

УДК 539.3

**КРУЧЕНИЕ УПРУГОГО ПОЛОГО ШАРА, ОСЛАБЛЕННОГО  
КОЛЬЦЕВЫМИ НАДРЕЗАМИ**

**ЗЛАТИН А. Н., ЛАВРОВ Н. А.**

Одним из обобщений метода разделения переменных на задачи теории упругости является метод однородных решений. [1, 2], непосредственно не приспособленный к решению таких краевых задач, в которых смешанные условия задаются на «торцах» области.

Описана проекционная схема, позволяющая при использовании однородных решений сводить указанные собственно смешанные задачи к алгебраическим системам простой структуры. В качестве примера рассмотрена задача осесимметричного кручения полого шара, имеющего в экваториальной плоскости два кольцевых надреза. Приводятся численные результаты для коэффициента интенсивности напряжений. Подобные задачи (но в случае одной линии смены типа граничных условий) рассматривались в [3—5].

**1. Общая схема решения.** Рассмотрим упругое тело, на части  $Q$  границы которого заданы перемещения  $U$ , а на части  $B$  — внешние усилия  $T$  (задача 1). Наряду с этой смешанной задачей введем в рассмотрение такую задачу для указанной области, в которой на  $Q$  задаются усилия  $\tau$ , а на  $B$  — перемещения  $u$ . Предположим, что для произвольных  $\tau$  и  $u$  эта задача может быть решена; тогда по найденному решению можно найти перемещения  $u_*$  на  $Q$  и напряжения  $\tau_*$  на  $B$ . Введем теперь оператор  $A$ , сопоставляющий паре функций  $\{\tau, u\}$  элемент  $\{u_*, \tau_*\}$ . (Здесь и далее в фигурные скобки заключаются две вектор-функции, из которых первая определена на  $Q$ , а вторая — на  $B$ .)

При помощи введенного оператора задача 1 может быть сведена к операторному уравнению

$$A\varphi = f, \quad \varphi = \{\tau, u\}, \quad f = \{U, T\} \quad (1.1)$$

Рассмотрим скалярное произведение вектор-функций  $(\varphi, \psi) = \int_{Q \cup B} \varphi \cdot \psi \, ds$  и отметим, что оператор  $A$  является линейным и положительным. Первое — очевидно, а второе — следствие формулы Клапейрона:  $(A\varphi, \varphi) = 2W > 0$  при  $\varphi \neq 0$ , где  $W$  — потенциальная энергия деформации упругого тела; оператор  $A$  не является симметричным, так как  $(A\varphi, \psi) \neq (\varphi, A\psi)$ .

Ниже для решения функционального уравнения (1.1) используется проекционная схема: решение разыскивается в виде

$$\varphi = \sum_k X_k \varphi_k \quad (1.2)$$

После подстановки (1.2) в (1.1) полученное соотношение проецируется на координатные функции  $\varphi_k$  и задача сводится к бесконечной (или при приближенном решении к конечной) алгебраической системе относительно неизвестных  $X_k$ :

$$\sum_k X_k a_{kn} = b_n, \quad a_{kn} = (A\varphi_k, \varphi_n), \quad b_n = (f, \varphi_n) \quad (1.3)$$

Следует отметить, что, хотя построить явный вид оператора  $A$ , вообще говоря, так же сложно, как решить саму исходную краевую задачу, упрощение схемы решения может быть достигнуто за счет использования однородных решений. Поэтому рассмотрим задачу эластостатики для некоторой канонической области, на боковой поверхности которой заданы однородные, а на торце (или торцах) — смешанные краевые условия. Использование однородных решений, тождественно удовлетворяющих уравнениям теории упругости во внутренних точках области и однородным условиям на боковой поверхности, позволяет установить, что в точках торцевой поверхности  $u = \sum X_k u_k$ ,  $\tau = \sum X_k \tau_k$ , где  $X_k$  — неизвестные коэффициенты, а  $u_k, \tau_k$  — заданные функции (однородные решения).

Тот факт, что условия на боковой поверхности удовлетворяются тождественно, позволяет исключить боковую поверхность из дальнейшего рассмотрения и считать, что  $Q$ , соответственно  $B$ , это часть торца, где заданы перемещения  $U$ , соответственно усилия  $T$ . Таким образом задача сводится к сумматорным уравнениям вида

$$\sum_k X_k u_k = U \text{ на } Q, \quad \sum_k X_k \tau_k = T \text{ на } B \quad (1.4)$$

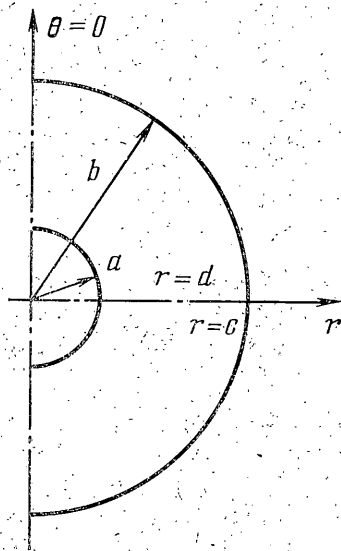
Взяв теперь в качестве координатных функций однородные решения  $\varphi_k = \{u_k, \tau_k\}$ , получаем  $A\varphi_k = \{u_k, \tau_k\}$ . Коэффициенты алгебраической системы (1.3), к которой сводятся сумматорные уравнения (1.4), а следовательно, и исходная смешанная задача, принимают вид

$$a_{kn} = \int_Q u_k \cdot \tau_n ds + \int_B \tau_k \cdot u_n ds, \quad b_n = \int_Q U \cdot \tau_n ds + \int_B T \cdot u_n ds \quad (1.5)$$

Заметим, что во многих важных для приложений случаях интегралы (1.5) допускают вычисление в явном виде (а не в виде рядов и интегралов, как это обычно бывает в подобных случаях [2]) и структура алгебраической системы (1.3) оказывается простой.

Отметим, что родственная данной проекционной схема решения смешанных задач, основанная на использовании вариационного принципа граничных условий [6], приведена в [7].

**2. Постановка задачи и ее сведение к линейной системе алгебраических уравнений.** Рассмотрим осесимметричную задачу о кручении полого шара  $a \leq r \leq b$  ( $\{r, \theta, \varphi\}$  — сферические координаты), ослабленного в экваториальной плоскости  $\theta = \pi/2$  кольцевыми надрезами; пусть, например, это будут два надреза  $a \leq r \leq d$  и  $c \leq r \leq b$ , как это показано на фигуре. Предполагается, что сферическая поверхность свободна от напряжений, а на берега разрезов действуют антисимметричные относительно экваториальной плоскости касательные усилия  $T_0$  (для определенности будем их считать постоянными). Симметрия задачи позволяет разыскивать решение лишь для половины шара. Так, например, для верхнего полушара



<sup>1</sup> Развиваемая здесь схема решения допускает, в принципе, произвольное число смен типа граничных условий.

краевые условия принимают вид

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad (r=a, r=b, 0 \leq \theta \leq \pi/2) \quad (2.1)$$

$$u = 0 \quad (\theta = \pi/2, \quad d \leq r \leq c) \quad (2.2)$$

$$\tau_{\theta\varphi} = T_0 \quad (\theta = \pi/2, \quad a < r < d, \quad c < r < b)$$

Здесь окружное перемещение  $u$  отвечает дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{u}{r^2 \sin \theta} = 0 \quad (2.3)$$

а отличные от нуля составляющие тензора напряжений связаны с функцией  $u$  соотношениями ( $G$  — модуль сдвига материала шара):

$$\tau_{r\varphi} = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{r} \right), \quad \tau_{\theta\varphi} = G \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u}{\sin \theta} \right)$$

Разделяя переменные в уравнении (2.3) и учитывая краевые условия (2.1), а также очевидное условие ограниченности при  $\theta=0$ , представим решение в виде

$$u(r, \theta) = X_0 \frac{r}{a} \sin \theta + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \frac{P_{-1/2+i\lambda_k}^1(\cos \theta)}{P_{-1/2+i\lambda_k}^2(0)} \psi_k(r)$$

$$\psi_k(r) = \left( \frac{r}{a} \right)^{-1/2} \left( \cos \lambda_k \ln \frac{r}{a} + \frac{3}{2\lambda_k} \sin \lambda_k \ln \frac{r}{a} \right), \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{\ln b/a} \quad (k=1, 2, \dots)$$

где  $P_{-1/2+i\lambda}^m(x)$  — функции конуса [8].

Удовлетворяя теперь смешанным условиям (2.2), приходим к сумматорным уравнениям

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k u_k(r) = 0 \quad (d \leq r \leq c) \quad (2.4)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k \tau_k(r) = T_0 \quad (a < r < d, \quad c < r < b)$$

$$u_0(r) = r/a, \quad \tau_0(r) = 0, \quad u_k(r) = \mu_k \psi_k(r), \quad \tau_k(r) = G \psi_k(r) / r$$

$$\mu_k = P_{-1/2+i\lambda_k}^1(0) / P_{-1/2+i\lambda_k}^2(0) \quad (k=1, 2, \dots)$$

Сравнивая (2.4) и (1.4), можно установить, что задача сводится к алгебраической системе (1.3), которая после замены  $X_k = x_k T_0 / G$  и сокращения на  $2\pi T_0 a^2$  принимает вид  $\sum x_k A_{kn} = B_n$  ( $k, n=0, 1, \dots$ ). Коэффициенты этой системы (см. (1.5)) могут быть вычислены в явном виде

$$A_{00} = 0, \quad A_{0n} = -A_{n0} = F_{0n}(c/a) - F_{0n}(d/a) \quad (2.5)$$

$$A_{kn} = (\mu_n - \mu_k) [F_{kn}(d/a) - F_{kn}(c/a)] \quad (k \neq n)$$

$$A_{nn} = \mu_n \left[ F_{nn} \left( \frac{b}{a} \right) - F_{nn}(1) \right], \quad B_{00} = F_{00} \left( \frac{c}{a} \right) - F_{00} \left( \frac{d}{a} \right)$$

$$B_n = \mu_n \left[ F_{0n} \left( \frac{c}{a} \right) - F_{0n} \left( \frac{d}{a} \right) \right], \quad F_{00}(x) = {}_1/3 x^3, \quad F_{0n}(x) = x^{1/2} (\theta/\lambda + \lambda_n^2)^{-1} \beta_n(x)$$

$$F_{nk}(x) = (\lambda_n^2 - \lambda_k^2)^{-1} [\alpha_k(x) \beta_n(x) - \alpha_n(x) \beta_k(x)] \quad (n \neq k)$$

Таблица 1

$l$	$a=0,5$	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=5$	$a \geq 1000$	$a=\infty$
0,1	0,396 0,531	0,412 0,495	0,415 0,460	0,415 0,447	0,415 0,433	0,410 0,410	0,403
0,2	0,492 0,823	0,547 0,750	0,580 0,690	0,589 0,667	0,600 0,646	0,610 0,611	0,603
0,3	0,605 1,15	0,709 1,04	0,764 0,950	0,789 0,918	0,810 0,888	0,841 0,841	0,830
0,4	0,955 1,66	1,07 1,50	1,15 1,40	1,19 1,36	1,22 1,32	1,27 1,27	1,24

Таблица 2

$l$	$a=0,5$	$a=1$	$a=2$	$a=3$	$a=5$	$a \geq 1000$	$a=\infty$
0,2	0,761 0,858	0,679 0,778	0,625 0,704	0,606 0,669	0,593 0,637	0,575 0,576	0,570
0,4	0,626 1,64	0,726 1,34	0,782 1,12	0,804 1,04	0,823 0,970	0,858 0,859	0,852
0,6	0,656 2,98	0,814 2,13	0,949 1,65	1,01 1,49	1,07 1,36	1,18 1,18	1,17
0,8	0,884 5,87	1,08 3,60	1,30 2,60	1,41 2,31	1,53 2,08	1,77 1,78	1,75

$$F_{nn}(x) = (2\lambda_n)^{-1} \left[ \left( \frac{9}{4\lambda_n} + \lambda_n \right) \ln x + \frac{3}{\lambda_n} \sin^2(\lambda_n \ln x) + \left( 1 - \frac{9}{4\lambda_n^2} \right) \sin(\lambda_n \ln x) \cos(\lambda_n \ln x) \right]$$

$$\alpha_n(x) = \cos(\lambda_n \ln x) + 3(2\lambda_n)^{-1} \sin(\lambda_n \ln x),$$

$$\beta_n(x) = \left( \frac{9}{4\lambda_n} + \lambda_n \right) \sin(\lambda_n \ln x) \quad (k, n=1, 2, \dots)$$

3. Численные результаты. Потенциальная энергия деформации верхней половины шара может быть определена с использованием формулы Клапейрона

$$W = \pi \int_a^b u \left( r, \frac{\pi}{2} \right) \tau_{\theta\varphi} \left( r, \frac{\pi}{2} \right) dr$$

Учитывая теперь краевые условия (2.2), нетрудно показать, что  $W$  связано с решением соответствующей алгебраической системы соотношением  $W = \frac{1}{3} \pi a^3 T_0^2 x_0 (b^3/a^3 - 1)/G$ .

С точки зрения приложений наибольший интерес в рассматриваемой задаче представляет определение коэффициентов интенсивности напряжений у краев разрывов ( $\rho = c - r$  или  $r - d$ ):

$$K_{III}^{c,d} = \lim_{\rho \rightarrow 0+} \sqrt{2\pi\rho} \tau_{\theta\varphi} |_{\theta=\pi/2}$$

Опираясь на идею Ирвина (см., например, [9, гл. IV, § 2]), можно показать, что коэффициенты интенсивности связаны с потенциальной энергией деформации соотношением  $K_{III}^c = (-2G/(\pi c) \partial W/\partial c)^{1/2}$ ,  $K_{III}^d = (2G/(\pi d) \partial W/\partial d)^{1/2}$ . При проведении расчетов производные, входящие в эти формулы, определялись численно с использованием простейшей формулы  $\partial W/\partial x = \frac{1}{2}[W(x+h) - W(x-h)]/h$  (причем, для проводимых далее численных результатов шаг  $h$  был взят равным 0,01).

Ниже даны значения безразмерного коэффициента интенсивности  $\eta^c$ ,  $d = \frac{c, d}{\sqrt{2T_0}}$ , найденные по указанной выше схеме при привлечении в алгебраической системе 160 уравнений. При этом толщина стенок сферы считается единичной ( $b = a + 1$ ).

В табл. 1 для ряда значений геометрических параметров приведены значения безразмерного коэффициента интенсивности  $\eta^d$  (верхние строчки) и  $\eta^c$  (нижние) в случае разрезов равной глубины ( $d - a = b - c = l$ ).

В табл. 2 аналогичные величины даны для сферы с одним надрезом: в верхних строчках — внутренним ( $d - a = l$ ,  $c = b$ ), а в нижних — внешним ( $a = d$ ,  $b - c = l$ ).

Для оценки точности приведенных данных служат помещенные в крайних правых столбцах таблиц точные результаты, соответствующие задаче об антиплоской деформации слоя единичной толщины с надрезами и найденные по формулам [9, с. 570]:  $K_{III} = T_0 (\operatorname{tg} \pi l)^{1/2}$ ,  $K_{III} = T_0 (2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi l)^{1/2}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Прокопов В. К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям.— Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1967, № 279, с. 31–46.
2. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
3. Абрамян Б. Л., Баблоян А. А. Об одной контактной задаче, связанной с кручением полого полушара.— ПММ, 1962, т. 26, вып. 3, с. 471–480.
4. Баблоян А. А., Гулканян Н. О. Кручение полой полусферы штампом.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1967, т. 20, № 2, с. 3–18.
5. Нишанян Ю. С. О двух задачах, связанных с кручением составной сферы.— Докл. АН АрмССР, 1974, т. 52, № 1, с. 19–25.
6. Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 223 с.
7. Злагин А. Н., Устинов А. Ф. Кручение упругого цилиндра конечной высоты кольцевым штампом.— В кн.: Исследования по механике твердого деформируемого тела. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1981, с. 134–139.
8. Журина М. И., Кармазина Л. Н. Таблицы и формулы для сферических функций  $P_{\frac{m}{2} + it}^m(z)$ . М.: ВЦ АН СССР, 1962. 57 с.
9. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

Ленинград

Поступила в редакцию  
22.XI.1982