**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1984**

УДК 531.38

О ВРАЩЕНИИ ТЕЛА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

САМСОНОВ В. А.

Задача о движении осесимметричного тела, имеющего неподвижную точку и находящегося под действием сил, порожденных эффектом Барнетта – Лондона, сведена к квадратуре. Дано описание перманентных вращений и регулярных прецессий тела.

1. Рассмотрим задачу о вращении динамически симметричного тела с неподвижной точкой в однородном магнитном поле с вектором напряженности H. Известно [1], что любое вращающееся тело при определенных условиях приобретает магнитный момент $\mathbf{B}=n\Omega$, пропорциональный угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ тела. Таким образом, воздействие магнитных сил на тело сводится к паре сил с моментом $\mathbf{M}=n(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{H})$. Уравнения движения тела (в векторной форме) $\mathbf{K}^{\cdot}=\mathbf{M}$, где $\mathbf{K}$ – момент количества движения тела относительно неподвижной точки, имеют очевидные интегралы энергии и площадей (T – кинетическая энергия тела): $T={}^1/_2(\mathbf{K}\cdot\Omega)=h=\mathrm{const}$, $(\mathbf{K}\cdot\mathbf{H})=vH=\mathrm{const}$.

Кроме того, имеет место еще один первый интеграл, для вывода которого удобно ввести традиционные углы Эйлера: ϑ – угол между осью z симметрии тела и вектором $\mathbf{H}$; φ, ψ – углы собственного вращения и прецессии. Обозначим через K_z проекцию вектора $\mathbf{K}$ на ось z и спроектируем уравнение движения на эту ось. Получим $K_z^{\cdot}=k\sin\vartheta\vartheta^{\cdot}$, $k=nH$, откуда немедленно вытекает

$$K_z+k\cos\vartheta=u=\mathrm{const} \tag{1.1}$$

Указанных интегралов достаточно, чтобы свести рассматриваемую задачу к квадратуре. Перепишем в переменных Эйлера интеграл энергии (A, C – моменты инерции тела)

$$A\vartheta^{\cdot 2}+A\psi^{\cdot 2}\sin^2\vartheta+C(\varphi^{\cdot}+\psi^{\cdot}\cos\vartheta)^2=2h \tag{1.2}$$

интеграл площадей

$$A\psi^{\cdot}\sin^2\vartheta+C(\varphi^{\cdot}+\psi^{\cdot}\cos\vartheta)\cos\vartheta=v \tag{1.3}$$

и интеграл (1.1):

$$C(\varphi^{\cdot}+\psi^{\cdot}\cos\vartheta)+k\cos\vartheta=u \tag{1.4}$$

Исключив из (1.2) $\varphi^{\cdot}$ и $\psi^{\cdot}$, имеем

$$A\vartheta^{\cdot 2}+W(\vartheta)=2h,\qquad W=(v-u\cos\vartheta+k\cos^2\vartheta)^2/(A\sin^2\vartheta)+(u-k\cos^2\vartheta)^2/C$$

После преобразований получим

$$AC^{1/2}x^{\cdot}=\pm(f(x))^{1/2},\quad x=\cos\vartheta,\quad f(x)=2hCA(1-x^2)-C[v-(u-kx)x]^2-$$
$$-A(u-kx)^2(1-x^2),\qquad f(\pm1)\leqslant0 \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) похоже на аналогичное уравнение в известном случае Лагранжа, но отличается от него тем, что степень полинома $f(x)$ равна не трем, как в случае Лагранжа, а четырем.

Пусть $v-u+k\neq 0$, $v+u-k\neq 0$. Если $A>C$, то на интервале $-1<x<1$ может существовать (как и в случае Лагранжа) лишь один отрезок, на котором $f(x)\geqslant 0$, и этот отрезок определяет область допустимого изменения угла ϑ.

Если же $C>A$ (более интересный для прикладной гироскопии случай), то таких отрезков может быть два. Для этого нужно, чтобы все четыре корня многочлена $f(x)$ разместились на интервале $-1<x<1$.

2. Интерпретацию движения удобно проводить в пространстве ϑ, u, v построением множества стационарных движений тела [2], т. е. таких движений, для которых $\vartheta(t)=\vartheta(t_0)=\mathrm{const}$ $(0\leqslant\vartheta\leqslant\pi)$.

Очевидно, что стационарные движения такого типа — регулярные прецессии или перманентные вращения. Уравнение стационарных движений имеет вид

$$W'(\vartheta)=(v-u\cos\vartheta+k\cos^2\vartheta)\,[u-v\cos\vartheta-k\cos\vartheta(1+\sin^2\vartheta)\,]/(A\sin^3\vartheta+$$

$$+(u-k\cos\vartheta)k\sin\vartheta\,/\,C=0 \tag{2.1}$$

Функция W' и уравнение (2.1) при $\vartheta=0;\ \pi$ имеют особенности. Нетрудно проверить, что одна из них исчезает, если $v+k\pm u=0$.

Каждой точке линии $v+k-u=0$ соответствует, по крайней мере, одно стационарное движение, для которого $\vartheta=0$. Кроме того, каждой точке линии $v+k+u=0$ отвечает, по крайней мере, одно стационарное движение, для которого $\vartheta=\pi$. Эти типы движений представляют собой перманентные вращения тела вокруг неподвижной оси симметрии, если она коллинеарна вектору напряженности магнитного поля. Простыми вычислениями устанавливаем, что в случае $C>A$ оба перманентных вращения устойчивы при любых значениях параметра v (или u), т. е. при любой угловой скорости вращения.

В случае $C<A$ перманентные вращения $\vartheta=0$ и $\vartheta=\pi$ устойчивы лишь при $v\leqslant v_1$ и при $v\geqslant v_2$, где v_1, v_2 $(v_1<v_2)$ — корни уравнения $v^2+vk(4\varkappa-2)+k^2=0$, $\varkappa=A\,/\,C$.

Решение уравнения (2.1) зависит от двух параметров $\vartheta=\vartheta_1(u,\ v)$. Вообще говоря, зависимость $\vartheta_1(u,\ v)$ многозначна, так как уравнение (2.1) периодично по ϑ. Интерес представляет лишь область $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$, но и в этой области зависимость $\vartheta_1(u,\ v)$ может оказаться многозначной.

Используя информацию об областях допустимого изменения угла ϑ, можно показать, что в случае $\varkappa>1$ каждой точке плоскости u, $v\,(v+k\neq\pm u)$ соответствует лишь один режим регулярной прецессии с некоторым значением угла нутации $\vartheta\,(\sin\vartheta\neq 0)$ и этот режим устойчив. Семейство линий уровня $\vartheta_1(u,\ v)=\mathrm{const}$ на плоскости u, v представляет собой набор непересекающихся гипербол. Линии $\vartheta_1(u,\ v)=\vartheta_*$ и $\vartheta_1(u,\ v)=\pi-\vartheta_*$ расположены симметрично относительно оси v. При $\vartheta={}^1/{}_2\pi$ гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых $u=0$ и $v=v_*=-k\varkappa$.

В случае $\varkappa<1$, как уже указывалось, для некоторых значений постоянных интегралов (1.3), (1.4) возможны по два интервала допустимых значений угла нутации ϑ. Следовательно, для этих значений параметров u, v существуют три стационарных движения с различными значениями угла нутации. Поскольку асимптоты гипербол монотонно поворачиваются, то пересечение гипербол, отвечающих различным значениям угла нутации, возможно лишь в некоторой ограниченной области S на плоскости uv. Область S включает в себя треугольник $u+v+k>0$, $v-u+k>0$, $v+\varkappa k<0$, через каждую точку которого заведомо проходит три гиперболы.

Для завершения описания семейства прецессий необходима информация об угловых скоростях $\varphi^{\boldsymbol\cdot}$, $\psi^{\boldsymbol\cdot}$. Вдоль линии $\vartheta_1(u,\ v)=\vartheta_*$ $(\vartheta_*\neq 0;\ {}^1/{}_2\pi;\ \pi)$ сохраняется знак угловой скорости прецессии. Область $|u|>|v+k|$ $(|u|\gg|v_*|)$ содержит так называемые медленные прецессии, однако угловая скорость прецессии $\psi^{\boldsymbol\cdot}$ здесь конечна $\psi^{\boldsymbol\cdot}\approx -k\,/\,C$.

В этом состоит отличие движения рассматриваемого объекта от обычного гироскопа, для которого $\psi^{\cdot}\approx 0$ в отмеченной области.

Для так называемых быстрых прецессий (область $|v+k|>|u|$, $|v|\gg\gg|v_*|$) справедлива асимптотическая формула $\psi^{\cdot}=v/A-k\cos^2\vartheta(1/A-1/C)$.

Определенный интерес представляют те прецессии, для которых $\varphi^{\cdot}=0$ (так называемые нетривиальные перманентные вращения). Очевидно, что в рассматриваемом случае эти вращения отвечают лишь значению $\vartheta={}^1/_2\pi$ и изображаются линией $u=0$. В случае $\varkappa>1$ эти вращения устойчивы, а при $\varkappa<1$ устойчивы лишь при $v<v_3$ и при $v>v_4$, где v_3, v_4 $(v_3<v_4)$ – корни уравнения $v^2+2kv+\varkappa k^2=0$.

Рассмотренная задача допускает обобщение. К силам магнитной природы можно добавить любые силы, имеющие силовую функцию $U(\vartheta)$. К таким силам относится, например, однородное силовое поле, направление которого коллинеарно направлению вектора $\mathbf{H}$.

В этом случае несколько иной вид приобретает интеграл энергии, а именно: $(\mathbf{K}\cdot\Omega)-2U=h$.

3. Предположим, что момент магнитных сил имеет структуру $\mathbf{M}==(I\Omega\times\mathbf{H})$, где I — симметричный тензор, который принимает диагональный вид в главных осях инерции тела, причем две его компоненты равны между собой и отличны от третьей (которая соответствует оси z). Считаем, без нарушения общности, что компоненты тензора I равны 1, 1, b.

В рассматриваемой постановке сохраняется интеграл типа интеграла (1.1). Нетрудно видеть, что и уравнение изменения энергии $T^{\cdot}==\alpha K_z\sin\vartheta\vartheta^{\cdot}$ $(\alpha=H(b-1)/C)$ в этих условиях также интегрируется:

$$T=\alpha({}^1/_4H\cos 2\vartheta-u\cos\vartheta)+h \qquad (3.1)$$

И в этом случае задача интегрирования уравнений движения сводится к квадратуре.

Перечисленные выше интегралы имеют различную методическую основу. Интеграл (1.3) представляет собой пример классического циклического интеграла.

Обобщение силы п. 1 относятся к типу гироскопических сил [3]. Более того, они допускают обобщенную силовую функцию $(U=k\varphi^{\cdot}\cos\vartheta)$ как и некоторые другие силы электромагнитной природы [4]. Поэтому интеграл (1.4) — пример обобщенного циклического интеграла [3].

В п. 3 к силе, допускающей обобщенную силовую функцию U, добавлены дополнительные создающие моменты лишь относительно оси x, которая ортогональна плоскости, образованной вектором $\mathbf{H}$ и осью z. Поэтому сохраняются интегралы (1.3) и (1.4). Однако эти дополнительные силы непотенциальны, а обобщенный интеграл энергии (3.1), как и аналогичный интеграл, указанный в работе [5], относится к типу совокупных интегралов [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1966. 624 с.
2. *Самсонов В. А.* О стационарных движениях тяжелого симметричного гироскопа в невесомом кардановом подвесе: Сб. научн.-методич. ст. по теорет. механике. М.: Высш. школа, 1979, № 9, с. 65–69.
3. *Румянцев В. В.* О влиянии гироскопических сил на устойчивость стационарного движения.– ПММ, 1975, т. 39, в. 6, с. 963–973.
4. *Ольховский И. И.* Курс теоретической механики для физиков. М.: Изд-во МГУ, 1974. 569 с.
5. *Самсонов В. А.* О стационарных движениях симметричного твердого тела.– В кн.: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1982, с. 72–79.
6. *Чаплыгин С. А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая.– В кн.: Собр. соч. Т. 1. М.– Л.: Гостехиздат, 1948, с. 194–311.

Москва

Поступила в редакцию
5.III.1983