

УДК 531.8

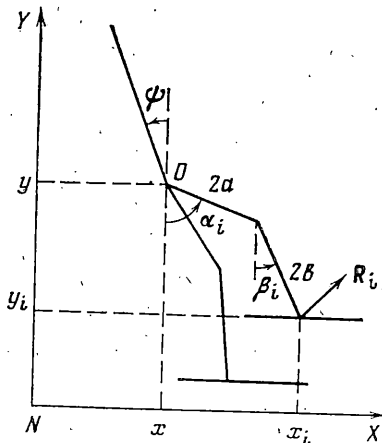
ВЛИЯНИЕ УДАРА НА ДВИЖЕНИЕ И ЭНЕРГЕТИКУ ДВУНОГОГО ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА

РУТКОВСКИЙ С. В.

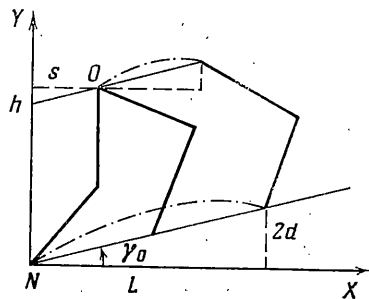
В работе продолжаются исследования движения двуногого шагающего аппарата [1-5] с управляемыми стопами. Задача построения движения решается обратным методом. В отличие от [3-5] нога ставится на поверхность шагания с ударом, управления являются конечными и гладкими функциями времени, поэтому удар пассивный, неуправляемый. Найдено периодическое движение при наличии удара. Решалась задача параметрической оптимизации удельных энерготрат. Исследовано влияние удара на походку аппарата. Результаты численных расчетов представлены графически и в таблице.

1. Двуногий шагающий аппарат состоит из весомого инерционного корпуса и двух одинаковых ног (фиг. 1). Каждая нога трехзвенная. Два весомых инерционных звена моделируют бедро и голень, третьим невесомым и безынерционным звеном моделируется стопа конечности [3, 5].

Пусть $NXYZ$ — прямоугольная декартова система координат. Аппарат совершает передвижение в плоскости NXY вдоль оси NX по плоской по-



Фиг. 1



Фиг. 2

верхности. Наклон поверхности шагания будем задавать величиной $d = \frac{1}{2}L \operatorname{tg} \gamma_0$, где L — двойной шаг (расстояние, на которое переносится нога), γ_0 — угол наклона поверхности шагания. Угол γ_0 отсчитывается против часовой стрелки.

На аппарат действуют помимо силы тяжести силы взаимодействия стоп конечностей с поверхностью шагания, которые заменим силой R_i , приложенной в точке голеностопного сустава и моментом p_i , действующим в этом же суставе i -й опорной ноги ($i=1, 2$). В тазобедренном и коленном суставах действуют моменты q_i и u_i соответственно, которые рассматриваются как внутренние обобщенные силы.

Для массовых, инерционных и линейных характеристик аппарата введем следующие обозначения: m_0 — масса таза (расположен в точке под-

веса ног O), M — масса корпуса, r — расстояние от точки O до центра масс корпуса, I — момент инерции корпуса относительно оси Z в точке O , m_a — масса бедра, a — расстояние от O до центра масс бедра, $2a$ — длина бедра, I_a — момент инерции бедра относительно оси Z в точке O , m_b — масса голени, b — расстояние от коленного сустава до центра масс голени, $2b$ — длина голени, I_b — момент инерции голени относительно оси Z в точке колена.

В публикуемой работе изучается только одноопорная ходьба, т. е. такое передвижение двуногого шагающего аппарата, при котором в любой момент времени в контакте с поверхностью шагания находится только одна нога.

Ускорение силы тяжести обозначим g ($g=9,82$ м/с²).

Вследствие невесомости и неинерционности стоп их движение не рассматривается. Переносная нога имеет индекс 1, опорная — 2. После удара, который происходит в конце шага, производится перенумерация ног: вторая нога становится первой, и наоборот. Таким образом, всегда переносится и ударяется о поверхность шагания первая нога.

За обобщенные координаты примем: x, y — декартовы координаты точки подвеса ног O , ψ, α_i, β_i — углы, определяющие положение звеньев аппарата (фиг. 1). Все углы на фиг. 1 положительные, направление отсчета показано стрелками.

Условия непроскальзывания стопы не рассматриваются, так как в момент удара силы реакции R_i бесконечно велики.

2. Запишем уравнения Лагранжа второго рода. Введем константы:

$$\begin{aligned} k_1 &= m_0 + M + 2m_a + 2m_b, & k_2 &= I, & k_3 &= I_b \\ k_4 &= 4m_b a^2 + I_a, & k_5 &= 2rM, & k_6 &= 2a(m_a + 2m_b) \\ k_7 &= 2bm_b, & k_8 &= 4abm_b, & c_1 &= gk_1 \\ c_2 &= grM, & c_3 &= -ga(m_a + 2m_b), & c_4 &= -gbm_b \\ I &= \frac{1}{3}Mr^2, & I_a &= \frac{1}{3}m_a a^2, & I_b &= \frac{1}{3}m_b b^2 \end{aligned}$$

Обобщенные силы

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_{i=1}^2 R_{ix}, & Q_y &= \sum_{i=1}^2 R_{iy}, & Q_\psi &= - \sum_{i=1}^2 q_i \\ Q_{\alpha_i} &= -u_i + q_i + 2a(R_{ix} \cos \alpha_i + R_{iy} \sin \alpha_i) \\ Q_{\beta_i} &= u_i - p_i + 2b(R_{ix} \cos \beta_i + R_{iy} \sin \beta_i) \end{aligned}$$

В силу невесомости и безынерционности стоп $p_i = 0$. Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид

$$\begin{aligned} k_1 x'' - \frac{1}{2}k_5(\psi'' \cos \psi - \psi'^2 \sin \psi) + \frac{1}{2}k_6 \sum_{i=1}^2 (\alpha_i'' \cos \alpha_i - \alpha_i'^2 \sin \alpha_i) + \\ + \frac{1}{2}k_7 \sum_{i=1}^2 (\beta_i'' \cos \beta_i - \beta_i'^2 \sin \beta_i) = Q_x \\ c_1 + k_1 y'' - \frac{1}{2}k_5(\psi'' \sin \psi + \psi'^2 \cos \psi) + \frac{1}{2}k_6 \sum_{i=1}^2 (\alpha_i'' \sin \alpha_i + \alpha_i'^2 \cos \alpha_i) + \\ + \frac{1}{2}k_7 \sum_{i=1}^2 (\beta_i'' \sin \beta_i + \beta_i'^2 \cos \beta_i) = Q_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_2 \psi'' - 1/2 k_5 (y'' \sin \psi + x'' \cos \psi) - c_2 \sin \psi = Q_\psi \\
& k_4 \alpha_1'' + 1/2 k_5 (x'' \cos \alpha_1 + y'' \sin \alpha_1) + \\
& + 1/2 k_8 [\beta_1'' \cos(\alpha_1 - \beta_1) + \beta_1'^2 \sin(\alpha_1 - \beta_1)] - c_3 \sin \alpha_1 = Q_{\alpha_1} \\
& k_4 \alpha_2'' + 1/2 k_5 (x'' \cos \alpha_2 + y'' \sin \alpha_2) + \\
& + 1/2 k_8 [\beta_2'' \cos(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_2'^2 \sin(\alpha_2 - \beta_2)] - c_3 \sin \alpha_2 = Q_{\alpha_2} \\
& k_3 \beta_1'' + 1/2 k_7 (x'' \cos \beta_1 + y'' \sin \beta_1) + \\
& + 1/2 k_8 [\alpha_1'' \cos(\alpha_1 - \beta_1) - \alpha_1'^2 \sin(\alpha_1 - \beta_1)] - c_4 \sin \beta_1 = Q_{\beta_1} \\
& k_3 \beta_2'' + 1/2 k_7 (x'' \cos \beta_2 + y'' \sin \beta_2) + \\
& + 1/2 k_8 [\alpha_2'' \cos(\alpha_2 - \beta_2) - \alpha_2'^2 \sin(\alpha_2 - \beta_2)] - c_4 \sin \beta_2 = Q_{\beta_2}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Из уравнений связей следует

$$\begin{aligned}
x'' &= 2a(\alpha_2'^2 \sin \alpha_2 - \alpha_2'' \cos \alpha_2) + 2b(\beta_2'^2 \sin \beta_2 - \beta_2'' \cos \beta_2) \\
y'' &= -2a(\alpha_2'' \sin \alpha_2 + \alpha_2'^2 \cos \alpha_2) - 2b(\beta_2'' \sin \beta_2 + \beta_2'^2 \cos \beta_2)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Обозначим левые части уравнений (2.1) через $f_x, f_y, f_\psi, f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, f_{\beta_1}, f_{\beta_2}$ соответственно. После выбора углов α_i, β_i, ψ ($i=1, 2$) это известные функции времени.

Из уравнений (2.1) следует

$$q_1 = f_{\beta_1} + f_{\alpha_1}, \quad q_2 = -f_\psi - f_{\alpha_1} - f_{\beta_1}, \quad u_1 = f_{\beta_1} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
R_{2x} &= f_x, \quad R_{2y} = f_y, \quad u_2 = 2a(R_{2x} \cos \alpha_2 + R_{2y} \sin \alpha_2) - \\
& - f_\psi - f_{\alpha_1} - f_{\alpha_2} - f_{\beta_1}, \quad p_2 = 2a(R_{2x} \cos \alpha_2 + R_{2y} \sin \alpha_2) + \\
& + 2b(R_{2x} \cos \beta_2 + R_{2y} \sin \beta_2) - f_\psi - f_{\alpha_1} - f_{\alpha_2} - f_{\beta_1} - f_{\beta_2}
\end{aligned}$$

Число управлений и число связей равно числу степеней свободы, задача построения движения решается обратным методом. Необходимо выбрать функции α_i, β_i, ψ , удовлетворяющие связям, и тогда можно вычислить управления по формулам (2.3), которые реализуют заданное движение. Энергетические затраты за один шаг можно оценить по формуле [4, 6]:

$$A = \int_0^{T/2} \left\{ \sum_{i=1}^2 [|q_i(\psi - \alpha_i)| + |u_i(\alpha_i - \beta_i)| + |p_i \beta_i|] \right\} dt \tag{2.4}$$

Напомним, что $p_1 = 0$.

Углы α_i, β_i определим после задания движения на первом шаге при $d=0$, например, так: задать движение точки подвеса ног $x = v_0 t + s, y = h$, первой ноги (переносной) $x_1 = 2v_0 t, y_1 = \kappa x_1 (L - x_1)$, второй ноги (опорной) $x_2 = 1/2 L, y_2 = 0$. Здесь T — период движения (время двух шагов), s — смещение точки подвеса ног (расстояние от ее проекции на ось NX до точки опоры задней ноги), h — высота точки O , $v_0 = L/T$ — скорость движения точки подвеса. Для произвольного d эти параметры показаны на фиг. 2. Штрихпунктирные линии — траектории движения точки подвеса ног и конца переносной ноги.

Определим относительные отрезки $x_i^0 = 1/2(x_i - x), y_i^0 = 1/2(y - y_i)$. Для нахождения углов α_i и β_i имеем уравнения

$$a \cos \alpha_i + b \cos \beta_i = y_i^0, \quad a \sin \alpha_i + b \sin \beta_i = x_i^0$$

Тогда

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \operatorname{arctg} \frac{x_i^{\circ} y_i^{\circ} - \varepsilon \sqrt{r_0^2 - \varepsilon^2}}{y_i^{\circ 2} - \varepsilon^2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{4ab}{r_0^2 - (a-b)^2} - 1 \right)^{1/2} \\ \beta_i &= \operatorname{arctg} \frac{x_i^{\circ} y_i^{\circ} - \varepsilon \sqrt{r_0^2 - \varepsilon^2}}{y_i^{\circ 2} - \varepsilon^2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{4ab}{r_0^2 - (a-b)^2} - 1 \right)^{1/2} \\ r_0 &= (x_i^{\circ 2} + y_i^{\circ 2})^{1/2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (a-b), \quad \left(\frac{(a+b)^2 - r_0^2}{ab} \right)^{1/2}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Стопа переносной ноги движется по параболе. Величина κ — коэффициент, определяющий максимальную высоту подъема ноги. Поэтому, если задается максимальная высота подъема ноги a^* , коэффициент κ надо вычислить по формуле $\kappa = 4a^*/L^2$.

Выберем угол ψ в виде

$$\psi(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^3 [a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t] + \sum_{m=1}^4 c_m t^m$$

обозначив $\tau = T/2$. На ψ наложим условия $\psi(0) = \psi(\tau)$, $\psi'(0) = \psi_0'$, $\psi'(\tau) = \psi_1'$. Величины ψ_0' , ψ_1' зададим для первого шага. Тогда из этих условий получается система линейных уравнений с десятью неизвестными: c_m , a_k , b_k , $m=1, \dots, 4$, $k=1, 2, 3$

$$c_1 + c_2 \tau + c_3 \tau^2 + c_4 \tau^3 = 0, \quad B + c_1 = \psi_0' \quad (2.6)$$

$$B + c_1 + 2c_2 \tau + 3c_3 \tau^2 + 4c_4 \tau^3 = \psi_1', \quad B = \omega \sum_{k=1}^3 k b_k$$

Выберем зависимые константы

$$\begin{aligned}c_1 &= -B + \psi_0', \\ c_2 &= (c_4 \tau^3 + 3B - 2\psi_0' - \psi_1') / \tau \\ c_3 &= (-2c_4 \tau^3 - 2B + \psi_0' + \psi_1') / \tau^2\end{aligned}$$

На первом шаге можно произвольно задавать ψ_0' , ψ_1' , a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 , c_4 . Выбором этих констант задается движение корпуса. Углы α_i , β_i определяются, например, формулами (2.5). Тогда легко вычислить управления и энергозатраты при заданной скорости движения \dot{v}_0 . Первый шаг полностью сделан. Но нога номер один при этом переносится по параболе, поэтому скорость стопы в момент постановки ноги отлична от нуля. Походка не мягкая. Накладываются две новые связи $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{y}_1 = 0$, т. е. проекции скорости конца первой ноги на оси X и Y равны нулю. Происходит удар в момент времени $T/2$ (в отличие от [3]). Удар изменяет обобщенные скорости. Формулы будут приведены ниже.

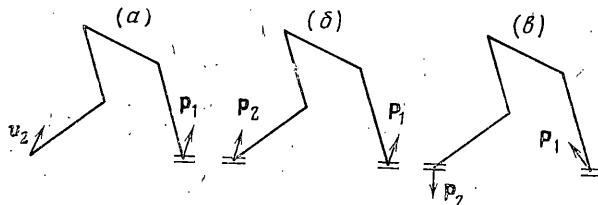
В случае, рассмотренном в [3], для построения периодического движения достаточно выбрать периодическими ψ , α_i , β_i . В данном же случае удар изменит выбранные на первом шаге траектории. Цель второго шага состоит в том, чтобы при помощи конечных управлений ликвидировать возмущения от удара и получить периодическое движение, начиная со второго шага.

Назовем процесс ликвидации возмущений от удара за один шаг выравниванием, а траектории обобщенных координат на первом шаге (невозмущенные) — номинальными.

Пусть имеется какая-то обобщенная координата w на $[0, \tau]$, заданная в виде явной функции времени, и в точке $t=0$ изменилась скорость

$w^{\cdot}(0) \neq W_0^{\cdot}$. Введем поправку $F(t)$ к координате w так, чтобы $W(t) = w(t) + F(t)$, $W(\tau) = w(\tau)$, $W^{\cdot}(\tau) = w^{\cdot}(\tau)$. Выберем $F(t)$ в виде многочлена третьей степени, коэффициенты которого определяются краевыми условиями $F(0) = 0$, $F^{\cdot}(0) = W_0^{\cdot} - w^{\cdot}(0)$, $F(\tau) = 0$, $F^{\cdot}(\tau) = 0$. Это — система из четырех линейных уравнений относительно четырех неизвестных — коэффициентов многочлена. Можно ввести в качестве F многочлен четвертой степени и наложить еще условие: интеграл F от 0 до τ равен нулю. Такой процесс назовем интегральным выравниванием. При интегральном выравнивании новая траектория /проходит ближе к номинальной, хотя возмущения сохраняются до момента времени $t = \tau$.

Периодическую ходьбу будем получать следующим образом. Зададим параметры оптимизации ψ_0^{\cdot} , ψ_1^{\cdot} , a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , b_1 , b_2 , b_3 , c_4 , s , $h > 0$, $L > 0$,



Фиг. 3

$\kappa > 0$. Сделаем первый шаг, в конце его произойдет удар, возмущение обобщенных координат. На втором шаге выравниваем x , y , x_1 , y_1 , ψ . Тем самым будут выравнены углы α_i , β_i . Все обобщенные координаты и скорости будут такими же, как и в конце первого шага. Следовательно, удар в конце второго шага будет точно таким же, как и в конце первого. Получатся такие же возмущения. Таким образом, начиная со второго шага получим периодическое движение.

Отклонение F снабдим индексом — координатой, по которой ведется выравнивание.

Выравнивание по y : $F_y(0) = 0$, $F_y^{\cdot}(0) = (y_+^{\cdot} - v_{0y}) / x_+^{\cdot}$, $F_y(L/2) = 0$, $F_y^{\cdot}(L/2) = 0$, $F_y = F_{y_i}(x)$. Интегральное выравнивание по x : $F_x(0) = 0$, $F_x^{\cdot}(0) = x_+^{\cdot} - v_{0x}$, $F_x(T/2) = 0$, $F_x^{\cdot}(T/2) = 0$, $F_x = F_{x_i}(t)$ и интеграл от F_x равен нулю. Аналогично проводится интегральное выравнивание по x_1 и y_1 , только $F_{x_1}(0) = x_{1+}^{\cdot} - 2v_{0x}$ и $F_{y_1}(0) = y_{1+}^{\cdot} - 2v_{0y}$. Индексом плюс помечены обобщенные скорости после удара.

Вычислим координаты точки подвеса ног: $x = v_{0x}t + s + F_x(t)$, $y = h + 2ds/L + F_y(F_x(t) + v_{0x}t) + v_{0y}t$, координаты первой ноги (переносной): $x_1 = 2v_{0x}t + F_{x_1}(t)$, $y_1 = 2v_{0y}t + F_{y_1}(t) + \kappa x_1(L - x_1)$, координаты второй ноги (опорной): $x_2 = L/2$, $y_2 = d$. Эти формулы являются естественным обобщением ранее предложенных, если $d = 0$ и возмущений нет. Величины v_{0x} , v_{0y} — номинальные скорости движения точки подвеса ног O по горизонтали и вертикали (на первом шаге точка O движется комфортно, т. е. прямолинейно и равномерно).

Для выравнивания по ψ надо задать ψ_1^{\cdot} и положить ψ_0^{\cdot} равным угловой скорости после удара.

Поставим задачу параметрической оптимизации: при каких параметрах достигается минимум энергозатрат на метр пути $A^1 = 2A/L$.

3. Запишем уравнения удара. В конце первого шага аппарат ставит ногу на поверхность шага с ненулевой скоростью. Накладываются две новые связи $x_1^{\cdot} = 0$, $y_1^{\cdot} = 0$ и происходит удар. В момент смены ног аппарат опирается обеими ногами о поверхность, которая является односторонней связью. Поэтому проверим, имеет ли место такая ситуация: передняя (первая) нога жестко закреплена, удар в ней направлен вверх, задняя нога свободна и скорость стопы нулевая либо направлена вверх (фиг. 3, а). Иначе рассмотрим второй случай: обе ноги жестко закрепле-

ны и ударные импульсы в них направлены вверх (фиг. 3, б). Назовем первый случай одноударным (одна связь), второй — двуударным (две связи). Может иметь место случай, когда не реализовался ни одноударный, ни двуударный случай (физически нереализуемый — фиг. 3, в), или когда реализовались и одноударный, и двуударный случаи (физически неопределенный, его будем относить к одноударным).

Матрица A_2 размерностью 11×11 определяется позой двуногого шагающего аппарата. Матрица симметрична относительно главной диагонали $A_2 = A_2^T$. Приведем ненулевые элементы верхнего треугольника

$$\begin{aligned} a_{11} &= k_4, & a_{13} &= \frac{1}{2} k_8 \cos(\alpha_1 - \alpha_2), & a_{16} &= \frac{1}{2} k_6 \cos \alpha_1, & a_{17} &= \frac{1}{2} k_6 \sin \alpha_1 \\ a_{18} &= -2a \cos \alpha_1, & a_{19} &= -2a \sin \alpha_1, & a_{22} &= k_4, & a_{24} &= \frac{1}{2} k_8 \cos(\alpha_2 - \beta_2) \\ a_{26} &= \frac{1}{2} k_6 \cos \alpha_2, & a_{27} &= \frac{1}{2} k_6 \sin \alpha_2, & a_{2,10} &= -2a \cos \alpha_2, & a_{2,11} &= -2a \sin \alpha_2, \\ & & a_{33} &= k_3, & a_{36} &= \frac{1}{2} k_7 \cos \beta_1 \\ & & a_{37} &= \frac{1}{2} k_7 \sin \beta_1, & a_{38} &= -2b \cos \beta_1, & a_{39} &= -2b \sin \beta_1, \\ & & a_{44} &= k_3, & a_{46} &= \frac{1}{2} k_7 \cos \beta_2, & a_{47} &= \frac{1}{2} k_7 \sin \beta_2 \\ a_{4,10} &= -2b \cos \beta_2, & a_{4,11} &= -2b \sin \beta_2, & a_{55} &= k_2, & a_{56} &= -\frac{1}{2} k_5 \cos \psi, & a_{57} &= -\frac{1}{2} k_5 \sin \psi \\ & & a_{66} &= k_1, & a_{68} &= a_{6,10} = -1, & a_{77} &= k_1, & a_{79} &= a_{7,11} = -1 \end{aligned}$$

Обозначим матрицу 9×9 , которая получается, если взять первые девять строк и девять столбцов матрицы A_2 через A_1 . Обозначим также $x_{1+} = \|\alpha_{1+}, \alpha_{2+}, \beta_{1+}, \beta_{2+}, \psi_+, x_+, y_+, P_{ix}, P_{iy}\|^T$, $x_{2+} = \|\alpha_{1+}, P_{2x}, P_{2y}\|^T$. Вектор x_{1+} имеет девять компонент, x_{2+} — одиннадцать. Индекс T означает транспонирование. Плюс в индексе указывает, что обобщенные скорости берутся после удара, минус — до удара, P_{ix}, P_{iy} — удары действующие на конец i -й ноги по осям X и Y (им соответствуют обобщенные силы R_{ix}, R_{iy}).

Введем вектора B_1 (размерность 9) и B_2 (размерность 11), обозначим i -й элемент векторов B_1 и B_2 через B_{1i} и B_{2i} , тогда $B_{1i} = B_{2i}$, $i = 1 \dots 9$ и

$$\begin{aligned} B_{21} &= k_4 \alpha_{1-} + \frac{1}{2} k_8 \cos(\alpha_1 - \beta_1) \beta_{1-} + \frac{1}{2} k_6 \cos \alpha_1 x_- + \frac{1}{2} k_6 \sin \alpha_1 y_- \\ B_{22} &= k_4 \alpha_{2-} + \frac{1}{2} k_8 \cos(\alpha_2 - \beta_2) \beta_{2-} + \frac{1}{2} k_6 \cos \alpha_2 x_- + \frac{1}{2} k_6 \sin \alpha_2 y_- \\ B_{23} &= \frac{1}{2} k_8 \cos(\alpha_1 - \beta_1) \alpha_{1-} + k_3 \beta_{1-} + \frac{1}{2} k_7 \cos \beta_1 x_- + \frac{1}{2} k_7 \sin \beta_1 y_- \\ B_{24} &= \frac{1}{2} k_8 \cos(\alpha_2 - \beta_2) \alpha_{2-} + k_3 \beta_{2-} + \frac{1}{2} k_7 \cos \beta_2 x_- + \frac{1}{2} k_7 \sin \beta_2 y_- \\ B_{25} &= k_2 \psi_- - \frac{1}{2} k_5 \cos \psi x_- - \frac{1}{2} k_5 \sin \psi y_- \\ B_{26} &= \frac{1}{2} k_6 \cos \alpha_1 \alpha_{1-} + \frac{1}{2} k_6 \cos \alpha_2 \alpha_{2-} + \frac{1}{2} k_7 \cos \beta_1 \beta_{1-} + \frac{1}{2} k_7 \cos \beta_2 \beta_{2-} - \\ & \quad - \frac{1}{2} k_5 \cos \psi \psi_- + k_1 x_- \\ B_{27} &= \frac{1}{2} k_6 \sin \alpha_1 \alpha_{1-} + \frac{1}{2} k_6 \sin \alpha_2 \alpha_{2-} + \frac{1}{2} k_7 \sin \beta_1 \beta_{1-} + \frac{1}{2} k_7 \sin \beta_2 \beta_{2-} - \\ & \quad - \frac{1}{2} k_5 \sin \psi \psi_- + k_1 y_- \\ B_{28} &= e_{x1} (-x_- - 2b \cos \beta_1 \beta_{1-} - 2a \cos \alpha_1 \alpha_{1-}) \\ B_{29} &= e_{y1} (-y_- - 2b \sin \beta_1 \beta_{1-} - 2a \sin \alpha_1 \alpha_{1-}) \\ B_{2,10} &= e_{x2} (-x_- - 2b \cos \beta_2 \beta_{2-} - 2a \cos \alpha_2 \alpha_{2-}) \\ B_{2,11} &= e_{y2} (-y_- - 2b \sin \beta_2 \beta_{2-} - 2a \sin \alpha_2 \alpha_{2-}) \end{aligned}$$

Здесь e_{xi}, e_{yi} — коэффициенты отражения скорости конца i -й ноги от поверхности шагания. Если считать удар абсолютно неупругим, то $e_{x1} = e_{x2} = e_{y1} = e_{y2} = 0$ и $B_{28} = B_{29} = B_{2,10} = B_{2,11} = 0$.

Тогда в одноударном и двуударном случаях уравнения будут соответственно $A_1 x_{1+} = B_1$, $A_2 x_{2+} = B_2$.

В системе линейных уравнений для удара первые семь уравнений являются уравнениями Лагранжа второго рода для удара. Поэтому матрица, стоящая на пересечении первых семи строк и семи столбцов (семь степе-

ней свободы у пятывзвенника), должна быть симметричной. Получилось, что матрицы A_1 и A_2 симметричны, хотя в них входят уравнения связей. Это облегчает численное решение уравнений удара.

Таким образом, чтобы найти энергозатраты периодического движения, надо сделать шаг, произвести удар и сделать второй шаг с выравниванием. Энергозатраты на втором шаге следует оптимизировать.

4. По данному алгоритму была составлена программа на ЭВМ БЭСМ-6 (транслятор FOREX ИИМ АН СССР). Время вычисления энергозатрат для фиксированных значений параметров составило около 6,5 с. Обычно энергетика первого шага немного меньше, чем энергетика периодического движения. Это объясняется потерями кинетической энергии при ударе. Проводилась параметрическая оптимизация по параметрам, задающим колебания корпуса $\psi(t)$, а также по всем параметрам.

При параметрах аппарата $M=50$ кг, $m_a=m_b=5$ кг, $I=12,042$ кг·м², $L=0,6$ м, $a^*=0,03$ м, $s=0,101$ м, $T/2=0,695$ с проводились численные расчеты.

Ниже приведены результаты оптимизации по одному параметру, указанному в первой строке. При почти неподвижном корпусе ($\psi_0=0$, $\psi_1=0,1$ рад/с) удельные энергозатраты походки A^1 (размерность — Дж/м) приведены во второй строке. Величины s , h , a^* , L имеют размерность м, величины ψ_0 , ψ_1 — рад/с, а $T/2$ — с.

s	s	s	h	h	ψ_0	ψ_1	ψ_1	ψ_1
184,7	177,7	202,0	226,3	261,4	149,0	129,8	149,4	131,6
0,1	0,1	0,1	0,3	0,3	-5,0	-5,0	-5,0	-5,0
0,2	0,2	0,2	0,818	0,818	5,0	5,0	5,0	5,0
0,2	0,2	0,2	0,7625	0,7565	-0,388	-0,459	-0,456	-0,456
в	в	в	а	в	в	в	в	а
+	0	-	0	-	+	0	-	0
0,7	0,7	0,816			0,7	0,7	0,7	0,816

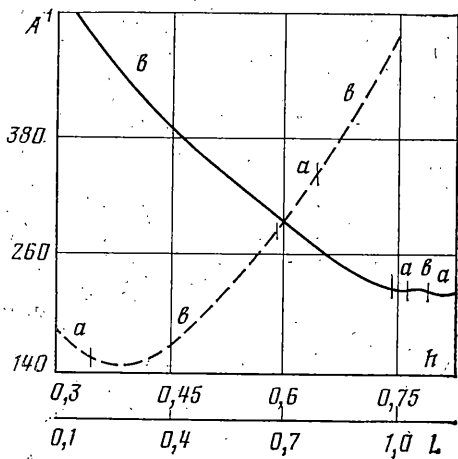
ψ_0	a^*	a^*	a^*	a^*	a^*	L	L	$T/2$
220,7	214,7	158,2	279,1	204,0	143,6	140,1	241,7	200,1
-5,0	0,0001	0,0001	0,0001	-0,1	-0,1	0,1	0,1	0,5
5,0	0,094	0,094	0,094	0,1	-0,1	1,0	1,0	1,0
5,0	0,0001	0,0001	0,0520	-0,056	-0,005	0,2682	0,320	0,585
а	в	в	в	в	в	в	в	а
0	+	0	-	+	0	0	-	0
0,816	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,816

В третьей строке приведено нижнее значение параметра оптимизации, в четвертой — верхнее, в пятой — найденное оптимальное значение. В шестой строке показан тип удара: а — одноударный, б — двуударный, в — физически нереализуемый (см. фиг. 3). В седьмой строке показан характер уклона: вверх (+), горизонтально (0), вниз (-). Величина γ_0 равна $7^\circ 30'$, 0° , $-7^\circ 30'$ соответственно. В восьмой строке показана высота точки подвеса ног h .

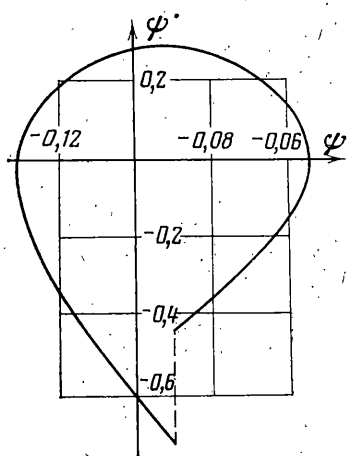
На фиг. 4 сплошной линией показана зависимость A^1 от h , а штриховой — A^1 от L . Буквами над участками показаны типы удара, соответствующие этим участкам. Эти два параметра, определяющие положение ног аппарата, оказывают самое большое влияние на тип удара. Аналогичные зависимости A^1 от параметров s , ψ_0 , ψ_1 , a^* (здесь не приведены) имеют выпуклость вниз, единственный минимум, и при варьировании параметров удара не меняется. Исключение составляет $A^1(a^*)$: при $a^* < 0,04$ м имеет место физически нереализуемый случай, а при $a^* > 0,04$ м — одноударный. Зависимости $A^1(\psi_1)$ для $h=0,7$ м и $h=0,816$ м почти не отличаются одна от другой, но имеют место физически нереализуемый и одноударный случаи соответственно.

Высота $h=0,816$ м — предельная, небольшие возмущения — и аппарат не дотягивается ногами до земли. Поэтому, чтобы иметь оптимизацию по достаточно широкому диапазону значений параметра, приходилось вводить $h=0,7$ м. Это приводило к физически нереализуемым случаям удара. При многомерной оптимизации $h=0,816$ м, и удар получается физически реализуемый, несмотря на малое a^* .

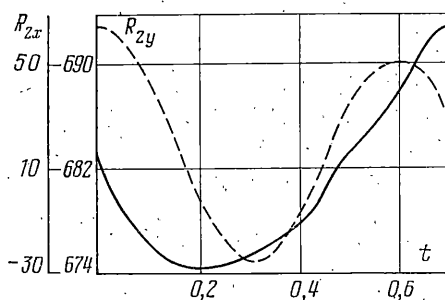
В четвертой строке таблицы найден локальный минимум. Глобальный минимум находится в точке $h=0,818$ м и $A^1=225,5$ Дж/м. Это подтверждает вывод для более простых моделей [2]: чем меньше амплитуда колебаний ноги, тем меньше энергозатраты на небольших скоростях движения. Выгодно ходить, почти не сгибая ноги в коленках.



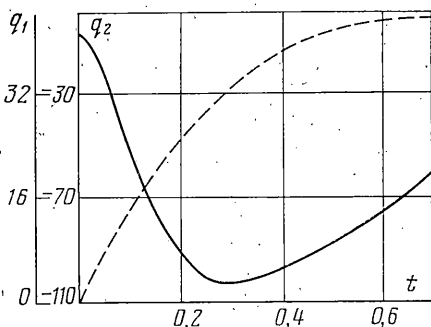
Фиг. 4



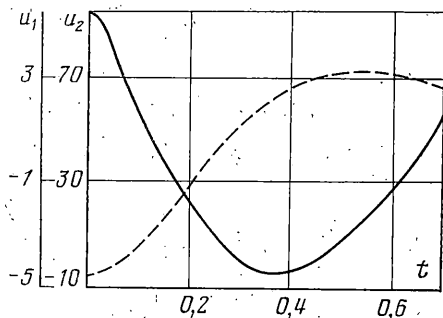
Фиг. 5



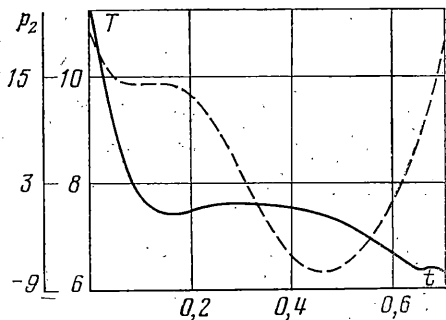
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Случай $a^* < 0$ является физически нереализуемым. Удар при этом происходит снизу вверх. Видно, что на ровной поверхности ногу выгодно переносить под поверхностью шагания. Только при уклоне вниз $a^* > 0$. При многомерной оптимизации при движении по ровной поверхности накладывается ограничение $a^* > 0$.

Интересно, что если оптимизировать угол γ_0 при почти неподвижном корпусе, то оптимальное значение $\gamma_0 \approx 0^\circ 30'$. Большой уклон поверхности шагания как вниз, так и вверх одинаково невыгоден.

Чтобы избежать физически нереализуемых случаев, следует ограничивать s ($0,05 < s < 0,125$), иметь как можно больше h и a^* . Но малое s и большое a^* увеличивают энергозатраты.

В данной работе рассматривается случай, когда нога переносится по параболе. Передняя нога ударяется о землю под очень малым углом к поверхности шагания. Приведенные выше рекомендации, устраняющие физически нереализуемый случай удара, увеличивают угол.

Оптимальным периодическим траекториям по всем параметрам, кроме ψ_0^* , в пространстве $(\psi, \dot{\psi}^*)$ отвечает небольшой скачок угловой скорости, удар не оказывает существенного влияния (лишь корректирующее).

Во время многомерной оптимизации по нескольким параметрам ($I=9,633 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$) получен минимум $A^1=82,91 \text{ Дж/м}$. При аналогичных расчетах в [3] $A^1=87,13 \text{ Дж/м}$. При этом скорость движения $v_0=0,432 \text{ м/с}$. В дальнейших расчетах угол ψ брался в виде многочлена 7-го порядка, не вычислялись энергозатраты первого шага, уменьшено число точек интегрирования. Время вычисления сократилось до 0,9 с, энергозатраты в том же варианте снизились до $A^1=65,75 \text{ Дж/м}$. При средних энергетических затратах.

Для энергетики $A^1=82,91 \text{ Дж/м}$ и $h=0,816 \text{ м}$, получились следующие значения параметров: $a_0=-0,15$, $a_1=-0,015$, $a_2=-0,00079$, $a_3=-0,0000818$, $b_1=0,00172$, $b_2=-0,00027$, $b_3=-0,000039$, $c_4=-0,08355$, $\psi_0^*=15,55$, $\psi_1^*=-0,467$.

Эти параметры соответствуют первому шагу. На втором производится выравнивание и, например, $\psi_1^*=-0,72$. На фиг. 5 показан фазовый портрет получившегося оптимального движения. Траектория периодическая. Разрыв соответствует скачку угловой скорости во время удара. Вертикальная составляющая реакции R_{2y} (фиг. 6, штриховая линия) имеет два асимметричных максимума, что похоже на ходьбу человека. Реакция R_{2x} (фиг. 6, сплошная линия) стала более гладкой. Управления q_2 , u_1 (фиг. 7, штриховая и фиг. 8, сплошная линии) качественно похожи на соответствующие управления из [3]. Управления q_1 , u_2 (фиг. 7, сплошная и фиг. 8, штриховая линии) стали более гладкими, а p_2 (фиг. 9, сплошная линия), стало меньше по абсолютной величине и по характеру похоже на импульсное управление. Уменьшение кинетической энергии T (фиг. 9, штриховая линия) мало. Размерность сил — Н, моментов — Н·м, кинетической энергии — Дж.

Из-за удара происходит выигрыш в энергозатратах за счет «бросания» ноги, но происходит проигрыш вследствие потерь кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе. В целом энергозатраты снизились на 25%. При увеличении массы ног и скорости движения выигрыш в энергетике должен расти. Уменьшение удельных энергозатрат при переходе от некомфортабельной ходьбы к ходьбе с ударом примерно такое же, как и при переходе от комфортабельной к некомфортабельной ходьбе.

Автор искренне благодарит В. В. Белецкого за постоянное внимание к задаче и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы. I, II. — Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, с. 3—14; № 4, с. 3—13.
2. Белецкий В. В., Чудинов П. С. Параметрическая оптимизация в задаче двуногой ходьбы. — Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1, с. 25—35.
3. Белецкий В. В., Бербюк В. Е., Самсонов В. А. Параметрическая оптимизация движений двуногого шагающего аппарата. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 1, с. 28—40.
4. Болотин Ю. В. О разделении движений в задаче стабилизации двуногой ходьбы. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4, с. 48—53.
5. Формальский А. М. Перемещения антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982. 368 с.
6. Гриценко Г. П., Морейнис И. Ш. Энергетическая оценка ходьбы человека в норме и на протезах бедра. — В кн.: Биомеханика. Рига: Н.-и. ин-т травматологии и ортопедии, 1975, с. 228—232.
7. Мазный Г. Л. Программирование на БЭСМ-6 в системе «Дубна». М.: Наука, 1978. 272 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.II.1982