

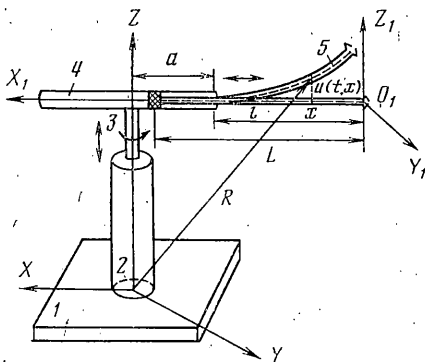
УДК 531.8

**УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ МАНИПУЛЯТОРА С УЧЕТОМ
УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ СРЕЛЫ**

БОЛОТНИК Н. Н., ГУКАСЯН А. А.

Одной из основных характеристик манипуляционных роботов, применяемых в автоматизированных технологических процессах, является точность позиционирования рабочего органа (схвата). На точность позиционирования существенное влияние может оказывать упругая податливость конструкции. Исследованию динамики роботов с учетом упругости их элементов посвящен ряд работ советских и зарубежных авторов [1–10]. В [8] изучается динамика манипуляторов с упругими звеньями, предназначенных для перемещения грузов, масса которых значительно превышает массу манипулятора. В [4] исследуются упругие колебания стрелы промышленного робота типа «Циклон» или «Универсал» при повороте вокруг вертикальной оси. В [9, 10] предложены некоторые режимы управления, обеспечивающие поворот упругой стрелы манипулятора на заданный угол с гашением колебаний в конце процесса. В публикуемой работе исследуется управляемое движение манипулятора, кинематическая схема которого близка к схеме промышленного робота «Циклон», с учетом упругости его стрелы.

1. Рассматривается механическая модель манипулятора с тремя степенями подвижности, кинематическая схема которого приведена на фиг. 1. Манипулятор состоит из неподвижного основания 1, стойки 2, вертикально ориентированного вала 3, направляющей 4 и стрелы 5. Основание,



Фиг. 1

стойка, вал и направляющая считаются абсолютно твердыми телами, а стрела — однородным упругим нерастяжимым стержнем круглого сечения, подверженным слабым изгибным деформациям. Вал без зазора входит в вертикальное цилиндрическое отверстие стойки, где он может перемещаться без трения. Направляющая 4 жестко связана с валом 3. Стрела может без трения перемещаться в горизонтальном цилиндрическом отверстии направляющей, куда она входит без зазора. Манипулятор имеет три степени подвижности, отвечающие перемещению вала в вертикальном направлении, его по-

вороту вокруг вертикальной оси и перемещению стрелы вдоль направляющей. Указанным степеням подвижности соответствуют обобщенные координаты: z — расстояние от связанной с основанием горизонтальной плоскости OXY до стрелы (точнее, до ее нейтральной оси в недеформированном состоянии), φ — угол поворота вала, l — вылет стрелы (расстояние от кромки направляющей до свободного конца недеформированного стержня). Управление системой осуществляется при помощи момента сил M относительно оси вращения вала, вертикально направленной приложенной к валу силы F_2 и силы F_1 , приложенной к стреле и ориентированной вдоль оси отверстия направляющей.

Для описания движения рассматриваемой механической системы введем следующие прямоугольные правые системы координат: связанную с неподвижным основанием инерциальную систему $OXYZ$, ось OZ которой совпадает с осью вращения вала Z ; вращающуюся систему координат $O_1X_1Y_1Z_1$, ось O_1Z_1 которой параллельна оси OZ вращения вала, а ось O_1X_1 ориентирована вдоль нейтральной линии недеформированной стрелы в направлении от свободного конца к оси вращения. Введем обозначения: a — расстояние от оси вращения OZ до кромки направляющей (фиг. 1), L — полная длина стрелы, x — координата точки нейтральной линии стрелы, отсчитываемая от её свободного конца в направлении оси O_1X_1 , $\mathbf{u}(t, x)$ — вектор упругого смещения точки нейтральной линии, стрелы, отвечающей координате x , в момент времени t , $\mathbf{R}(x, t)$ — радиус-вектор точки нейтральной линии стрелы с координатой x в момент времени t относительно начала O инерциальной системы отсчета, $\rho = \text{const}$ — линейная плотность стрелы, m_1 — масса стрелы, m — суммарная масса вала и направляющей, I — суммарный момент инерции вала и направляющей относительно оси вращения OZ , EJ — изгибная жесткость стрелы (E — модуль Юнга материала стрелы, J — момент инерции поперечного сечения относительно его диаметра), ω — вектор угловой скорости вращения вала.

В неинерциальной системе отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$ векторы $\mathbf{u}(t, x)$, $\mathbf{R}(t, x)$, ω имеют следующие координатные представления:

$$\mathbf{u}(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}(t, x) = \begin{pmatrix} x - a - l \\ u_1(t, x) \\ z + u_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Точка в (1.1) и в дальнейшем означает производную по времени t .

Движение стрелы манипулятора будет описываться в рамках теории слабого изгиба тонких прямолинейных нерастяжимых стержней [11], в соответствии с которой упругие смещения $\mathbf{u}(t, x)$ точек нейтральной линии относительно их положения в недеформированном состоянии перпендикулярны оси O_1X_1 и проекция вектора $\mathbf{u}(t, x)$ на ось O_1X_1 равна нулю (см. (1.1)).

2. Кинетическая энергия описанной в п. 1 механической системы определяется выражением

$$T = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{mz^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^L \rho (\mathbf{R}' + \omega \times \mathbf{R})^2 dx \quad (2.1)$$

в котором штрих означает производную вектора \mathbf{R} по времени во вращающейся системе координат $O_1X_1Y_1Z_1$. Подставляя (1.1) в (2.1), после преобразований получим

$$\begin{aligned} T = & \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{(m+m_1)z^2}{2} + \frac{m_1l^2}{2} + \frac{1}{2} \rho \dot{\varphi}^2 \left(\int_0^l u_1^2(t, x) dx + \right. \\ & \left. + \int_0^L (a+l-x)^2 dx \right) + \rho \dot{\varphi} \left(l \int_0^l u_1(t, x) dx - \int_0^l (a+l-x) \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} dx \right) + \\ & + \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} \right)^2 + 2z \cdot \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} \right] dx \quad (2.2) \end{aligned}$$

Полная потенциальная энергия рассматриваемой механической системы равна сумме потенциальных энергий сил тяжести и упругих сил, воз-

никающих при деформации стрелы [12];

$$\Pi = (m+m_1)gz + \rho g \int_0^l u_2(t, x) dx + \frac{1}{2} EJ \int_0^l \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (2.3)$$

Обобщенные непотенциальные силы, отвечающие обобщенным координатам φ , l , z , равны соответственно M , F_1 , F_2 .

Введем новые безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} x' &= x/L, & u_i' &= u_i/L \quad (i=1,2), & z' &= z/L, & l' &= l/L \\ m' &= m/(\rho L), & m_1' &= m_1/(\rho L), & I' &= I/(\rho L^3) \\ t' &= t/T_0, & T_0 &= [\rho L_4/(EJ)]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Величина T_0 в (2.4) характеризует максимальный период собственных колебаний стрелы манипулятора. В соответствии с линейной теорией изгиба тонких прямолинейных стержней предположим, что упругие отклонения точек нейтральной линии стрелы малы по сравнению с ее длиной: $u_i' = u_i/L = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \ll 1$, а максимальный период свободных упругих колебаний стрелы T_0 мал по сравнению с характерным временем процесса управления T и имеет место соотношение $T_0/T = O(\varepsilon^{1/2})$.

Перейдем в (2.2), (2.3) к безразмерным переменным (2.4) с последующим опусканием штрихов и, считая, что в новых переменных величины, характеризующие геометрические и инерционные свойства, имеют порядок единицы, сохраним в получившихся выражениях члены, порядок малости которых не превышает ε^2 :

$$\begin{aligned} T &= \frac{I\varphi'^2}{2} + \frac{(1+m)z'^2}{2} + \frac{l'^2}{2} + \frac{\varphi'^2}{2} \int_0^1 (a+l-x)^2 dx - \\ &- \varphi' \int_0^1 (a+l-x) \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2z' \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} \right] dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\Pi = (1+m)gz + g \int_0^l u_2(t, x) dx + \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial^2 u_i(t, x)}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

Уравнения Лагранжа, описывающие движение механической системы, кинетическая и потенциальная энергии которой определяются выражениями (2.5); имеют вид

$$\begin{aligned} \left[I + \int_0^1 (a+l-x)^2 dx \right] \varphi'' + 2\varphi' l' \int_0^1 (a+l-x) dx - a l' \frac{\partial u_1(t, l)}{\partial t} - \\ - l' \int_0^1 \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} dx - \int_0^1 (a+l-x) \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial t^2} dx = M \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} l'' - \varphi'^2 \int_0^1 (a+l-x) dx = F_1, & \quad (m+1)z'' + \int_0^1 \frac{\partial^2 u_2(t, x)}{\partial t^2} dx = F_2 - (m+1)g \\ \partial^2 u_1 / \partial t^2 + \partial^4 u_1 / \partial x^4 = \varphi'' (a+l-x) + 2l' \varphi' \\ \partial^2 u_2 / \partial t^2 + \partial^4 u_2 / \partial x^4 = -z'' - g \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из (2.6) следует, что управляющие силы F_1 , F_2 и момент M при сделанных выше предположениях относительно соотношения порядков величин, характеризующих рассматриваемую систему, имеют порядок ε .

Функции $u_i(t, x)$, $i=1, 2$ удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial^2 u_i(t, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_i(t, 0)}{\partial x^3} = 0, \quad u_i(t, l) = 0, \quad \frac{\partial u_i(t, l)}{\partial x} = 0 \quad (i=1, 2) \quad (2.8)$$

Первые два равенства (2.8) означают, что свободный конец стержня не нагружен, а последние — что стрела входит в направляющее отверстие без зазора (упругое смещение на выходе из направляющего отверстия равно нулю, а касательная ориентирована вдоль оси направляющей).

Для однозначного определения движения системы из уравнений (2.6) (2.7) кроме условий (2.8) необходимо также задать начальные значения (при $t=0$) обобщенных координат φ , z , l и их производных, а также начальные распределения положений и скоростей точек нейтральной линии стрелы. Считаем, что в начальный момент времени $t=0$ система покоится. Зададим отмеченные выше начальные условия в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad l(0) = l_0, \quad \dot{l}(0) = 0, \quad z(0) = z_0, \\ \dot{z}(0) = 0, \quad u_1(0, x) = 0, \quad \partial u_1(0, x) / \partial t = 0 \\ u_2(0, x) = -gx^4/24 + gl_0^3 x/6 - gl_0^4/8, \quad \partial u_2(0, x) / \partial t = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

3. Поставим задачу управления системой (2.6) — (2.8). Требуется найти управляющие силы $F_1 \in K_{F_1}$, $F_2 \in K_{F_2}$ и момент $M \in K_M$, обеспечивающие приведение системы (2.6) — (2.8) за время T из начального состояния (2.9) в заданное конечное положение с торможением движения и гашением упругих колебаний стрелы в конце процесса

$$\begin{aligned} \varphi(T) = \varphi_*, \quad \dot{\varphi}(T) = 0, \quad l(T) = l_*, \quad \dot{l}(T) = 0 \\ z(T) = z_*, \quad \dot{z}(T) = 0, \quad u_1(T, x) = 0, \quad \partial u_1(T, x) / \partial t = 0 \\ u_2(T, x) = -gx^4/24 + gl_* x/6 - gl_*^4/8, \quad \partial u_2(T, x) / \partial t = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

В начальных (2.9) и конечных (3.1) условиях учтено, что в положении равновесия стрела манипулятора имеет статический прогиб в вертикальной плоскости, обусловленный действием силы тяжести.

Множества K_{F_1} , K_{F_2} , K_M описывают ограничения на управляющие воздействия и характеризуют технические возможности системы управления. Момент времени T может быть задан заранее или определяться в процессе решения задачи.

Поставленная задача управления имеет неоднозначное решение. Для выделения единственного решения (или по крайней мере существенного сужения их множества) необходимо дополнительное условие, например требование оптимальности управления по какому-нибудь критерию.

Рассмотрим режимы управления манипулятором, при которых изменение вылета стрелы (величины l) происходит в отсутствие движений, отвечающих остальным степеням подвижности. Это значительно упрощает расчеты, так как уравнения (2.6), (2.7) становятся кусочно-линейными с постоянными параметрами на каждом интервале линейности.

При $l = \text{const}$ уравнения, описывающие вращение и перемещение стрелы в вертикальном направлении, разделяются и задачи управления этими движениями можно рассматривать независимо. Рассмотрим задачу управления вертикальным перемещением стрелы, которое описывается последними уравнениями (2.6), (2.7) с соответствующими краевыми (2.8) и начальными (2.9) условиями. Введение новых переменных $u = u_2 + \frac{1}{24}gx^4 - \frac{1}{6}gl^3x + \frac{1}{8}gl^4 + z - z_0$, $F = F_2 - (m+1)g$ приводит к следующей краевой задаче для $u = u(t, x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u(t, 0)}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial u(t, l)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^3 u(t, l)}{\partial x^3} = v \frac{\partial^4 u(t, l)}{\partial x^4} - F, \quad u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = 0, \quad v = l - 1 - m \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение $u(t, x)$ задачи (3.2) связано с исходными искомыми функциями $u_2(t, x)$, $z(t)$ соотношениями

$$u_2(t, x) = u(t, x) - 1/24 g x^4 + 1/8 g l^3 x - 1/8 g l^4 - u(t, l), \quad z(t) = z_0 + u(t, l) \quad (3.3)$$

Решение задачи (3.2), построенное методом разделения переменных [13], имеет вид

$$u(t, x) = \frac{1}{m+1} \int_0^t (t-\tau) F(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(l) X_n(x)}{r_n \lambda_n^2} I_n(t) \quad (3.4)$$

$$I_n(t) = \int_0^t \sin \lambda_n^2 (t-\tau) F(\tau) d\tau, \quad r_n = \int_0^l X_n^2(x) dx - \nu X_n^2(l)$$

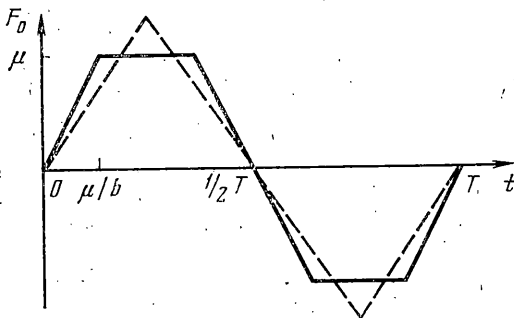
Здесь $\lambda_n (n=1, 2, \dots)$ — занумерованные в порядке возрастания положительные собственные значения, а $X_n(x)$ — соответствующие собственные функции задачи:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 X_n}{dx^4} &= \lambda_n^4 X_n, & \frac{d^2 X_n(0)}{dx^2} &= \frac{d^3 X_n(0)}{dx^3} = 0 \\ \frac{d X_n(l)}{dx} &= 0, & \frac{d^3 X_n(l)}{dx^3} &= \nu \frac{d^4 X_n(l)}{dx^4} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Отметим, что для собственных функций задачи (3.5) справедливо соотношение (условие ортогональности):

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx - \nu X_n(l) X_m(l) = 0 \quad (m \neq n)$$

Будем предполагать, что ряд (3.4) и необходимые его формальные (получаемые почленным дифференцированием) производные сходятся, что может быть обеспечено наложением на управляющую функцию F специальных условий.



Фиг. 2

Если, например, функция $F(t)$ кусочно-непрерывно дифференцируема и выполнено равенство $F(0) = 0$, то ряд (3.4) и его производная по времени сходятся абсолютно и равномерно (см. [10]).

Задача управления вертикальным перемещением стрелы манипулятора, сформулированная в терминах функции $u(t, x)$, состоит в выборе программного закона изменения силы $F(t)$, обеспечивающего выполнение соотношений

$$u(T, x) = z_* - z_0, \quad \partial u(T, x) / \partial t = 0, \quad x \in [0, l] \quad (3.6)$$

которые в силу (3.4) эквивалентны равенствам

$$I_0 = \int_0^T (T-\tau) F(\tau) d\tau = (m+1) (z_* - z_0); \quad \int_0^T F(\tau) d\tau = 0$$

$$I_n(T) = \int_0^T \sin \lambda_n^2 (T-\tau) F(\tau) d\tau = 0,$$

$$I_n(T) = \lambda_n^2 \int_0^T \cos \lambda_n^2 (T-\tau) F(\tau) d\tau = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

Найдем кусочно-непрерывно дифференцируемое управление $F=F_0(t)$ в момент времени $t=T$, такие, что

$$F_0(0) = 0, \quad F_0(t) = 0, \quad t \geq T \quad (3.8)$$

$$I_0 = (m+1)(z_* - z_0), \quad \int_0^T F_0(\tau) d\tau = 0, \quad I_1(T) = I_1'(T) = 0$$

Управление $F_0(t)$, удовлетворяющее условиям (3.8), обеспечивает приближенное приведение рассматриваемой системы в состояние (3.6), равенства (3.7) выполнены при этом только для $n=1$. По окончании процесса управления (при $t \geq T$) движение системы будет представлять малые колебания в окрестности номинального состояния (3.6), спектр которых не содержит основного тона, отвечающего значению $\lambda_n = \lambda_1$.

Рассмотрим функцию $F_0(t)$ вида

$$\begin{aligned} F_0(t) &= bt, \quad t \in [0, \Psi], \quad F_0(t) = \mu, \quad t \in [\Psi, T/2 - \Psi] \\ F_0(t) &= b(T/2 - t), \quad t \in [T/2 - \Psi, T/2 + \Psi] \\ F_0(t) &= -\mu, \quad t \in [T/2 + \Psi, T - \Psi] \\ F_0(t) &= b(t - T), \quad t \in [T - \Psi, T], \quad F_0(t) = 0, \quad t > T \\ \Psi &= \min(\mu/b, T/4), \quad \text{sign } \mu = \text{sign } b = \text{sign}(z_* - z_0) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Качественный характер зависимости $F_0(t)$ (3.9) иллюстрируется графиками на фиг. 2. Сплошная линия соответствует случаю $\mu/b < T/4$, штриховая — $\mu/b \geq T/4$.

Числа μ , b — параметры режима управления (3.9). Непосредственная проверка показывает, что функция $F_0(t)$ обеспечивает выполнение второго равенства (3.7) при любых μ , b , T . Вычислив интегралы I_0 и $I_n(t)$ (3.7) при $t \geq T$ для $F=F_0(t)$ вида (3.9), получим

$$\begin{aligned} I_0 &= I_0(b, T, \mu) = 1/2 b T \Psi [T/2 - \Psi] \\ I_n(t) &= (2b/\lambda_n^4) \cos \lambda_n^2 (t - T/2) [\sin \lambda_n^2 \Psi + \sin \lambda_n^2 (T/2 - \\ &- \Psi) - \sin(\lambda_n^2 T/2)] = (8b/\lambda_n^4) \cos[\lambda_n^2 (t - T/2)] \sin(\lambda_n^2 \Psi/2) \times \\ &\times \sin(\lambda_n^2 T/4) \sin[\lambda_n^2 (T/4 - \Psi/2)] \quad (t \geq T) \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из (3.10) непосредственно вытекает, что если $T = 4\pi k/\lambda_1^2$ ($k=1, 2, \dots$), то при любых значениях μ и b выполняется тождество $I_1(t) = 0$ для $t \geq T$ и, следовательно, выполняются два последних равенства (3.8). Найдем значения параметров μ , b , обеспечивающих при $T = 4\pi k/\lambda_1^2$ выполнение первого равенства (3.8). Разрешив уравнение $I_0(b, 4\pi k/\lambda_1^2, \mu) = (m+1)(z_* - z_0)$ относительно μ при условии $\mu/b < T/4 = \pi k/\lambda_1^2$, получим

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{b\pi k}{\lambda_1^2} \frac{[4b^2\pi^4 k^4 - 2\pi k \lambda_1^6 b(m+1)(z_* - z_0)]^{1/2}}{2\pi k \lambda_1^2} \text{sign } b \\ |b| &\geq (m+1) |z_* - z_0| \lambda_1^6 / (2\pi^3 k^3) \quad (k=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Анализ показывает, что величина $|\mu|$ монотонно убывает при возрастании параметров $|b|$ и k и справедливы предельные соотношения $\mu \rightarrow \lambda_1^4 (m+1) (z_* - z_0) / (4\pi^2 k^2)$, $b \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Решение уравнения $I_0(b, 4\pi k/\lambda_1^2, \mu) = (m+1)(z_* - z_0)$ относительно параметра b приводит к соотношениям

$$b = \frac{\mu^2 \lambda_1^2 2\pi k}{4\mu\pi^2 k^2 - (m+1)(z_* - z_0)\lambda_1^4},$$

$$\frac{\lambda_1^4 (m+1) |z_* - z_0|}{4\pi^2 k^2} < |\mu| < \frac{\lambda_1^4 (m+1) |z_* - z_0|}{2\pi^2 k^2} \quad (3.12)$$

$$b = \frac{(m+1)(z_* - z_0)\lambda_1^6}{2\pi^3 k^3}, \quad |\mu| > \frac{\lambda_1^4 (1+m) |z_* - z_0|}{2\pi^2 k^2}$$

Значения k и μ из (3.11) определяются неоднозначно. При практической реализации режимов управления роботом желательно по возможности минимизировать время приведения схвата в заданное положение. Разрешив неравенство (3.11) относительно k , получим

$$k = d + i - 1, \quad \{d\} = 0, \quad k = [d] + i, \quad \{d\} \neq 0 \quad (i=1, 2, \dots) \quad (3.13)$$

$$d = (\lambda_1^2/\pi) (1/2(m+1)(z_* - z_0)/b)^{1/2}$$

Квадратные и фигурные скобки в (3.13) и в дальнейшем обозначают соответственно целую и дробную части заключенного в них выражения.

Из (3.13) вытекает, что наименьшее время $T = T_{\min}$, необходимое для приведения системы из начального состояния в состояние, характеризующееся равенствами (3.8), при помощи управлений вида (3.9) с заданным значением параметра b равно

$$T_{\min} = 4\pi d/\lambda_1^2, \quad \{d\} = 0; \quad T_{\min} = 4\pi([d] + 1)/\lambda_1^2, \quad \{d\} \neq 0 \quad (3.14)$$

Из (3.3), (3.4), (3.10) вытекает, что величины, характеризующие остаточные колебания стрелы после окончания процесса управления и определяющие точность приведения рассматриваемой системы в требуемое положение, ограничены сверху значениями, пропорциональными $|b|$:

$$|z(t) - z_* + z_0| \leq A_1 |b|, \quad |z'(t)| \leq A_2 |b|$$

$$|u_2(t, x) + 1/24 g x^4 - 1/6 g t^3 x + 1/8 g t^4| \leq A_3 |b| \quad (3.15)$$

$$|\partial u_2(t, x)/\partial t| \leq A_4 |b|, \quad t \geq T, \quad x \in [0, l], \quad A_i > 0 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

Коэффициенты A_i ($i=1, 2, 3, 4$) в (3.15) могут быть вычислены суммированием на ЭВМ соответствующих рядов [10].

На основании (3.11), (3.14), (3.15) можно предложить следующий алгоритм расчета параметров режима управления (3.9), обеспечивающего требуемую точность позиционирования манипулятора. По заданным параметрам, характеризующим точность позиционирования (максимально допустимые амплитуды и скорости остаточных колебаний), при помощи (3.15) определяется величина b , после чего по формулам (3.11), (3.14) определяются величина μ и время процесса управления $T = T_{\min}$.

4. Рассмотрим кратко задачу управления поворотом стрелы при неизменном ее вылете. Это движение описывается первыми уравнениями (2.6), (2.7) при $l' = 0$ с соответствующими краевыми (2.8) и начальными (2.9) условиями. Введение новой переменной $v(t, x) = u_1(t, x) - (a+l-x)\varphi(t)$ приводит к следующей задаче для $v(t, x)$ с краевыми и начальными условиями

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v(t, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v(t, 0)}{\partial x^3} = 0, \quad v(t, l) = -a \frac{\partial v(t, l)}{\partial x}$$

$$v(0, x) = \frac{\partial v(0, x)}{\partial t} = 0 \quad (4.1)$$

$$a \frac{\partial^3 v(t, l)}{\partial x^3} - I_* \frac{\partial^5 v(t, l)}{\partial x^5} + \frac{\partial^2 v(t, l)}{\partial x^2} = M$$

$$I_* = I + \int_l^1 (a+l-x)^2 dx$$

Решение задачи (4.1), построенное методом разделения переменных, имеет вид

$$v(t, x) = \frac{(x-a-l)}{I_*} \int_0^t (t-\tau) M(\tau) d\tau - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(l) X_n(x)}{\lambda_n^2 a r_n} I_n(t) \quad (4.2)$$

$$I_n(t) = \int_0^t \sin \lambda_n^2 (t-\tau) M(\tau) d\tau, \quad r_n = \int_0^l X_n^2(x) dx + \frac{I_*}{a^2} X_n^2(l)$$

$$I_* = I + \int_0^1 (l+a-x)^2 dx$$

Здесь λ_n ($n=1, 2, \dots$) — занумерованные в порядке возрастания положительные собственные значения, а $X_n(x)$ — соответствующие собственные функции задачи

$$\frac{d^4 X_n}{dx^4} = \lambda_n^4 X_n, \quad \frac{d^2 X_n(0)}{dx^2} = \frac{d^3 X_n(0)}{dx^3} = 0$$

$$X_n(l) = -a \frac{dX_n(l)}{dx}, \quad a \frac{d^3 X_n(l)}{dx^3} - I_* \frac{d^5 X_n(l)}{dx^5} + \frac{d^2 X_n(l)}{dx^2} = 0$$

Для функций $X_n(x)$ справедливо условие ортогональности в форме

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx + \frac{I_*}{a^2} X_n(l) X_m(l) = 0 \quad (m \neq n)$$

Решение (4.2) задачи (4.1) связано с решением исходной задачи (2.6)–(2.9) для переменных $u_1(t, x)$, $\varphi(t)$, описывающих динамику поворота упругой стрелы, следующими соотношениями:

$$\varphi(t) = \frac{\partial v(t, l)}{\partial x} = \frac{1}{I_*} \int_0^t (t-\tau) M(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^2(l)}{\lambda_n^2 a^2 r_n} I_n(t)$$

$$u_1(t, x) = v(t, x) + (a+l-x) \frac{\partial v(t, l)}{\partial x} = \quad (4.3)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(l) I_n(t)}{\lambda_n^2 a r_n} \left[(a+l-x) \frac{X_n(l)}{a} - X_n(x) \right]$$

Задачу управления поворотом стрелы с учетом (3.1), (4.3) можно сформулировать так: найти программный закон изменения момента $M(t)$, обеспечивающий в некоторый конечный момент времени $t=T$ выполнение соотношений

$$\int_0^T (T-\tau) M(\tau) d\tau = I_* \varphi_*, \quad \int_0^T M(\tau) d\tau = 0, \quad I_n(T) = \int_0^T \sin \lambda_n^2 (T-\tau) M(\tau) d\tau = 0 \quad (4.4)$$

$$I_n^*(T) = \lambda_n^2 \int_0^T \cos \lambda_n^2 (T-\tau) M(\tau) d\tau = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

Равенства (4.4) с точностью до обозначений совпадают с соотношениями (3.7), характеризующими задачу об управлении вертикальным перемещением стрелы. Поэтому изложенная методика расчета режима управления вертикальным перемещением целиком переносится на случай поворота стрелы.

Отметим, что при повороте стрелы управляющая сила $F_1(t)$, ориентированная вдоль стрелы, в соответствии с (2.6) отлична от нуля и равна

$$F_1(t) = -\varphi''(t) \int_0^1 (a+l-x) dx$$

Авторы благодарят Л. Д. Акуленко за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Book W. J., Maizza-Neto O., Whitney D. E. Feedback control of two beam, two joint systems with distributed flexibility.— Trans. ASME. Ser. G. J. Dynamic Systems, Measurement and Control, 1975, v. 97, No. 4, p. 424–431.
2. Truckenbrodt A. Regelung eines flexiblen manipulatorarms.— Z. angew. Math. und Mech., 1978, B. 58, H. 6, S. T184–T185.
3. Maizza-Neto O. Modal approach for modelling flexible manipulators: experimental results.— In: Automatic control in Space. Proc. 8th IFAC Symposium. Oxford, e. a.: Pergamon press, 1980, p. 405–411.
4. Юдин В. И. Анализ колебаний стрелы манипулятора.— Прикл. механика, 1980, т. 6, № 10, с. 108–115.
5. Лакота Н. А., Рахманов Е. В., Шведов В. Н. Управление упругим манипулятором на траектории.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 2, с. 53–59.
6. Вукобратович М., Поткопяк В. Численный метод моделирования динамики манипулятора с упругими свойствами.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 131–141.
7. Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3, с. 118–124.
8. Черноусько Ф. Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 142–152.
9. Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. Об управляемом вращении упругого стержня.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 4, с. 587–595.
10. Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. Об управлении поворотом упругого звена манипулятора.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1984, № 1, с. 167–173.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
12. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.I.1983