

УДК 531.53

**ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТОХАСТИЧЕСКИХ
КОЛЕБАНИЙ РЕГУЛИРУЕМОГО МАЯТНИКА**

ЛАНДА П. С., СТРАТОНОВИЧ Р. Л.

Известно [1-7], что во многих динамических системах в широкой области параметров возникают стохастические автоколебания при отсутствии случайных воздействий. В фазовом пространстве этим автоколебаниям в установившемся режиме соответствует целая область, получившая название странного аттрактора. Как правило, стохастические автоколебания исследуются путем численных экспериментов на ЭВМ, что обусловлено невозможностью аналитического решения соответствующих нелинейных уравнений. Однако такое решение не всегда нужно. Часто оказывается достаточным знать лишь статистические характеристики исследуемого процесса, например стационарное распределение вероятностей. Как показано для некоторого класса динамических систем, допускающих описание экспоненциально неустойчивым одномерным точечным отображением [4, 8, 9], такое распределение существует и не зависит от начального распределения. Можно ожидать, что оно должно существовать и для других систем, генерирующих стохастические автоколебания.

Чтобы в общем случае найти стационарное распределение, удобно рассмотреть соответствующее исследуемой системе точечное отображение: [5] $\bar{x}=f(x)$ и вычислить стационарное распределение $p(x)$ для этого отображения, которое удовлетворяет уравнению

$$p(x) = \int \delta(x-f(y)) p(y) dy \quad (1)$$

Используя свойства δ -функции, из (1) получаем линейное функциональное уравнение

$$p(x) = \sum_{i=1}^n p(y_i(x)) |Dy_i(x)/Dx| \quad (2)$$

где $y_i(x)$ — i -й корень уравнения $f(y)=x$, $Dy_i(x)/Dx$ — якобиан преобразования от x к y .

Уравнение (2) аналогично уравнению (7.45) из [5] для плотности вероятностей предыдущей и последующей точек. Решая точно или приближенно уравнение (2), можно найти $p(x)$, а по нему вычислить распределение во всей области странного аттрактора. В некоторых случаях для отыскания стационарного распределения можно использовать более простые приемы [10].

В [4] рассмотрена простейшая автоколебательная система, генерирующая стохастические колебания. Это — регулируемый маятник с отрицательным трением (таким маятником может служить, например, маятник Фроуда [11]), уравнение движения которого в отсутствие регулирования удобно записать в виде

$$x'' - 2\delta x' + (1 + \delta^2)x = 0 \quad (3)$$

где δ — безразмерный коэффициент нарастания колебаний. Движение этого маятника регулируется таким образом, что при $x=0$, $x' \geq a$, где a — некоторое положительное число, маятнику сообщается импульс, мгновенно уменьшающий его скорость на некоторую величину q . В целом движение

такого маятника может быть описано уравнением

$$\ddot{x} - 2\delta\dot{x} + (1+\delta^2)x = -q\vartheta(x^*(t-\varepsilon) - a)x^*\delta(x) \quad (4)$$

где $\vartheta(z) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign } z)$, ε — некоторая положительная малая величина, характеризующая запаздывание ϑ -функции, нужное для того, чтобы ее значение вычислялось до момента скачка.

Покажем, что уравнение (4) действительно соответствует описанным выше колебаниям регулируемого маятника. Правая часть этого уравнения, отличающая его от уравнения (3), должна приводить к скачку скорости при $x=0$ и $x \geq a$. Проинтегрируем обе части уравнения (4) от $t_0 - \Delta t$ до $t_0 + \Delta t$, где t_0 — момент прохождения координатой x положения равновесия $x=0$, а $\Delta t \ll \varepsilon$. В силу последнего условия функцию $\vartheta(x^*(t-\varepsilon) - a)$ можно вынести за знак интеграла. Учитывая, что за время Δt координата x изменится мало, а также, что $x^* dt = dx$, получим соотношение, описывающее условие скачка

$$x^*(t_0 + \Delta t) - x^*(t_0 - \Delta t) = q\vartheta(x^*(t_0 - \varepsilon) - a) \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \delta(x) dx = -q\vartheta(x^*(t_0 - \varepsilon) - a)$$

Для рассматриваемой системы при определенных соотношениях между параметрами удастся точно вычислить стационарное распределение вероятностей в фазовом пространстве x, \dot{x} .

Решение уравнения (3) можно записать в виде

$$x = A \sin \Phi, \quad \dot{x} = A\delta \sin \Phi + A \cos \Phi \quad (5)$$

где $\Phi = t + \varphi_0$, $A = A_0 \exp(\delta t)$. Отсюда следует, что за период колебаний амплитуда A увеличивается в $\gamma = \exp(2\pi\delta)$ раз.

Все траектории в пространстве x, \dot{x} , пересекающие ось $y = \dot{x}$ в интервале $I_0 = [y_1, y_0]$, где $y_1 = a$, $y_0 = \gamma a$, будут испытывать скачок. Предположим сначала, что при таком скачке точка y_0 переходит в некоторую точку $y_k = y_0 \gamma^{-k}$, а точка y_1 — в точку $y_{k+m} = y_0 \gamma^{-(k+m)}$. Из условия $y_0 - y_k = y_1 - y_{k+m} = q$ следует, что

$$(1 - \gamma^{-k}) / (1 - \gamma^{-m}) = \gamma^{-k} \quad (6)$$

Указанное предположение означает, что при скачке один элементарный интервал I_0 переходит в m элементарных интервалов $I_{k+m-1} = [y_{k+m}, y_{k+m-1}], \dots, I_k = [y_{k+1}, y_k]$. Это возможно, если выполняется условие (6) и величины q, a и γ связаны соотношением $q = \gamma a (1 - \gamma^{-k})$, где k — целое число.

Задача состоит в определении стационарного распределения вероятностей в пространстве x, \dot{x} . Для этого достаточно вычислить распределение $w(A, \varphi)$, где $\varphi = \Phi - 2\pi n$, n — целая часть числа $\Phi/2\pi$. В первую очередь рассмотрим поведение плотности вероятности $w(A, \varphi)$ вблизи полупрямой $\varphi = 0$. Искомая стационарная плотность вероятности должна быть постоянной во времени. Далее будет показано, что условие постоянства во времени окажется выполненным, если положить $w(A, \varphi)$ равным константе при $A \in I_0$ и $\varphi = 0_-$ (слева от полупрямой $\varphi = 0$), т. е. при $A \in I_0$:

$$w(A, 0_-) = p(A) = C \quad (7)$$

При переходе через полупрямую $\varphi = 0$ траектории испытывают скачок. Поэтому при $\varphi > 0$, $y > y_1$ они отсутствуют и соответствующая плотность вероятности равна нулю, т. е. при $A > y_1$:

$$w(A, 0_+) = 0 \quad (8)$$

Вероятность скачка за время Δt определяется формулой

$$\Delta P = \int_{y_1}^{y_0} [w(A, 0_-) - w(A, 0_+)] \Phi^* dA \Delta t$$

Так как $\Phi = 1$, то с учетом (7), (8) отсюда получаем

$$\Delta P = C(y_0 - y_1) \Delta t \quad (9)$$

Фазовые траектории, исчезнув в интервале I_0 , появляются в интервале $[y_{k+m}, y_k]$, причем вероятность появления траекторий за время Δt совпадает с (9). Так как соответствующее скачку преобразование $A \rightarrow A - q$ является простым сдвигом и $y_k - y_{k+m} = y_0 - y_1$, то из равенства значений ΔP следует при $y_{k+m} < A < y_k$:

$$w(A, 0_+) - w(A, 0_-) = C \quad (10)$$

Так как фазовые траектории не появляются при $y < y_{k+m}$, то к интервалу I_{k+m-1} слева не может подходить ни одной траектории, т. е. $w(A, 0_-) = 0$ при $A \in I_{k+m-1}$. Отсюда и из (10) следует, что при $A \in I_{k+m-1}$:

$$w(A, 0_+) = C \quad (11)$$

Через период изображающие точки в фазовом пространстве опишут петли и интервал I_{k+m-1} перейдет в интервал I_{k+m-2} . Длина второго интервала в γ раз больше, чем длина первого. Поэтому плотность вероятности на интервале I_{k+m-2} будет в γ раз меньше, чем на интервале I_{k+m-1} , т. е. при $A \in I_{k+m-2}$:

$$w(A, 0_-) = C/\gamma \quad (12)$$

Учитывая (10) и (12), при $A \in I_{k+m-2}$ получаем

$$w(A, 0_+) = C + C/\gamma \quad (13)$$

Аналогично при $A \in I_{k+m-3}$ находим

$$w(A, 0_-) = \frac{C}{\gamma} \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right), \quad w(A, 0_+) = C \left(1 + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2}\right) \quad (14)$$

Повторяя эту процедуру еще $m-3$ раза и используя формулу для суммы геометрической прогрессии, получим при $A \in I_k$

$$w(A, 0_-) = \frac{C}{\gamma} \frac{1 - \gamma^{-m+1}}{1 - \gamma^{-1}}, \quad w(A, 0_+) = C \frac{1 - \gamma^{-m}}{1 - \gamma^{-1}} \quad (15)$$

В течение дальнейших k периодов плотность вероятности уменьшается вследствие увеличения интервалов и не испытывает скачкообразных изменений типа (10). Через один период плотность вероятности уменьшится в γ раз, через два периода — в γ^2 раз, а через k периодов — в γ^k раз. Следовательно, из (15) получаем при $A \in I_0$:

$$w(A, 0_-) = \gamma^{-k} C (1 - \gamma^{-m}) / (1 - \gamma^{-1}) \quad (16)$$

В силу (6) формула (16) совпадает с (7). Это доказывает, что найденная плотность распределения вероятностей удовлетворяет требуемому условию согласования, т. е. действительно является искомой стационарной плотностью распределения.

Формулы (7), (8), (11)–(15) можно объединить:

$$w(A, 0_-) = C \gamma^\alpha \quad (\alpha=0,1,\dots,k-1); \quad w(A, 0_-) = C \frac{1 - \gamma^{\alpha+1-k-m}}{\gamma-1} \quad (\alpha=k-1, k, \dots, k+m-1) \quad (17)$$

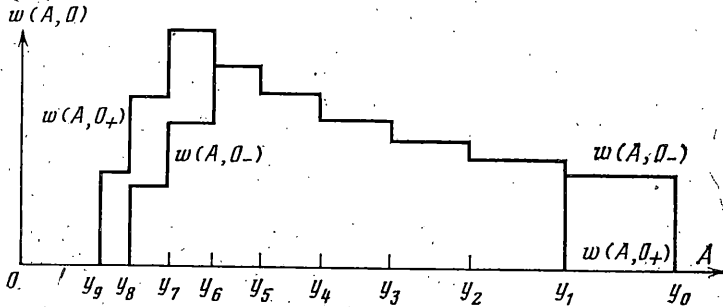
$$w(A, 0_+) = C (1 - \delta_{\alpha 0}) \gamma^\alpha \quad (\alpha=0,1,\dots,k); \quad w(A, 0_+) = C \frac{1 - \gamma^{\alpha-k-m}}{1 - \gamma^{-1}} \quad (\alpha=k, k+1, \dots, k+m-1)$$

где α — номер интервала, в который входит соответствующее значение A , т. е. $A \in I_\alpha$.

Зависимости $w(A, 0_-)$ и $w(A, 0_+)$, построенные на основе формул (17) для $m=3$, $k=6$ ($\gamma=1,171$), представлены на фиг. 1. Аналогичное распре-

деление для похожего точечного отображения без аналитической записи и вывода приведено в работе [12].

По найденным значениям плотности вероятности $w(A, \varphi)$ вблизи оси $\varphi=0$ нетрудно определить ее значения при прочих φ . Поскольку значения амплитуд A при $\varphi \neq 0$ и $\varphi=0_+$ на одной и той же траектории связаны соотношением $A(\varphi) = A(0_+) \exp(\delta\varphi)$, то $w(A, \varphi) dA d\varphi = w(Ae^{-\delta\varphi}, 0_+) \times \times e^{-\delta\varphi} dA d\varphi$. Отсюда имеем $w(A, \varphi) = w(Ae^{-\delta\varphi}, 0_+) e^{-\delta\varphi}$ при $0 < \varphi < 2\pi$, что и



Фиг. 1

позволяет определить значения $w(A, \varphi)$ по вычисленным значениям $w(A, 0_+)$.

Постоянная C , содержащаяся в формулах (17), определяется из условия нормировки

$$\int w(A, \varphi) dA d\varphi = 2\pi \sum_{j=k+m}^1 \int_{y_j}^{y_{j-1}} w(A, 0_+) dA = 1 \quad (18)$$

Подставляя в (18) $w(A, 0_+)$ и учитывая, что длина интервала I_a равна $a(\gamma-1)\gamma^{-a}$, получаем $C = \{2\pi a [1 - k + \gamma(k - m\gamma^{-(k+m)})]\}^{-1}$.

Изложенные результаты основаны на предположении, что интервал $[y_1 - q, y_0 - q]$, получаемый сдвигом интервала I_0 на величину q , перекрывает целое число элементарных интервалов I_{k+m-1}, \dots, I_k . Посмотрим, как изменятся результаты, когда это предположение несправедливо. Пусть

$$y_{k+1} < y_0 - q \leq y_k, \quad y_{k+m} \leq y_1 - q < y_{k+m-1} \quad (19)$$

Если в сдвинутый интервал попадает нецелое число элементарных интервалов, стационарное распределение $w(A, \varphi)$ отличается от найденного выше, хотя и остается ступенчатым. Чтобы найти его, следует решить функциональное уравнение (2) для стационарного распределения $p(A)$ случайной точки пересечения интервала I_0 фазовой траекторией. Пусть в некоторый момент времени t траектория пересекает интервал I_0 в точке A . Затем амплитуда A скачком уменьшится на величину q и далее начнет снова увеличиваться. По мере увеличения A траектория через некоторое время снова пересечет интервал I_0 в точке $\bar{A} = f(A)$. Это и есть пример отображения $\bar{x} = f(x)$. Если обозначить корни уравнения $A - f(B) = 0$ через $B_i(A)$, то уравнение (2) запишется в виде

$$p(A) = \sum_{i=1}^n p(B_i(A)) / |f'(B_i(A))| \quad (20)$$

В рассматриваемом случае $B_i(A) = q + A\gamma^{1-k-i}$, где $i=1, 2, \dots, m$, $f'(B_i) = \gamma^{k+i-1}$. Поэтому уравнение (20) принимает вид

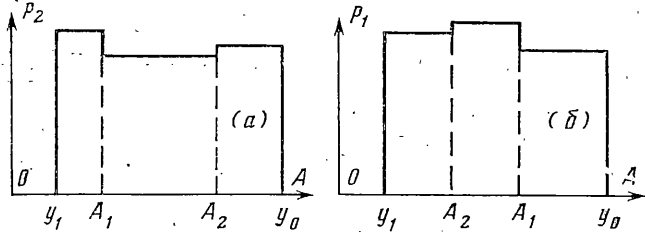
$$p(A) = \sum_{j=k}^{k+m-1} \gamma^{-j} p(\gamma^{-j}A + q) \quad (21)$$

при $A \in I_0$. Вне интервала I_0 плотность вероятности $p(A)$ полагаем равной нулю.

Решение уравнения (21) в общем случае затруднительно. Его удается получить приближенно при условии малости инкремента колебаний, когда выполняются неравенства $m \gg 1$, $\gamma - 1 \ll 1$. В этом случае можно применить метод последовательных приближений по схеме

$$p_{n+1}(A) = F[p_n(A)] \quad (22)$$

где F — правая часть уравнения (21). В качестве нулевого приближения следует взять равномерное распределение $p_0(A) = C$. Тогда в первом при-



Фиг. 2

ближении согласно (22) получим

$$p_1(A) = C\gamma^{-h} \{ \vartheta(y_0 - q - \gamma^{-h}A) + \gamma^{1-m} \vartheta(\gamma^{-h-m+1}A + q - y_1) + (1 - \gamma^{-m+2}) / (\gamma - 1) \} \quad (23)$$

Здесь учтено, что в силу неравенств (19):

$$\begin{aligned} y_0 - q - \gamma^{-h-1}A &> y_0 - q - \gamma^{-h-1}y_0 = y_0 - q - y_{h+1} > 0 \\ \gamma^{-h-m+2}A - (y_1 - q) &> \gamma^{-h-m+2}y_1 - (y_1 - q) = y_{h+m-1} - (y_1 - q) > 0 \\ y_0 - q - \gamma^{-h}A &> y_0 - q - \gamma^{-h}y_0 = y_0 - q - y_h \\ \gamma^{-h-m+1}A - (y_1 - q) &> \gamma^{-h-m+1}y_1 - (y_1 - q) = y_{h+m} - (y_1 - q) \end{aligned}$$

Из двух последних неравенств следует, что $y_0 - q - \gamma^{-h}A$ положительно при $A < A_1 = y_0 - \gamma^h(y_h - y_0 + q)$ и отрицательно при $A > A_1$, а $\gamma^{-h-m+1}A - (y_1 - q)$ положительно при $A > A_2 = y_1 + \gamma^{h+m-1}(y_1 - q - y_{h+m})$ и отрицательно при $A < A_2$.

Первые два члена в фигурных скобках (23) по порядку величины равны единице. Третий член при малых $\mu = \gamma - 1$ можно оценить так: $(1 - \gamma^{2-m}) / (\gamma - 1) \sim (m-2)\mu / \mu \sim m$.

Учитывая условие нормировки, получаем, что первые два члена дают вклад в $p_1(A)$ порядка m^{-1} , а третий член — порядка единицы. Следовательно, при $m \gg 1$ отличие распределения $p_1(A)$ от равномерного мало. Второе приближение приведет к появлению дополнительных членов порядка m^{-2} и т. д.

Если $y_0 - q = y_h$ и $y_1 - q = y_{h+m}$, то в силу равенства (6) $p_1(A) = p_0(A) = \dots = p_n(A) = \dots = C$, т. е. найденное ранее равномерное распределение (7) является точным решением уравнения (21).

Если же $y_0 - q < y_h$ и (или) $y_1 - q > y_{h+m}$, то $p_1(A)$ несколько отличается от равномерного. Зависимости $p_1(A)$ для случаев $A_1 < A_2$ и $A_1 > A_2$ приведены на фиг. 2, а и б.

Зная $p(A)$, можно вычислить стационарное распределение $w(A, \varphi)$ аналогично тому, как было получено $w(A, \varphi)$ на основе формулы (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность. Горький: Изд-е Ин-та прикл. физ. АН СССР, 1980. 220 с.
2. Неймарк Ю. И. Стохастичность в динамических системах. — Межвузов. сб. Теория колебаний, прикладная математика и кибернетика. Горький: Изд-во Горьков. ун-та, 1973, вып. 1, с. 3—11.
3. Неймарк Ю. И. Физические механизмы самогенерации стохастических колебаний. — Межвузов. сб. Динамика систем. Горький: Изд-во Горьков. ун-та, 1979, с. 115—131.
4. Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978. 336 с.
5. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
6. Рабинович М. И. Стохастические автоколебания и турбулентность. — Успехи физ. наук, 1978, т. 125, вып. 1, с. 123—168.
7. Гапонов-Грегов А. В., Рабинович М. И. Л. И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний и волн. — Успехи физ. наук, 1979, т. 128, вып. 4, с. 579—624.
8. Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970. 143 с.
9. Синай Я. Г. Введение в эргодическую теорию. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1973. 131 с.
10. Ланда П. С., Страгонович Р. Л. Стационарное распределение вероятностей для одного из простейших странных аттракторов. — Докл. АН СССР, 1982, т. 267, № 4, с. 832—836.
11. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 437 с.
12. Pikovsky A. S., Rabinovich M. I. Stochastic oscillations in dissipative systems. — Physica, 1981, v. 2D, № 1, p. 8—24.

Москва

Поступила в редакцию
18.VI.1982