МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1984

УДК 531.36

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ К ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ

ВЯЗОВИК А. П.

При помощи основных конструкций метода усреднения [1, 2] строится схема нелинейного синтеза управления системами, содержащими медленные и быстрые переменные. Предложенным методом решается задача управления движением аэродинамического объекта.

Задачи управления с использованием разделения движений рассматривались ранее в ряде работ, например [3—7]. Основное отличие постановки и метода решения исследуемой здесь задачи от ранее рассмотренных заключается в отсутствии требования близости медленных движений исходной и усредненной системы в период протекания переходных процессов. За счет этого упрощается формализация разделения движений и схема синтеза управления получается применимой как к системам в стандартной форме [1, 2] с малым параметром, так и к системам, не содержащим малого параметра в явном виде.

Предлагаемая схема синтеза разрабатывалась в процессе решения задач управления движением летательных аппаратов [8, 9] [1].

1. Исследуется нелинейная управляемая система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mu\mathbf{X}(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u}),\quad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0,$$
$$\frac{d\mathbf{y}}{dt}=\mathbf{Y}(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u}),\quad \mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y}_0 \tag{1.1}$$

описывающая изменение n-мерного вектора медленных переменных $\mathbf{x}$ и m-мерного вектора быстрых переменных $\mathbf{y}$. Начальный вектор $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\in D$, D — компактная область фазового пространства. Сомножитель μ $(0<\mu\leqslant1)$ является малым параметром или (при $\mu=1$) формальным признаком медленного изменения переменной $\mathbf{x}$ по сравнению с изменением переменной $\mathbf{y}$.

Управление $\mathbf{u}$ — r-мерный вектор — ищется в множестве U допустимых управлений вида

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{1.2}$$

Предполагается, что правые части системы (1.1) и множество допустимых управлений U таковы, что замкнутая система (1.1), (1.2) удовлетворяет условиям существования и единственности решения при $(\mathbf{x}, \mathbf{y})\in D$, $\mathbf{u}\in U$.

Задана управляемая система (1.1) и множества D, U. Требуется управление $\mathbf{u}\in U$ выбрать таким образом, чтобы движение замкнутой системы (1.1), (1.2) с начальными данными $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\in D$ удовлетворяло условиям

$$|x_i|\leqslant\varepsilon,\quad t\geqslant T\quad (t_0\leqslant T<\infty)\quad {\scriptstyle(i=1,\ldots,n)} \tag{1.3}$$

где ε — заданное положительное число.

[1] См. также *Вязовик А. П.* Решение задачи нелинейного синтеза с помощью метода усреднения: Тез. докл. Всес. семинара по численным методам нелинейного программирования. Харьков: Изд-во Харьковск. ун-та, 1976, с. 122—126.

2. Традиционно разделение движений на быстрые и медленные формализуется приведением системы к стандартной форме [1, 2] с малым параметром. Однако, с одной стороны, во многих приложениях введение малого параметра оказывается задачей далеко не тривиальной. С другой стороны, формализация разделения движений, по крайней мере для преследуемой здесь цели, может быть достигнута более простым способом, который реализуется на первом шаге излагаемой далее схемы синтеза и обосновывается конечным результатом.

Пусть из анализа системы, физических или каких-либо иных соображений следует предположение о том, что фазовые переменные $x_i(t)$, $i=1,\ldots,n$ являются медленно меняющимися по сравнению с переменными $y_j(t)$, $j=1,\ldots,m$. В соответствии с данным предположением в правые части уравнений для медленных переменных вводится сомножитель μ ($\mu=1$), в результате чего система приобретает вид (1.1).

Наряду с системой (1.1) рассматривается соответствующая ей вырожденная система

$$d\mathbf{x}/dt=0,\ d\mathbf{y}/dt=\mathbf{Y}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{u}) \tag{2.1}$$

получаемая из (1.1) уменьшением скоростей изменения медленных переменных до нуля. Формально можно полагать сомножители при μ равными нулю: $\mathbf{X}=0$.

Вырожденная система (2.1) замыкается управлением (1.2), представляемым в виде

$$\mathbf{u}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{y})=\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x})\mathbf{u}_{12}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{y})+u_2(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}) \tag{2.2}$$

Форма (2.2) линейна относительно медленной составляющей управления $\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x})$, однако это не принципиально. Существенно лишь выделение составляющей $\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x})=\text{const}$ при $\mathbf{x}=\text{const}$) в отдельную компоненту. Компоненты $\mathbf{u}_{12}$ и $\mathbf{u}_2$ зависят в общем случае от t и $\mathbf{y}$, и поэтому считаются быстрыми.

Введем сначала необходимые для дальнейшего обозначения. Пусть управление $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1$ вида (2.2) каким-либо образом выбрано и $\mathbf{y}(t,\ t_0,\ \mathbf{y}(t_0),\ \mathbf{x},\ \mathbf{u}_1(\mathbf{x}))$ — общее решение вырожденной системы (2.1), (2.2), зависящее от параметров $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x})$. Через $\mathbf{y}_*=\varphi(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u}_{11}(\mathbf{x}))$ обозначим некоторое частное решение системы (2.1), (2.2) при $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x})\mathbf{u}_{12}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}_*)+\mathbf{u}_2(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}_*))$. Определим отклонения $\Delta\mathbf{y}$, $\Delta\mathbf{u}$:

$$\mathbf{y}=\mathbf{y}_*+\Delta\mathbf{y},\ \ \mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\Delta\mathbf{u} \tag{2.3}$$

Быстрые составляющие управления $\mathbf{u}_{12}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{y})$, $\mathbf{u}_2(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{y})$ выбираются так, чтобы при $\mathbf{x}\in D_x$, $\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x})=\text{const}\in U$ равномерно относительно t_0, $\Delta\mathbf{y}(t_0)$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x})$ существовал (вычисляемый покомпонентно) предел

$$\mathbf{X}_\xi(\mathbf{x},\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x}))=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\mathbf{X}(t,\mathbf{x},\mathbf{y}_*+\Delta\mathbf{y}$$

$$\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x})\mathbf{u}_{12}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}_*+\Delta\mathbf{y})+\mathbf{u}_2(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}_*+\Delta\mathbf{y}))\,dt \tag{2.4}$$

не зависящий от t_0, $\Delta\mathbf{y}(t_0)$. Здесь и далее через D_x, D_y обозначены проекции D на подпространства $\{\mathbf{x}\}$, $\{\mathbf{y}\}$.

Замечание 1. Требование независимости среднего (2.4) от начальных данных может быть снято введением дополнительных медленных переменных — интегралов вырожденной системы (2.1), (2.2).

При помощи (2.4) определяется усредненная система

$$d\mathbf{x}_\xi/dt=\mu\mathbf{X}_\xi(\mathbf{x}_\xi,\ \ \mathbf{u}_{11}(\mathbf{x}_\xi)) \tag{2.5}$$

Медленная составляющая $\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x}_\xi)$ выбирается так, чтобы решения $\mathbf{x}_\xi(t)$ системы (2.5) удовлетворяли требованиям (возможно, несколько усиленным) задачи п. 1.

Управление (1.2) находится подстановкой в (2.2) выбранных составляющих $\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}_{12}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{u}_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$. Найденное управление решает поставленную задачу, если движение замкнутой системы (1.1), (1.2) удовлетворяет условиям (1.3). Последнее проверяется любыми пригодными для этой цели аналитическими (например, вторым методом Ляпунова [10]) или численными методами.

В случае положительного результата оказывается оправданной и предложенная формализация движений посредством введения в (1.1) сомножителя $\mu=1$.

Пример. Рассматривается система

$$\begin{gathered} x^{\bullet}=x-y+\varphi^{-1}(t, \mathrm{x}, y)u \\ y^{\bullet}=-12x+2y-8\varphi^{-1}(t, x, y),\ \varphi(t, x, y)\neq 0 \end{gathered} \tag{2.6}$$

неустойчивая при $u=0$: собственные числа матрицы однородной системы равны $\lambda_{1,2}={}^3/_2\pm({}^{49}/_4)^{1/2}$.

Сделаем предположение (например, на основании сравнения коэффициентов уравнений) о медленном изменении x по сравнению с y и в соответствии с ним введем сомножитель μ ($\mu=1$) в правую часть первого уравнения (2.6).

Управление u будем искать в виде, легко приводимом к (2.2): $u=\varphi(t, x, y)u'(x, y)$, $u'(x, y)=u_1(x)+u_2(y)$.

Далее следуем изложенной схеме синтеза без пояснений:

$$x^{\bullet}=\mu(x-y+u'),\ y^{\bullet}=-12x+2y-8u'$$

$$x^{\bullet}=0,\ y^{\bullet}=-12x+2y-8(u_1'(x)+u_2'(y))$$

Выбираем $u_2'(y)$ из условия $2y-8u_2'(y)=-2y$:

$$\begin{gathered} u_2'(y)={}^1/_2y,\ y^{\bullet}=-2y-12x-8u_1'(x) \\ y(t)=e^{-2(t-t_0)}(y_0+6x+4u_1'(x))-6x-4u_1'(x),\ y_*=-6x-4u_1'(x) \\ x^{\bullet}|_{(2.7)}=\mu[7x+5u'(x)-e^{-2(t-t_0)}(y_0+6x+4u_1'(x))] \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}[\ldots]dt=7x+5u_1'(x),\quad x_\xi^{\bullet}=7x_\xi+u_1'(x_\xi)$$

Составляющую $u_1'(x_\xi)$ выбираем из условия $7x_\xi+u_1'(x_\xi)=-3x_\xi$:

$$u_1'(x_\xi)=-2x_\xi,\ x_\xi^{\bullet}=-3x_\xi,\ u=-2\varphi(t, x, y)x+{}^1/_2\varphi(t, x, y)y \tag{2.8}$$

Для проверки найденного управления в данном случае достаточно вычислить корни характеристического уравнения замкнутой системы (2.6), (2.8): $\lambda_{1,2}'=-{}^3/_2\pm({}^7/_4)^{1/2}$. Система асимптотически устойчива, поэтому полученное управление решает задачу п. 1.

Очевидно, что построение схемы синтеза в случае $\mu=1$ можно было бы выполнить и без введения μ. Однако это удобно, во-первых, из соображений наглядности разделения переменных, во-вторых, для сохранения разделения переменных при преобразованиях координат (это иллюстрируется в п. 3) и, наконец, ввиду того, что форма записи (1.1), где $0<\mu\leqslant1$, позволяет применять все построения и к системам с малым параметром μ.

В заключение сделаем одно конструктивное дополнение, приводящее к понижению размерности усредняемой системы.

Введем новую переменную $v=v(\mathbf{x})$, являющуюся функцией медленных переменных, дифференцируемой по всем своим аргументам, и вычислим ее производную

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1.1)}=\mu\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{X}(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u})\equiv\mu w_1(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u}) \qquad (2.9)$$

Очевидно, что для новой переменной v, так же как и для любой прежней, может быть получено усредненное уравнение

$$dv_\xi/dt=\mu w_{1\xi}(\mathbf{x}_\xi,\ \mathbf{u}_{11}(\mathbf{x}_\xi)) \qquad (2.10)$$

Обращаясь к идее второго метода Ляпунова [10], выберем функцию v так, чтобы требования к медленным движениям выражались в терминах условий на v, w_1. Предположим, что за счет выбора $\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x}_\xi)$ этим (или несколько более жестким) условиям удовлетворяют функции v_ξ, $w_{1\xi}$. Тогда, если управление (2.2), где $\mathbf{u}_{11}(\mathbf{x})$ найдено при помощи (2.10), обеспечивает требования (1.3) к движению исходной системы, то усредненная система n уравнений (2.5) заменима усредненным скалярным уравнением (2.10). В соответствии с этим дополнением решается задача следующего параграфа.

Замечание 2. Схема синтеза может оказаться применимой и при частичном усреднении [11] функций $\mathbf{X}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ или w_1, т. е. когда существует среднее (2.4) лишь для отдельных слагаемых или сомножителей $\mathbf{X}_i$, w_1.

Предложенная здесь формализация разделения движений была впервые использована в [8], затем в [9] (где параметр μ $(0<\mu\leqslant1)$ называется малым по традиции).

3. Моделью движения летательного аппарата является механическая система с шестью степенями свободы

$$\begin{gathered} d\boldsymbol{\rho}/dt=\mathbf{V},\ d\mathbf{V}/dt=\mu\mathbf{F}(t,\ \boldsymbol{\rho},\ \mathbf{V},\ \boldsymbol{\Phi},\ \boldsymbol{\omega},\ m,\ \mathbf{u}) \\ d\boldsymbol{\Phi}/dt=f(\boldsymbol{\Phi},\ \boldsymbol{\omega}),\ d(I\boldsymbol{\omega})/dt=\mathbf{M}(t,\ \boldsymbol{\rho},\ V,\ \boldsymbol{\Phi},\ \boldsymbol{\omega},\ m,\ \mathbf{u}) \end{gathered} \qquad (3.1)$$

рассматриваемая совместно с уравнением расхода массы

$$dm/dt=-\mu q \text{ при } t\in[t_0,\ T_1],\ dm/dt=0 \text{ при } t>T_1\quad (t_0<T_1<T)$$

Здесь $\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3)$ — радиус-вектор начала координат o_1 связанной системы $o_1x_1y_1z_1$ в инерциальной системе $o\rho_1\rho_2\rho_3$, $\mathbf{V}=(V_1,\ V_2,\ V_3)$ — вектор скорости начала координат o_1 относительно системы $o\rho_1\rho_2\rho_3$, $\boldsymbol{\Phi}=(\gamma,\ \psi,\ \vartheta)$ — вектор углов Эйлера — Крылова, определяющих положение связанной системы координат $o_1x_1y_1z_1$ относительно инерциальной системы $o\rho_1\rho_2\rho_3$, $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$ — вектор угловой скорости вращения системы $o_1x_1y_1z_1$ относительно системы $o\rho_1\rho_2\rho_3$, $\mathbf{u}=(\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3)$ — управляющий вектор отклонения элеронов, рулей направления и высоты, $\mathbf{F}$ — суммарный вектор внешних сил, отнесенных к единице массы: тяги, веса, аэродинамических и управляющих, $\mathbf{M}$ — суммарный вектор моментов внешних сил, I — тензор инерции, q — секундный расход массы.

Характер движения объектов рассматриваемого типа допускает предположение о медленном изменении переменных, описывающих скорость движения и массу летательного аппарата по сравнению с изменением пространственных и угловых координат объекта. В соответствии с этим в правые части соответствующих уравнений внесен сомножитель μ $(\mu=1)$.

Уравнения (3.1) хорошо известны в динамике полета [12], и поэтому подробно будут выписываться лишь те соотношения, которые окажутся необходимы по ходу изложения.

Множество D начальных данных системы (3.1) определяется радиусом действия летательного аппарата, ограничениями по высоте и ограничениями на угловые переменные, обеспечивающими устойчивое управляемое движение.

На компоненты управления $\mathbf{u}$ налагаем условия

$$|\delta_1|\leqslant\delta_{**},\ \delta_2^2+\delta_3^2\leqslant\delta_*^2,\ \delta_{**},\ \delta_*>0 \qquad (3.2)$$

согласующиеся с предположением о наличии продольной симметрии летательного аппарата и ограничениями на максимальные поперечные перегрузки.

Рассматривается задача построения синтезированного управления, при котором система (3.1) с начальными данными из области D достигает ε-окрестности начала координат подпространства $\{\rho\}$ за конечное время.

Эта задача, налагающая условия на быструю векторную переменную $\boldsymbol{\rho}(t)$, сводится далее к исследованной выше за счет специального преобразования координат.

Изучение системы начнем с рассмотрения движений, удовлетворяющих условию $\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{V}\neq0$. При помощи векторов V и $\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{V}$ введем в рассмотрение подвижную ортогональную систему координат $ol_1l_2l_3$ с ортами

$$l_1^\circ=\frac{\mathbf{V}}{\|\mathbf{V}\|},\ l_2^\circ=\frac{\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{V}}{\|\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{V}\|},\quad l_3^\circ=\frac{\mathbf{V}\times[\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{V}]}{\|\mathbf{V}\times[\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{V}]\|}\quad \boldsymbol{\rho}\times\mathbf{V}\neq0$$

Векторы $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{V}$ в этой системе имеют вид $\boldsymbol{\rho}=(s,\ 0,\ p)$, $\mathbf{V}=(w,\ 0,\ 0)$, где $s=-\|\boldsymbol{\rho}\|\cos(\boldsymbol{\rho},\ \mathbf{V})$, $p=\|\boldsymbol{\rho}\||\sin(\boldsymbol{\rho},\ \mathbf{V})|$, $w=\|\mathbf{V}\|$, $(\boldsymbol{\rho},\ \mathbf{V})$ — угол между векторами $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{V}$.

В переменных s, p, w совместно с эйлеровыми углами Ω, ν, φ, определяющими положение системы $ol_1l_2l_3$ относительно $o\rho_1\rho_2\rho_3$, движение центра масс описывается уравнениями

$$\Omega^{\boldsymbol{\cdot}}=\mu(\sin\nu)^{-1}\left(\frac{s}{p}\cos\varphi+\sin\varphi\right)F_{l2},\qquad \nu^{\boldsymbol{\cdot}}=\mu\left(\cos\varphi-\frac{s}{p}\sin\varphi\right)F_{l2}$$

$$\varphi^{\boldsymbol{\cdot}}=-\mu\{F_{l3}+\operatorname{ctg}\nu[(s/p)\cos\varphi+\sin\varphi]F_{l2}\} \qquad (3.3)$$

$$w^{\boldsymbol{\cdot}}=\mu(wF_{l1}),\ p^{\boldsymbol{\cdot}}=-\mu sF_{l3},\ s^{\boldsymbol{\cdot}}=w+\mu F_{l3}$$

где F_{li} — проекции вектора $\mathbf{F}$ на оси ol_i. Требование $p\neq0$ следует из условия $\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{V}\neq0$. Эта система может быть использована для решения задачи управления движением центра масс, если за управляющие воздействия принять компоненты F_{li}.

Переменные F_{li} зависят от взаимного углового положения систем $o_1x_1y_1z_1$ и $ol_1l_2l_3$. Взаимная ориентация этих систем определяется тремя эйлеровыми углами: γ_1 — углом крена системы $o_1x_1y_1z_1$ в системе $ol_1l_2l_3$, β — углом скольжения, α — углом атаки [12]. Используя введенные углы, для проекций F_{li} получаем следующие выражения:

$$F_{l1}=[P\cos\alpha\cos\beta-X-G\cos\varphi\sin\nu]/m$$

$$F_{l2}=[P(\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_1+\sin\alpha\cos\gamma_1)+ +Y\cos\gamma_1-Z\sin\gamma_1-G\cos\nu]/m \qquad (3.4)$$

$$F_{l3}=[P(-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_1+\sin\alpha\sin\gamma_1)+ +Y\sin\gamma_1-Z\cos\gamma_1-G\sin\varphi\sin\nu]/m$$

где P — сила тяги, G — сила веса, X, Y, Z — аэродинамические силы $X=c_xSq'$, $Y=c_ySq'$, $Z=c_zSq'$. В выражениях для аэродинамических сил использованы обозначения: $c_x=c_x(\alpha^2,\ \beta^2)$, $c_y=c_y(\alpha,\ \delta_2)$, $c_z=c_z(\beta,\ \delta_3)$ — аэродинамические коэффициенты, S — характерная площадь, $q'={}^1/_2\rho'w^2$ — скоростной напор, $\rho'=\rho'(s\cos\varphi\sin\nu+p\sin\varphi\sin\nu)$ — плотность воздуха, зависящая от высоты, медленная переменная.

Для описания изменения углов γ_1, α, β используются кинематические уравнения

$$\begin{gathered}\gamma_1^{\cdot}=(\cos\beta)^{-1}(\omega_{11}\cos\alpha-\omega_{12}\sin\alpha),\ \beta^{\cdot}=\omega_{11}\sin\alpha-\omega_{12}\cos\alpha\\ \alpha^{\cdot}=\omega_{13}-\operatorname{tg}\beta(\omega_{11}\cos\alpha-\omega_{12}\sin\alpha)\end{gathered}\tag{3.5}$$

теорема об изменении момента количества движения

$$\begin{gathered}A\omega_1^{\cdot}=(C-B)\,\omega_2\omega_3+M_x(q',\ \omega_1,\ \delta_1,\ldots)\\ B\omega_2^{\cdot}=(A-C)\,\omega_3\omega_1+M_y(q',\ \omega_2,\ \delta_2,\ldots)\\ C\omega_3^{\cdot}=(B-A)\,\omega_1\omega_2+M_z(q',\ \omega_3,\ \delta_3,\ldots)\end{gathered}\tag{3.6}$$

и соотношение $\omega=\omega_1+\omega_l$.

Здесь приняты обозначения: $\omega=(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$, $\omega_1=(\omega_{11},\ \omega_{12},\ \omega_{13})$, $\omega_l=(\omega_{l1},\ \omega_{l2},\ \omega_{l3})$ — векторы угловых скоростей вращения систем: $o_1x_1y_1z_1$ относительно $o\rho_1\rho_2\rho_3$, $o_1x_1y_1z_1$ относительно $ol_1l_2l_3$, $ol_1l_2l_3$ относительно $o\rho_1\rho_2\rho_3$ соответственно; M_x, M_y, M_z — проекции суммарного момента аэродинамических сил на связанные оси. В выражениях для компонент момента указаны лишь аргументы, в наибольшей степени влияющие на изменение этих компонент.

Вектор ω_l, как нетрудно убедиться, имеет составляющие $\omega_{l1}=\mu(s/p)F_{l2}$, $\omega_{l2}=-\mu F_{l3}$, $\omega_{l3}=\mu F_{l2}$. В результате получена система, для которой сформулированная выше задача сведена к задаче п. 1. Действительно, для выполнения условия $\|\rho(T)\|\leqslant\varepsilon$ при некотором конечном T достаточно неотрицательную медленную переменную $p(t)=\|\rho\||\sin(\rho,\ \mathbf{V})|$ при условии $s(t)=-\|\rho\|\cos(\rho,\ \mathbf{V})<0$ перевести в ε-окрестность нуля и удержать в ней достаточно длительное время.

Переходим непосредственно к синтезу управления. Полученной выше преобразованной системе уравнений соответствует вырожденная система

$$\begin{gathered}\Omega^{\cdot}=0,\ \nu^{\cdot}=0,\ \varphi^{\cdot}=0,\ w^{\cdot}=0,\ p^{\cdot}=0,\ s^{\cdot}=w\\ \gamma_1^{\cdot}=(\cos\beta)^{-1}(\omega_{11}\cos\alpha-\omega_{12}\sin\alpha),\ \beta^{\cdot}=\omega_{11}\sin\alpha+\omega_{12}\cos\alpha\\ \alpha^{\cdot}=\omega_{13}-\operatorname{tg}\beta(\omega_{11}\cos\alpha-\omega_{12}\sin\alpha)\\ A\omega_{11}^{\cdot}=(C-B)\,\omega_{12}\omega_{13}+M_x(q',\ \omega_{11},\ \delta_1,\ldots)\\ B\omega_{12}^{\cdot}=(A-C)\,\omega_{13}\omega_{11}+M_y(q',\ \omega_{12},\ \beta,\ \delta_2,\ldots)\\ C\omega_{13}^{\cdot}=(B-A)\,\omega_{11}\omega_{12}+M_z(q',\ \omega_{13},\ \alpha,\ \delta_3,\ldots),\ m^{\cdot}=0,\ \omega=\omega_1\end{gathered}\tag{3.7}$$

Полагая в уравнениях для угловых переменных $\delta_1=\delta_{11}=0$, $\delta_2=\delta_{21}=\mathrm{const}$, $\delta_3=\delta_{31}=\mathrm{const}$, находим частное решение γ_{1*}, β_*, $\alpha_*=\mathrm{const}$, $\omega_{11}^*=\omega_{12}^*=\omega_{13}^*=0$, удовлетворяющее системе

$$\begin{gathered}\gamma_{1*}^{\cdot}=0,\ \beta_*^{\cdot}=0,\ \alpha_*^{\cdot}=0,\ \omega_{11}^{\cdot *}=0\\ \omega_{12}^{\cdot *}=q'(m_{y1}\beta_*+m_{y2}\delta_{21})=0\\ \omega_{13}^{\cdot *}=q'(m_{z1}\alpha_*+m_{z2}\delta_{31})=0\end{gathered}\tag{3.8}$$

где m_{yi}, m_{zi} — аэродинамические коэффициенты. В правых частях последних двух уравнений ввиду требования малости отклонений угловых переменных сохранены лишь линейные члены разложения в ряд Тейлора.

Из последних двух уравнений находим $\beta_*=k_\beta\delta_{21}$, $\alpha_*=k_\alpha\delta_{31}$.

Вводя, согласно (2.3), новые переменные $\Delta\gamma_1,\ldots,\ \Delta\omega_{13}$, $\Delta\delta_1$, $\Delta\delta_2$, $\Delta\delta_3$ и вычитая (3.8) из соответствующих уравнений (3.7), получаем сначала систему в отклонениях и затем соответствующую ей систему линейного приближения. Ввиду очевидности записи таких систем приводить их здесь не будем.

Для линеаризованной системы, пользуясь известными методами линейного синтеза, выбираем управления

$$\Delta\delta_1=m_1\Delta\omega_{11},\ \Delta\delta_2=m_{21}\Delta\beta+m_{22}\Delta\omega_{12}$$
$$\Delta\delta_3=m_{31}\Delta\alpha+m_{32}\Delta\omega_{13} \qquad (3.9)$$

доставляющие решению γ_{1*}, β_*, $\alpha_*=\mathrm{const}$, $\omega_{11}{}^*=\omega_{12}{}^*=\omega_{13}{}^*=0$ свойство экспоненциальной устойчивости.

Переходим к построению усредненной системы. Ранее было установлено, что требования задачи к движению системы выполняются при соблюдении условий на поведение неотрицательной медленной переменной $p(t)$. Поэтому для нахождения компонент δ_{11}, δ_{21}, δ_{31} можно воспользоваться уравнением для медленной переменной $v\equiv p$. Согласно (3.3), (3.4), имеем

$$dv/dt=-\mu sm^{-1}[P(-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma_1+\sin\alpha\sin\gamma_1)+$$
$$+Y\sin\gamma_1-Z\cos\gamma_1-G\sin\varphi\sin\nu]\equiv\mu w_1 \qquad (3.10)$$

Среднее (2.4) для w_1 может не существовать, так как среди допустимых движений находятся и такие, при которых $s(t)\to\infty$ при $t\to\infty$. Однако в данном случае, как будет установлено ниже, достаточно сделать частичное усреднение w_1, т. е. усреднение (2.4) сомножителя $m^{-1}[\ldots]$:

$$w_{1\xi}=-s(m^{-1}[\ldots])_\xi=-s(\varkappa\cos c_\gamma\delta_{21}+\varkappa\sin c_\gamma\delta_{31}-g\sin\varphi\sin\nu) \qquad (3.11)$$

Здесь приняты обозначения: $s=wt+\mathrm{const}$, $\varkappa=m_\xi^{-1}[-Pk_\beta+q'S(c_z{}^\beta k_\beta+c_z{}^2)]=m_\xi^{-1}[Pk_\alpha+q'S(c_y{}^\alpha k_\alpha+c_z{}^3)]$, $m_\xi=\mathrm{const}$, $c_z{}^\beta=\partial c_z/\partial\beta$, $c_z{}^2=\partial c_z/\partial\delta_2$, $c_y{}^\alpha=\partial c_y/\partial\alpha$, $c_y{}^3=\partial c_y/\partial\delta_3$, $c_\gamma=\gamma_1+c\gamma_1{}^\cdot$, $g=G/m$.

Частные производные вычислены при нулевых значениях аргументов соответствующих функций. Постоянная $c_\gamma=\gamma_1+c_2\gamma_1{}^\cdot$ интеграл линеаризованной системы в отклонениях, введенный для замены величины γ_{1*}, зависящей от начальных данных. Для невырожденной системы этот интеграл обращается в дополнительную медленную переменную [2].

В результате посредством (3.11) для уравнения (3.10) определено соответствующее частично усредненное уравнение $dv_\xi/dt=-\mu w_{1\xi}$.

Используя метод оптимального демпфирования [13], будем искать управления δ_{21}, δ_{31} $(\delta_{11}=0)$ минимизацией (при $s(t)<0$) функции $w_{1\xi}$:

$$\min_{\delta_{21},\delta_{31}} w_{1\xi}=-s\min_{\delta_{21},\delta_{31}}[\varkappa(\cos c_\gamma\delta_{21}+\sin c_\gamma\delta_{31})-g\sin\varphi\sin\nu]$$

при ограничениях $\delta_{21}{}^2+\delta_{31}{}^2\leqslant\delta_{*1}{}^2$, $0<\delta_{*1}<\delta_*$.

Учитывая, что $\varkappa>0$, получаем

$$\delta_{21}=-\delta_{*1}\cos c_\gamma,\quad \delta_{31}=-\delta_{*1}\sin c_\gamma \qquad (3.12)$$

Управления (3.12) минимизируют производную функции $v_\xi(t)\equiv p_\xi(t)$ при $s(t)<0$ и максимизируют при $s(t)>0$. В обоих случаях это приводит к развороту вектора скорости к началу координат.

Функции управления (3.9), (3.12) требуют некоторых уточнений. Во-первых, ввиду ограничений (3.2) они реализуются как «срезки» соответствующих функций. Во-вторых, вблизи движений по прямой к началу координат (при малых $p(t)$) во избежание вибраций рулей в релейных слагаемых (3.12) константы δ_{*1} заменяются переменными, пропорциональными $p(t)$.

Рассмотрим, наконец, движение по направлению к началу координат при условии $\rho(t)\times V(t)\equiv0$ $(p(t)\equiv0)$. Будем искать управление, обеспечивающее выполнение условия $p_\xi(t)\equiv0$. Приравнивая $w_{1\xi}$ нулю, получим

$$\delta_{21}{}^\circ=\varkappa^{-1}g\sin\varphi\sin\nu\cos c_\gamma,\qquad \delta_{31}{}^\circ=\varkappa^{-1}g\sin\varphi\sin\nu\sin c_\gamma \qquad (3.13)$$

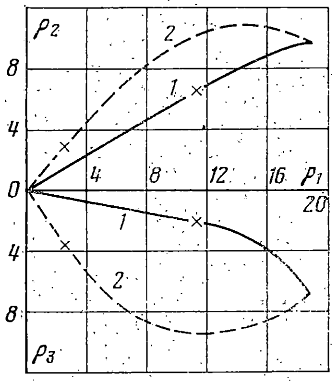
Добавление к управлениям (3.12) слагаемых (3.13) позволяет компенсировать влияние силы тяжести.

Итак, быстрые $\Delta\delta_i$ и медленные δ_{i1} ($i=1, 2, 3$) слагаемые управления найдены. Принимая во внимание (3.9), (3.12) и выражения для угловых переменных, отмеченных звездочкой, получим

$$\delta_1=m_1\gamma_1^*, \quad \delta_2=(m_{21}k_\beta-1)\delta_{*1}\cos(\gamma_1+c\gamma_1^*)+m_{21}\beta+m_{22}\omega_{12}$$
$$\delta_3=(m_{31}k_\alpha-1)\delta_{*1}\sin(\gamma_1+c\gamma_1^*)+m_{31}\alpha+m_{32}\omega_{13} \tag{3.14}$$

Эти управления реализуются с учетом указанных выше уточнений. Синтез управления завершается переходом к фазовым переменным исходной системы.

Проверка найденного управления осуществлялась моделированием движения системы (3.1), (3.14) с конкретными числовыми данными на ЭВМ М-222. Начальные данные соответствовали запуску аэродинамического объекта с расстояния 22,5 км от начала координат при различных углах между вектором скорости и радиус-вектором центра масс. Поведение полученных траекторий таково, что вначале осуществлялся разворот вектора скорости к началу координат и далее происходило практически прямолинейное движение в указанном направлении. Интегральные кривые близки к плоскости, определяемой начальным вектором скорости и началом координат. На фигуре приведены две из полученных траекторий, спроектированные на вертикальную $o\rho_1\rho_2$ и горизонтальную $o\rho_1\rho_3$ плоскости. Числа на осях координат соответствуют расстоянию в км. Крестиками отмечено начало прямолинейных участков траекторий. Для всех полученных траекторий отклонение от цели оказалось в пределах от 0,4 до 21 м.



Автор приносит благодарность З. И. Беловой, В. В. Захарову, С. В. Никитину за участие в работе по составлению программ и проведению численных расчетов на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд-во АН УССР, 1945. 139 с.
2. *Волосов В. М.* Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. – Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 6, с. 3–126.
3. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, заполненными жидкостью при малых числах Рейнольдса. – Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1965, т. 5, № 6, с. 1049–1070.
4. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.
5. *Евтушенко Ю. Г.* Приближенный расчет задач оптимального управления. – ПММ, 1970, т. 34, вып. 1, с. 95–104.
6. *Акуленко Л. Д., Черноусько Ф. Л.* Метод осреднения в задачах оптимального управления. – Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1975, т. 15, № 4, с. 869–882.
7. *Плотников В. А.* Метод частичного усреднения в задачах терминального управления. – Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 2, с. 376–379.
8. *Вязовик А. П.* Применение метода усреднения к задаче управления нелинейной механической системой. – В кн.: Тез. докл. Всес. конф. по оптимальному управлению в механических системах. М.: Изд-е ИПМ АН СССР, 1974, с. 23–24.
9. *Вязовик А. П.* К задаче синтеза управления механическими системами. – В кн.: Динамика управляемых систем. Новосибирск: Наука, 1979, с. 263–268.
10. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
11. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 1974. 216 с.
12. *Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 616 с.
13. *Зубов В. И.* Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л.: Судостроение, 1966. 352 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 23.IV.1982