венства $\omega_{01}=\nu$ однороторный корректируемый гирокомпас инвариантен к возмущениям, порождаемым силами инерции, действующими на свободно подвешенный гироблок.

Заметим, что однороторный гирокомпас будет инвариантен к аналогичным возмущениям при выполнении полученных в работе [1] условий $H=c_x n_x v g^{-1}$; $\omega_1^2=\nu^2+c_x n_x I$, где $I$ – момент инерции гироблока относительно оси его подвеса.

Как отмечено в [5], направляющий момент корректируемого гирокомпаса с коррекцией вида [2, 5] независим от восточной составляющей скорости. Период собственных колебаний такого гирокомпаса на неподвижном основании определяется из уравнений (1):

$$T_0=2\pi H^{1/2}(c_x N_x U\cos\varphi)^{-1/2} \tag{5}$$

где $N_x$ – крутизна маятникового момента. При равномерном движении прямым курсом период гирокомпаса $T_{01}$ имеет вид

$$T_{01}=T_0(1-c_z m_z v_N \operatorname{tg}\varphi/c_x RU\cos\varphi)^{-1/2} \tag{6}$$

т. е. зависит от величины северной составляющей скорости $v_N$. Для сравнения заметим, что период колебаний маятникового однороторного гирокомпаса в тех же условиях в соответствии с [3] определяется зависимостью $T_{01}=T_0^M(1+v_E/RU\cos\varphi)^{-1/2}$, т. е. зависит от величины восточной составляющей скорости.

Таким образом, создание моментов коррекции на основе информации о скорости, широте и курсе, выработанном гирокомпасом, делает направляющий момент корректируемого гирокомпаса зависящим от северной составляющей скорости судна. Однако эта зависимость весьма слаба. Так, направляющий момент корректируемого гирокомпаса уменьшается в два раза на широте 85° при $v_N\geqslant 225$ узлов, в то время как у маятниковых гирокомпасов аналогичная ситуация имеет место при $v_E\geqslant 38$ узлов.

Влияние этого обстоятельства на устойчивость гирокомпаса исследовалось в [5, 6]. Следует заметить, что для параметров гирокомпаса, соответствующих [7], условия, полученные в [5], выполняются на широте 85° при $v_N\leqslant 130$ узлов, что несколько меньше, чем для параметров гирокомпаса, рассмотренного в [5].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Блюмин Г. Д., Чичинадзе М. В.* Условия невозмущаемости однороторного гирокомпаса.– Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1964, № 3, с. 71–73.
2. *Блюмин Г. Д., Чичинадзе М. В.* Условия невозмущаемости корректируемого однороторного гирокомпаса.– Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1964, № 5, с. 120–123.
3. *Кошляков В. Н.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1972. 344 с.
4. *Кошляков В. Н., Люсин Ю. Б., Чичинадзе М. В.* О баллистических девиациях корректируемого гирокомпаса.– Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4, с. 105–111.
5. *Ройтенберг Я. Н.* Гироскопы. М.: Наука, 1966. 399 с.
6. *Шульман И. Ш.* Достаточные условия асимптотической устойчивости корректируемого гирокомпаса.– Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, с. 52–53.
7. *Чичинадзе М. В.* О некоторых ошибках корректируемого гирокомпаса.– Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 5, с. 52–54.

Москва

Поступила в редакцию
28.V.1982

---

УДК 531.36

# О СВЕДЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ К ОДНОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

ЯХЬЯ Х. М.

Задача о движении твердого тела вокруг неподвижной точки сведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка в направляющих косинусах оси симметрии силового поля относительно главных осей тела.

Максимальное понижение порядка уравнений движения гиростата в однородном поле тяжести было достигнуто в [1], где из уравнений Эйлера – Пуассона исключены направляющие косинусы вертикали, проходящие через точку опоры. Очевидно, этот метод допустим только для однородного поля и, вообще говоря, не распространяется на случай полей более общего вида, например ньютонова поля.

Другая форма уравнений движения была использована в [2, 3] для максимального понижения порядка уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки под действием силового поля, допускающего интеграл площадей. В [3] найдено, и формально в самом простом виде, разрешающее уравнение второго порядка в изотермических координатах на эллипсоиде инерции. Этот метод эквивалентен исключению компонент угловой скорости. Хотя в полученное уравнение переменные входят в определенном смысле симметрично, его анализ усложняется тем, что правая часть не выражается через используемые переменные в замкнутом виде.

Оказывается, что задачу о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в осесимметричном силовом поле можно свести к одному дифференциальному уравнению, содержащему только направляющие косинусы вертикали относительно координатной системы, жестко связанной с телом. Результат публикуемой работы реализует понижение порядка в направлении, указанном в [4]. Полученное уравнение эквивалентно системе двух уравнений первого порядка в углах Эйлера, установленной в [5]. В это уравнение переменные входят симметрично.

Путем исключения циклической координаты из лагранжиана задачи, записанного в углах Эйлера, получается система с двумя степенями свободы. Если вместо углов Эйлера ввести направляющие косинусы оси симметрии силового поля относительно главных осей инерции для точки опоры, то получится система с лагранжианом [6]:

$$L=\frac{ABC}{2D}\left(\frac{\gamma_1^{\cdot 2}}{A}+\frac{\gamma_2^{\cdot 2}}{B}+\frac{\gamma_3^{\cdot 2}}{C}\right)+$$

$$+\frac{f}{D(1-\gamma_3^2)}[C\gamma_3(\gamma_2\gamma_1^{\cdot}-\gamma_1\gamma_2^{\cdot})-(A-B)\gamma_1\gamma_2\gamma_3^{\cdot}]+U_0-\frac{f^2}{D} \tag{1}$$

подчиненная голономной связи

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1,\quad D=A\gamma_1^2+B\gamma_2^2+C\gamma_3^2 \tag{2}$$

где $A$, $B$, $C$ – главные моменты инерции тела для неподвижной точки, $f$ – постоянная площадей, $U_0$ – силовая функция.

Теперь в силу связи (2) исключим одну из переменных, например $\gamma_2$, и получим лагранжиан

$$L=\frac{1}{2D\gamma_2^2}(\lambda\gamma_1^{\cdot 2}+2\mu\gamma_1^{\cdot}\gamma_3^{\cdot}+\nu\gamma_3^{\cdot 2})+l\gamma_1^{\cdot}+m\gamma_3^{\cdot}+U_0-\frac{f^2}{2D} \tag{3}$$

$$\lambda=C[B+(A-B)\gamma_1^2-B\gamma_3^2],\quad \mu=AC\gamma_1\gamma_3,\quad \nu=A[B-B\gamma_1^2-(B-C)\gamma_3^2]$$

$$\gamma_2^2=1-\gamma_1^2-\gamma_3^2,\qquad l=\frac{f\gamma_3}{\gamma_2 D},\qquad m=\frac{f\gamma_1}{\gamma_2 D}\,\frac{C\gamma_3^2-(A-B)(1-\gamma_1^2-\gamma_3^2)}{1-\gamma_3^2}$$

Система с лагранжианом (3) допускает интеграл Якоби

$$H=\frac{\lambda\gamma_1^{\cdot 2}+2\mu\gamma_1^{\cdot}\gamma_3^{\cdot}+\vartheta\gamma_3^{\cdot 2}}{2D(1-\gamma_1^2-\gamma_3^2)}-U_0+\frac{f^2}{2D}=h \tag{4}$$

где $h$ – постоянная Якоби. Отсюда находим

$$\gamma_1^{\cdot}=[2DU(1-\gamma_1^2-\gamma_3^2)]^{1/2}/[\lambda+2\mu\gamma_3'+\nu\gamma_3'^2]^{1/2} \tag{5}$$

причем $U=U_0+h-f^2/2D$; штрих означает дифференцирование по $\gamma_1$.

Применим метод, изложенный в [7] и приводящий к уравнениям, аналогичным уравнениям Якоби для натуральной системы. Исключив из рассмотрения случай $\gamma_1^{\cdot}=0$, построим функцию $P=(L+H)/\gamma_1^{\cdot}$. В силу (4), (5) эта функция принимает вид

$$P=[2U(\lambda+2\mu\gamma_3'+\nu\gamma_3'^2]^{1/2}/[D(1-\gamma_1^2-\gamma_3^2)]^{1/2}+l+m\gamma_3' \tag{6}$$

Траектории системы описываются уравнением

$$(d/d\gamma_1)(\partial P/\partial\gamma_3')-\partial P/\partial\gamma_3=0 \tag{7}$$

В формулах (5), (6) перед корнем сохраняется знак плюс. Другой выбор знака эквивалентен изменению направления отсчета времени и изменению знака параметра $f$, фигурирующего в качестве множителя в выражениях для $l$, $m$ в (6). Это отражает свойство инвариантности уравнений Эйлера – Пуассона при изменении знаков угловой скорости и времени. Тогда изменяется и знак параметра $f$.

После некоторых преобразований выпишем уравнение (7) в окончательном виде

$$ABCD(1-\gamma_1^2-\gamma_3^2)\gamma_3''+ABC^2(1-\gamma_3^2)\gamma_3'-ABC[A-(A+2C)\gamma_3^2]\gamma_3'+$$

$$+ABC\gamma_3[C-(C+2A)\gamma_1^2]\gamma_3'^2-A^2BC(1-\gamma_1^2)\gamma_3'^2-\frac{\lambda+2\mu\gamma_3'+\nu\gamma_3'^2}{D}\times$$

$$\times\{C\gamma_3[(B-C)B(1-\gamma_3^2)+(A-B)(A+B-C)\gamma_1^2]+A\gamma_1[B(A-B)(1-\gamma_1^2)+$$

$$+(B-C)(B+C-A)\gamma_3^2]\gamma_3'\}+\frac{\lambda+2\mu\gamma_3'+\nu\gamma_3'^2}{2U}\left[(\mu+\nu\gamma_3')\frac{\partial U}{\partial\gamma_1}-(\lambda+\mu\gamma_3')\frac{\partial U}{\partial\gamma_3}\right]+$$

$$+\frac{f}{\sqrt{2U}}\left(\frac{\lambda+2\mu\gamma_3'+\nu\gamma_3'^2}{D}\right)^{3/2}[(A-B)(A+B-C)\gamma_1^2-B(A-B+C)-$$

$$-(B-C)(B+C-A)\gamma_3^2]=0 \qquad (8)$$

Решив последнее уравнение, получим уравнение траектории вертикальной проекции точки опоры на сфере Пуассона с центром в этой точке, жестко связанной с телом в виде $\gamma_3=\gamma_3(\gamma_1, c_1, c_2)$, где $c_1$, $c_2$ – произвольные постоянные.

Для определения зависимости переменных от времени находим из (5):

$$t=\int\sqrt{\frac{\lambda+2\mu\gamma_3'+\nu\gamma_3'^2}{2DU(1-\gamma_1^2-\gamma_3^2)}}\,d\gamma_1 \qquad (9)$$

Подставляя в эту формулу выражение для $\gamma_3$ и обращая интеграл, можно выразить $\gamma_1$ и, следовательно, $\gamma_3$ и $\gamma_2$ как функции времени.

Согласно [6], имеем выражение для вектора угловой скорости через известные функции времени

$$\omega=(f\gamma-\rho\times\gamma')/(\rho\gamma),\quad \rho=(A\gamma_1,\ B\gamma_2,\ C\gamma_3)^T,\quad \gamma=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)^T \qquad (10)$$

Для определения угла прецессии остается еще одна квадратура [8].

Уравнение (8) можно записать в виде $\gamma_3''=\Phi(\gamma_1, \gamma_3, \gamma_3')$, где $\Phi$ – полином третьей степени относительно $\gamma_3'$ и алгебраическая функция $\gamma_1$, $\gamma_3$ в предположении, что $U_0$ выражается алгебраически через эти переменные.

Такое уравнение в общем случае не исследовано и, очевидно, не удовлетворяет необходимым условиям Пенлеве отсутствия подвижных критических точек в комплексной плоскости $\gamma_1$ [9].

В общем случае уравнение (8) имеет особые линии $\gamma_2=0$, $D=0$, $U=0$ и $\lambda+2\mu\gamma_3'+$ $+\nu\gamma_3'^2=0$. Принципиальное упрощение вносит случай $f=0$. Тогда отпадает последняя особенность.

В случае движения в ньютоновом поле

$$U=h-Mg(x_0\gamma_1+y_0\gamma_2+z_0\gamma_3)-3g(A\gamma_1^2+B\gamma_2^2+C\gamma_3^2)/R-f^2/2D \qquad (11)$$

Если центр масс тела лежит в главной плоскости $\gamma_1$, $\gamma_3$, тогда при $f=0$ уравнение (8) будет кубическим относительно $\gamma_3'$ с коэффициентами, рациональными относительно $\gamma_1$, $\gamma_3$.

Заметим, что в классической постановке доказано, что задача не допускает алгебраического первого интеграла. С другой стороны, при $f=0$ в случае Горячева – Чаплыгина уравнения Эйлера – Пуассона обладают полиномиальным интегралом, а тогда уравнение (8) допускает алгебраический первый интеграл. Возникает вопрос, возможны ли и другие случаи, когда при $f=0$ уравнение (8) допускает алгебраический интеграл?

К уравнению (8) можно еще применить метод инвариантных соотношений [10] для изыскания частных решений при некоторых ограничениях на параметры $h$, $f$.

Из хода рассуждений ясно, что можно получить уравнение движения аналогичного вида, в которое входят любые две из компонент вектора $\gamma$.

Уравнения типа (8) содержат только геометрические переменные системы Эйлера – Пуассона (и в определенном смысле симметрично). Эти уравнения можно использовать для изучения устойчивости горизонтального положения оси вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае маятниковых движений. В этом отношении они имеют преимущества по сравнению с уравнениями, полученными в [2], тем, что плоское движение вокруг любой главной оси инерции (включая среднюю ось) соответствует одной из траекторий $\gamma_i=0$ ($i=1, 2, 3$), а в изотермических переменных из [3] картина значительно усложняется вблизи точек округления эллипсоида инерции, что затрудняет изучение устойчивости вращения вокруг средней оси инерции. Эти вопросы предполагается рассмотреть в последующих публикациях.

Автор благодарит В. Г. Демина за помощь и полезные советы при выполнении этой работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Харламов П. В.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку.– ПММ, 1963, т. 27, вып. 4, с. 703–707.
2. *Харламов М. П.* Об условно-линейном интеграле уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку.– Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 9–17.
3. *Яхья Х. М.* О понижении порядка дифференциальных уравнений движения твер-

дого тела вокруг неподвижной точки.— Вест. МГУ. Сер. матем. и механ., 1976, № 6, с. 76–79.
4. *Билимович А. Д.* Уравнения движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.— В кн.: Сб. статей, посвященный проф. Г. К. Суслову. Киев: Тип. имп. ун-та, 1911, с. 23–73.
5. *Харламова Е. И.* Сведения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, к одному дифференциальному уравнению.— Механика твердого тела: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1969, вып. 1, с. 107–116.
6. *Колосов Г. В.* О некоторых видоизменениях начала Гамильтона в применении к решению вопросов механики твердого тела. СПб., 1903. 74 с.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической динамике. М.: Наука, 1966. 300 с.
8. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 288 с.
9. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
10. *Харламов П. В.* Новые методы исследования задачи о движении твердого тела.— В кн.: Проблемы аналитической механики, теории устойчивости и управления. М.: Наука, 1975, с. 317–325.

Египет

**Поступила в редакцию 6.V.1981**