МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1984

УДК 534.014

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

РЕЗНИКОВ Л. М.

Известны [1, 2] формулы и численные методы, позволяющие определять дисперсии перемещений и скоростей линейных систем при стационарных случайных воздействиях. В данной работе получены соотношения между корреляционными моментами скоростей отдельных точек механической системы, которые дают возможность сделать качественные выводы и в общем виде найти значения некоторых статистических характеристик при широкополосных возмущениях, не решая задачу статистической динамики для всей системы. В частных случаях данные результаты подтверждаются решениями уравнений Фоккера — Планка – Колмогорова, полученными [2, 3] при определенных ограничениях на силы демпфирования и внешние возмущения.

1. Уравнения колебаний многомассовой системы с вязким трением при случайных возмущениях типа белых шумов представим в виде

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{\cdot\cdot}(t)+\mathbf{H}_0\mathbf{x}^{\cdot}(t)+\mathbf{C}_0\mathbf{x}(t)=\mathbf{S}_0\boldsymbol{\psi}(t) \tag{1.1}$$

где $\mathbf{M}$, $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{C}_0$ — $n\times n$-матрицы инерционных, диссипативных и квазиупругих коэффициентов, $\mathbf{x}(t)$ — n-мерный вектор-столбец обобщенных координат, $\mathbf{S}_0$ — $n\times m$-матрица коэффициентов при возмущениях, $\boldsymbol{\psi}(t)$ — m-мерный вектор белых шумов с корреляционной матрицей $\langle\boldsymbol{\psi}(t)\boldsymbol{\psi}'(\tau)\rangle=\mathbf{Q}\delta(t-\tau)$, $\mathbf{Q}$ — $m\times m$-числовая матрица, $\delta(\cdots)$ — дельта-функция Дирака; штрих — признак транспонирования; угловые скобки — символ усреднения по ансамблю реализаций.

Умножим справа матричное уравнение (1.1) на $\mathbf{x}^{\cdot\prime}(t)$, усредним по ансамблю реализаций и вычислим следы матриц в левой и правой частях полученного уравнения. В результате

$$\mathrm{Sp}\,(\mathbf{M}\mathbf{I}_{21}+\mathbf{H}_0\mathbf{I}_{11}+\mathbf{C}_0\mathbf{I}_{01})=\mathrm{Sp}\,[\mathbf{S}_0\langle\boldsymbol{\psi}(t)\mathbf{x}^{\cdot\prime}(t)\rangle] \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{I}_{01}=\langle\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^{\cdot\prime}(t)\rangle$, $\mathbf{I}_{11}=\langle\mathbf{x}^{\cdot}(t)\mathbf{x}^{\cdot\prime}(t)\rangle$, $\mathbf{I}_{21}=\langle\mathbf{x}^{\cdot\cdot}(t)\mathbf{x}^{\cdot\prime}(t)\rangle$ — матрицы корреляционных моментов координат и их производных.

Матрицы $\mathbf{I}_{01}$, $\mathbf{I}_{21}$ кососимметричны, поэтому при симметричных $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}_0$ левая часть уравнения (1.2) равна $\mathrm{Sp}\,(\mathbf{H}_0\mathbf{I}_{11})$. Умножим уравнение (1.1) справа на $\boldsymbol{\psi}'(\tau)$, усредним по ансамблю реализаций и, поскольку в правой части уравнения оказывается дельта-функция Дирака, определим

$$\langle\mathbf{x}^{\cdot}(t)\boldsymbol{\psi}'(t)\rangle=0{,}5[\langle\mathbf{x}^{\cdot}(t-0)\boldsymbol{\psi}'(t)\rangle+\langle\mathbf{x}^{\cdot}(t+0)\boldsymbol{\psi}'(t)\rangle]=0{,}5\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}_0\mathbf{Q}$$

$$\mathrm{Sp}\,(\mathbf{H}_0\mathbf{I}_{11})=0{,}5\,\mathrm{Sp}\,(\mathbf{S}_0\mathbf{Q}\mathbf{S}_0'\mathbf{M}^{-1}) \tag{1.3}$$

Полученное соотношение между корреляционными моментами скоростей точек системы, соединенных вязкими демпферами, имеет четкий физический смысл. Левая часть выражения (1.3) представляет математическое ожидание энергии, рассеянной системой в единицу времени, правая часть соответствует математическому ожиданию работы возмущающих сил, т. е. поступающей в систему за то же время энергии.

2. При действии на систему через упруговязкие элементы кинематических возмущений уравнения колебаний имеют вид

$$\mathbf{M}\mathbf{x}^{\cdot\cdot}(t)+\mathbf{H}_0\mathbf{x}^{\cdot}(t)+\mathbf{C}_0\mathbf{x}(t)=\mathbf{S}_{01}\boldsymbol{\psi}^{\cdot}(t)+\mathbf{S}_0\boldsymbol{\psi}(t) \tag{2.1}$$

где $\mathbf{S}_{01}$, $\mathbf{S}_0$ — $n{\times}m$-матрицы коэффициентов. Если $\boldsymbol{\psi}(t)$ — вектор белых шумов, то дисперсии скоростей кинематически возбуждаемых масс обращаются в бесконечность ввиду идеализации рассматриваемых возмущений. Конечные значения статистических характеристик получаются для расширенного вектора обобщенных координат

$$\mathbf{y}(t)=\left\| \begin{matrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^{\cdot}(t)-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}_{01}\boldsymbol{\psi}(t) \end{matrix} \right\|$$

Воспользуемся уравнением (1.2) [4], полагая при стационарных колебаниях $F(t)=1$, $\mathbf{I}^{\cdot}(t)=\mathbf{0}$. Тогда

$$\mathbf{BI}+\mathbf{IB}'=-\mathbf{DQD}' \tag{2.2}$$

$$\mathbf{B}=\left\| \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{H} \end{matrix} \right\|,\quad \mathbf{I}=\left\| \begin{matrix} \mathbf{I}_{00} & \mathbf{I}_{01} \\ \mathbf{I}_{01}' & \mathbf{I}_{11} \end{matrix} \right\|,\quad \mathbf{D}=\left\| \begin{matrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}-\mathbf{HS}_1 \end{matrix} \right\|,\quad \begin{matrix} \mathbf{C}=\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}_0\mathbf{G}'^{-1} \\ \mathbf{S}=\mathbf{G}^{-1}\mathbf{S}_0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}_0\mathbf{G}'^{-1},\quad \mathbf{S}_1=\mathbf{G}^{-1}\mathbf{S}_{01},\quad \mathbf{I}_{00}=\langle\mathbf{q}(t)\mathbf{q}'(t)\rangle,\quad \mathbf{q}(t)=\mathbf{G}'\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{I}_{01}=\langle\mathbf{q}(t)[\mathbf{q}^{\cdot}(t)-\mathbf{S}_1\boldsymbol{\psi}(t)]'\rangle,\quad \mathbf{I}_{11}=\langle[\mathbf{q}^{\cdot}(t)-\mathbf{S}_1\boldsymbol{\psi}(t)][\mathbf{q}^{\cdot}(t)-\mathbf{S}_1\boldsymbol{\psi}(t)]'\rangle$$

где $\mathbf{G}$ — верхняя треугольная матрица, полученная полярным разложением симметричной матрицы $\mathbf{M}=\mathbf{GG}'$. Можно показать, что в этом случае

$$\langle\mathbf{q}(t)\boldsymbol{\psi}'(t)\rangle=0{,}5\mathbf{S}_1\mathbf{Q},\quad \langle\mathbf{q}^{\cdot}(t)\boldsymbol{\psi}'(t)\rangle=0{,}5\mathbf{SQ},\quad \mathrm{Sp}\,\mathbf{I}_{01}=-0{,}5\,\mathrm{Sp}\,(\mathbf{S}_1\mathbf{QS}_1')$$

$$\mathrm{Sp}\,(\mathbf{CI}_{01})=-0{,}5\,\mathrm{Sp}\,(\mathbf{CS}_1\mathbf{QS}_1'),$$

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{HI}_{11})=0{,}5\,\mathrm{Sp}[\mathbf{CS}_1\mathbf{QS}_1'+(\mathbf{S}-\mathbf{HS}_1)\mathbf{Q}(\mathbf{S}-\mathbf{HS}_1)'] \tag{2.3}$$

При решении некоторых практических задач [5] внешние воздействия моделируют функциями, первая или вторая производные которых являются белыми шумами. В этом случае дифференцированием уравнения движения приводятся к виду (1.1), (2.1), после чего справедливы выражения (1.3), (2.3), но для производных соответствующего порядка от обобщенных координат.

3. Рассмотрим одномерную континуальную систему, опертую в отдельных точках на упруговязкие элементы. Нагрузка представлена произведением функции $p(\zeta)$ аргумента ζ на процесс $\psi(t)$ типа белого шума с корреляционной функцией $Q\delta(t-\tau)$. Масса системы распределена по закону $m(\zeta)$. Пренебрегая собственным демпфированием системы и учитывая лишь вязкое трение в опорах, получаем

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{H}_0\mathbf{I}_{11})=0{,}5Q\int\limits_{\chi}\frac{p^2(\zeta)}{m(\zeta)}d\zeta \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{H}_0$ — матрица коэффициентов вязкого трения в опорах, $\mathbf{I}_{11}=\langle\mathbf{x}^{\cdot}(t)\mathbf{x}^{\cdot\prime}(t)\rangle$ — матрица корреляционных моментов скоростей точек опирания системы, χ — область изменения аргумента ζ. Для двумерной континуальной системы, дискретно опирающейся на упруговязкие элементы, в этом случае необходимо одномерный интеграл в правой части (3.1) заменить двумерным.

4. Для систем с упругодиссипативными нелинейностями полученные формулы справедливы в рамках точности метода статистической линеаризации. Необходимо лишь учесть зависимость коэффициентов линеаризации, если они входят в матрицу $\mathbf{H}_0$, от статистических характеристик колебаний системы. Некоторые результаты можно получить и без статистической линеаризации. Предположим, что каждая из нелинейностей

$f_i(x_i,\ x_i^{\cdot})$, $i=\overline{1,\ n}$ зависит лишь от одной обобщенной координаты и ее производной. Тогда в левой части выражения (1.3) добавится слагаемое $\Sigma\langle f_i(x_i,\ x_i^{\cdot})x_i^{\cdot}\rangle$, $i=\overline{1,\ n}$, которое для упругих нелинейностей при стационарных колебаниях равно $\Sigma d/dt\langle \int f_i(x_i)dx_i\rangle=0$. Следовательно, формула (1.3) справедлива независимо от наличия упругих нелинейностей между любыми двумя массами системы. Для диссипативных нелинейностей дополнительное слагаемое в левой части (1.3) равно $\Sigma\langle f_i(x_i^{\cdot})x_i^{\cdot}\rangle$, а при использовании метода статистической линеаризации — $\Sigma h_i\,(\sigma_{x_i^{\cdot}})\,\sigma^2_{x_i^{\cdot}}$, где $h_i\,(\sigma_{x^{\cdot}_i})$ — коэффициент линеаризации i-й нелинейности, $\sigma_{x^{\cdot}_i}$ — стандарт производной i-й обобщенной координаты, $i=\overline{1,\ n}$.

Если внешние возмущения — не белые шумы, а случайные процессы с конечной дисперсией, получить аналогичные формулы не удается. Широкополосные возмущения заменяют [2] белыми шумами соответствующей интенсивности, затем можно использовать приведенные соотношения.

Отметим, что вследствие равенства Парсеваля можно получить подобные выражения для оценки интегралов на полубесконечном интервале времени от квадратов скоростей отдельных точек линейных или линеаризованных систем, на которые действуют мгновенные импульсы. Указанная выше энергетическая интерпретация свидетельствует о том, что и для определенного класса нелинейных систем, а также в случае заданных начальных отклонений от равновесного положения сосредоточенных масс применимы формулы для вычисления некоторых интегральных квадратичных оценок качества переходных процессов.

5. В качестве примера рассмотрим систему из n масс, соединенных упругими элементами. Единственный демпфер вязкого трения с коэффициентом h расположен между какими-либо двумя массами. Колебания возбуждаются нормальными белыми шумами, которые действуют на отдельные массы с коэффициентами s_i ($i=\overline{1,\ n}$ — номера сосредоточенных масс m_i). Согласно (1.3), дисперсия относительной скорости точек, между которыми находится демпфер, $\sigma_{x^{\cdot}}^2=(2h)^{-1}\Sigma s_i^2/m_i$ не зависит от жесткостей упругих элементов, значений ненагруженных масс, числа степеней свободы, расположения нагруженных масс и вязкого демпфера в системе. Минимум этой дисперсии достигается оптимизацией соотношения нагруженных масс при заданной их сумме. Присоединение любой упругой нелинейности, обладающей потенциалом, и произвольной ненагруженной упругой системы без демпфирования к заданной не влияет на $\sigma_{x^{\cdot}}^2$. В частности, установка динамических гасителей без демпфирования не может изменить корреляционных моментов относительных скоростей демпфированных звеньев заданной системы, и поэтому не эффективна при широкополосных случайных воздействиях.

Если демпфер вязкого трения заменить демпфером сухого трения с характеристикой $F\,\mathrm{sign}\,x^{\cdot}$, то для относительной скорости точек, между которыми находится демпфер, получим

$$\langle|x^{\cdot}|\rangle=(2F)^{-1}\sum_{i=1}^{n}s_i^2/m_i,\quad \sigma_{x^{\cdot}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(2F)^{-1}\sum_{i=1}^{n}s_i^2/m_i$$

Стандарт $\sigma_{x^{\cdot}}$ найден методом статистической линеаризации. Как и в линейном случае, приведенные значения не зависят от целого ряда параметров системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1960. 883 с.
2. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.
3. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
4. *Резников Л. М.* К исследованию нестационарных случайных колебаний многомассовых систем.— Прикл. механика, 1979, т. 15, № 7, с. 88—94.
5. *Ушкалов В. Ф., Резников Л. М., Редько С. Ф.* Статистическая динамика рельсовых экипажей. Киев: Наук. думка, 1982. 359 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
17.II.1983