_0}{a}\right)^{k} \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} q_n(t)\frac{dt}{t-t_0}=-\frac{i}{a}\left[\sum_{k=0}^{n}{}^{*}(-1)^{(n-k)/2}C_{-1/2}^{(n-k)/2}\left(\frac{t_0}{a}\right)^{k}-1\right]\quad (n=0,2,4,\ldots)$$

Искомая плотность $\nu(t_0)$ может быть (в согласии с определяющей ее формулой (3.24) и вновь введенными обозначениями) записана в компактной и доступной обозрению форме

$$\nu(t_0)=ia\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\lambda^n\eta_n(t_0)+r(t_0) \tag{4.3}$$

причем значение $\eta_n(t_0)$ задается в соответствии с равенствами

$$\eta_n(t_0)=\sum_{m=2}^{n+1}{}^{*}(-1)^{p}C_{1/2}{}^{p}\,p_m(t_0) \tag{4.4}$$

для нечетного n и

$$\eta_n(t_0)=\sum_{m=2}{}^{*}(-1)^{(n-m)/2}C_{1/2}^{(n-m)/2}q_m(t_0),\qquad q_m(t_0)=\frac{t_0}{a}p_m(t_0) \tag{4.5}$$

для четного n; суммирование в (4.3) распространяется теперь по всем целочисленным положительным значениям индекса n. Однако справедливость требует признать, что указанное упрощение формулы для плотности носит довольно формальный характер и не сулит каких-либо серьезных преимуществ при переходе к ее фактической численной и качественной интерпретации. Положим для краткости

$$\nu(t_0)=iaJ(t_0)+r(t_0),\quad J(t_0)=J_1(t_0)+J_2(t_0) \tag{4.6}$$

$$J_1(t_0)=\sum_{n=1}^{\infty}{}^{*}\alpha_n\lambda^n\sum_{m=2}^{n+1}{}^{*}(-1)^{p}C_{1/2}{}^{p}p_m(t_0) \tag{4.7}$$

$$J_2(t_0)=\sum_{n=2}^{\infty}{}^{*}\alpha_n\lambda^n\sum_{m=2}^{n}{}^{*}(-1)^{(n-m)/2}C_{1/2}^{(n-m)/2}q_m(t_0) \tag{4.8}$$

Фактически входящие в эти равенства кратные суммы, как видно, состоят по отдельности из пары двойных сумм схожей структуры. Достаточно рассмотреть подробно одну, например первую из них. В ней внешнее суммирование ведется по всем целым нечетным значениям индекса $n=1+2\varepsilon_1$ ($\varepsilon_1=0, 1, 2, \ldots, \infty$); следующий же индекс внутреннего суммирования m принимает при этом совокупность четных значений $m=2+2\varepsilon_2$ ($\varepsilon_2=0, 1, \ldots, (n-1)/2$).

При перестановке порядка суммирования в качестве внешнего индекса (в итоге уже независящего от n) берется (при указанном интервале изменения ε_2) в расчет $m=2+2\varepsilon_2\leqslant 2+(n-1)=n+1=2(1+\varepsilon_1)$ ($\varepsilon_1=0, 1, \ldots, \infty$); как видно, последний индекс по порядку (при подходящем выборе ε_1) принимает соответственные целые четные значения; отсюда нетрудно прийти к выводу, что $m_{\min}=2$ и $m_{\max}=\infty$. Вместе с тем из той же внутренней суммы (при неограниченно возрастающем верхнем пределе n) находим $m=n+1-2\varepsilon$ или же $n=m-1+2\varepsilon$ при любом целом и неотрицательном ε. В итоге придадим исходной двойной сумме (2.7) следующую видоизмененную форму:

$$J_1(t_0)=\sum_{m=2}^{\infty}{}^{*} p_m(t_0)\sum_{n=m-1}^{\infty}{}^{*}(-1)^p C_{1/2}^{\,p}\alpha_n\lambda^n \tag{4.9}$$

Заметим, что другую содержащуюся в (4.8) двойную сумму, рассуждая подобно тому, как при выводе (4.9), преобразуем к виду

$$J_2(t_0)=ia\sum_{m=2}^{\infty}{}^{*} q_m(t_0)\sum_{n=m}^{\infty}{}^{*}(-1)^{(n-m)/2}C_{1/2}^{(n-m)/2}\alpha_n\lambda^n \tag{4.10}$$

Далее заменив в (4.10) n на n_1+1 и опустив затем единичный указатель у n_1, получим

$$J_2(t_0)=ia\sum_{m=2}^{\infty}{}^{*} q_m(t_0)\sum_{n=m-1}^{\infty}{}^{*}(-1)^p C_{1/2}^{\,p}\alpha_{n+1}\lambda^{n+1} \tag{4.11}$$

Введя теперь обозначения

$$\delta_m=\sum_{n=m-1}{}^{*}(-1)^p C_{1/2}^{\,p}\alpha_n\lambda^n,\qquad \gamma_m=\sum_{n=m-1}^{\infty}{}^{*}(-1)^p C_{1/2}^{\,p}\alpha_{n+1}\lambda^{n+1} \tag{4.12}$$

придадим выражению для искомой плотности следующий компактный вид:

$$\nu(t_0)=ia\sum_{n=2}{}^{*}[\delta_n p_n(t_0)+\gamma_n q_n(t_0)]+r(t_0)\qquad(-a<t<a) \tag{4.13}$$

Определив из построенной выше бесконечной системы линейных алгебраических уравнений требуемое, по усмотрению, или, вернее, в зависимости от задуманной точности счета, число величин α_n и подсчитав по ним соответственные постоянные δ_m и γ_m, найдем затем с известной точностью плотность $\nu(t)$, а следовательно, и $g(t)$; после этого из основных формул (1.4) и (1.5) получим искомую функцию $\varphi(z)$ поочередно в верхнем и нижнем полукругах. Зная их, без труда составим выражения для компонентов тензора напряжений, действующих в рассматриваемой среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
2. *Ширяев Е. А.* Кручение круглого бруса с двумя врезами.– ПММ, 1958, т. 22, вып. 4, с. 549–553.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.XI.1982