МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 · 1984

УДК 531.53

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКА ШУЛЕРА ПРИ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ ПОДВЕСА ПО ПАРАЛЛЕЛИ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

АГАФОНОВ С. А.

Исследуется устойчивость невозмущенного движения маятника Шулера в области выполнения необходимых условий устойчивости в случае движения точки подвеса по параллели с постоянной скоростью. Применением теоремы Арнольда – Мозера [1] доказывается устойчивость невозмущенного движения маятника. Рассмотрены случаи резонанса третьего и четвертого порядков.

1. Рассматривается движение маятника Шулера в случае движения точки подвеса по параллели с постоянной скоростью, изменяющейся от нуля до первой космической. Функция Лагранжа системы имеет вид

$$L={}^1/_2[(V/R)\sin\alpha\sin\beta-\Omega\cos\alpha\sin\beta+\alpha^{\cdot}\cos\beta]^2+$$
$$+{}^1/_2[(V/R)\cos\alpha+\Omega\sin\alpha+\beta^{\cdot}]^2-(\Omega V/R)\sin\alpha\cos\beta+\nu^2(1-\mu)\cos\alpha\cos\beta \quad (1.1)$$

Здесь углы α, β определяют положение маятника относительно географической системы координат, R — радиус земного шара, V — абсолютная скорость точки подвеса, Ω — проекция абсолютной угловой скорости географического трехгранника на вертикаль, g — ускорение сил тяготения, $\nu^2=g/R$, $\mu=V^2/gR$. Вводя канонические переменные $q_1=\alpha$, $q_2=\beta$, p_1, p_2 и безразмерное время $\tau=\nu t$, функцию Гамильтона системы представим в виде

$$H={}^1/_2p_1^2/\cos^2 q_2+{}^1/_2p_2^2+\mu^{1/2}(1-\cos q_1)p_2-\mu^{1/2}p_1\sin q_1\operatorname{tg} q_2+rp_1\cos q_1\operatorname{tg} q_2-$$
$$-\mu\cos q_1-rp_2\sin q_1-r\mu^{1/2}(1-\cos q_2)\sin q_1-(1-\mu)\cos q_1\cos q_2,\quad r=\Omega/\nu \quad (1.2)$$

Уравнениями возмущенного движения являются уравнения Гамильтона

$$dq_i/d\tau=\partial H/\partial p_i,\quad dp_i/d\tau=-\partial H/\partial q_i \ {\scriptstyle (i=1,\,2)} \quad (1.3)$$

В окрестности положения равновесия

$$q_i=0,\quad p_i=0 \ {\scriptstyle (i=1,\,2)} \quad (1.4)$$

устойчивость которого исследуется, функция Гамильтона (1.2) разлагается в ряд

$$H=H_2+H_3+H_4+\ldots \quad (1.5)$$

где H_k — однородная функция степени k относительно q_i, p_i ($i=1, 2$). Первые три формы имеют вид

$$H_2={}^1/_2p_1^2+{}^1/_2p_2^2+{}^1/_2q_1^2+{}^1/_2(1-\mu)q_2^2+rq_2p_1-rq_1p_2$$
$$H_3={}^1/_2\mu^{1/2}(q_1^2p_2-rq_1q_2^2-2q_1q_2p_1)$$
$$H_4={}^1/_2p_1^2q_2^2-{}^1/_2rq_1^2q_2p_1+{}^1/_3rq_2^3p_1+$$
$$+{}^1/_6rq_1^3p_2-{}^1/_{24}q_1^4-{}^1/_4(1-\mu)q_1^2q_2^2-{}^1/_{24}(1-\mu)q_2^4 \quad (1.6)$$

Линейная система уравнений возмущенного движения получается, если ограничиться в разложении (1.5) только формой H_2, и имеет вид

$$\begin{gathered} q_1''-2rq_2'+(1-r^2)q_1=0 \\ q_2''+2rq_1'+(1-\mu-r^2)q_2=0 \end{gathered} \tag{1.7}$$

(штрих означает дифференцирование по безразмерному времени τ). При выполнении условия $r^2<1-\mu$ H_2 является определенно-положительной формой и, согласно теореме Ляпунова, положение равновесия (1.4) устойчиво. Условие устойчивости $r^2<1-\mu$ было получено в [2, 3]. При выполнении неравенств $1-\mu<r^2<1$ равновесие (1.4) неустойчиво: характеристическое уравнение системы (1.7) имеет по крайней мере один корень с положительной действительной частью [4]. При выполнении условия $r^2>1$ система (1.7) устойчива.

Уравнения (1.7) можно рассматривать как уравнения возмущенного движения механической системы, находящейся под действием потенциальных и гироскопических сил. Степень неустойчивости при выполнении условия $r^2>1$ равна двум и возможна гироскопическая стабилизация [5], условием которой и является данное неравенство, распадающееся на два: $r>1$, $r<-1$, первое из которых соответствует движению точки подвеса системы в Северном полушарии, второе — в Южном.

Рассмотрим устойчивость равновесия (1.4) системы (1.3) при выполнении условия $r^2>1$. В этом случае H_2 индефинитна, но система (1.3) устойчива в линейном приближении. Вопрос об устойчивости решается при помощи теоремы Арнольда — Мозера [1]: если функция Гамильтона (1.5) такова, что между частотами линейной системы $\omega_{1,2}$ не существует резонансных соотношений ($\omega_1>\omega_2>0$):

$$\omega_1=2\omega_2, \quad \omega_1=3\omega_2 \tag{1.8}$$

и если

$$D\equiv c_{20}\omega_2^2+c_{11}\omega_1\omega_2+c_{02}\omega_1^2\neq 0 \tag{1.9}$$

то равновесие (1.4) устойчиво по Ляпунову. В теореме Арнольда — Мозера предполагается, что функция Гамильтона (1.5) приведена к виду

$$\begin{gathered} H=\omega_1 r_1-\omega_2 r_2+c_{20}r_1^2+c_{11}r_1r_2+c_{02}r_2^2+O[(r_1+r_2)^{5/2}], \\ 2r_i=q_i^2+p_i^2 \quad (i=1,\,2) \end{gathered} \tag{1.10}$$

Коэффициенты c_{20}, c_{11}, c_{02} являются инвариантами функции Гамильтона (1.5) относительно канонических преобразований.

Сначала при помощи линейного канонического преобразования

$$\begin{gathered} q_1=-2r(\Delta_1^{-1/2}p_1^\circ-\Delta_2^{-1/2}p_2^\circ) \\ q_2=(\omega_1^2+r^2-1)\Delta_1^{-1/2}q_1^\circ+(\omega_2^2+r^2-1)\Delta_2^{-1/2}q_2^\circ \\ p_1=-r[(r^2-1-\omega_1^2)\Delta_1^{-1/2}q_1^\circ+(r^2-1-\omega_2^2)\Delta_2^{-1/2}q_2^\circ] \\ p_2=(\omega_1^2-r^2-1)\Delta_1^{-1/2}p_1^\circ+(r^2+1-\omega_2^2)\Delta_2^{-1/2}p_2^\circ \\ \Delta_1=(4r^2-\mu)\omega_1^2-(r^2-1)(4r^2+\mu) \\ \Delta_2=(r^2-1)(4r^2+\mu)-(4r^2-\mu)\omega_2^2 \end{gathered} \tag{1.11}$$

где частоты $\omega_{1,2}$ ($\omega_1>\omega_2>0$) удовлетворяют уравнению $\omega^4-(2r^2+2-\mu)\omega^2+(r^2-1)(r^2-1+\mu)=0$, функцию H_2 приведем к виду

$$H_2={}^1/_2(p_1^{\circ 2}+\omega_1^2q_1^{\circ 2})-{}^1/_2(p_2^{\circ 2}+\omega_2^2q_2^{\circ 2}) \tag{1.12}$$

Соответствующие формулы для нелинейных канонических преобразований, приводящих функцию Гамильтона (1.5) к виду (1.10), приведены в [6]. Построение кривой

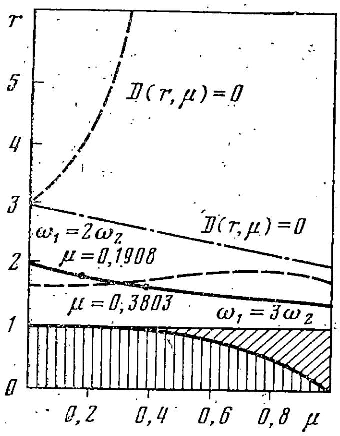
$$D(r,\mu)\equiv c_{20}\omega_2^2+c_{11}\omega_1\omega_2+c_{02}\omega_1^2=0 \tag{1.13}$$

проводилось на ЭВМ. В плоскости параметров r, μ эта кривая изображена на фигуре штриховой линией. Области $r^2<1-\mu$ и $1-\mu<r^2<1$ заштрихованы прямой и наклонной штриховкой соответственно.

2. В случае выполнения одного из резонансных соотношений (1.8) теорема Арнольда — Мозера неприменима. Рассмотрим сначала случай выполнения первого соотношения (1.8). С помощью нелинейного канонического преобразования функция Гамильтона (1.5) приводится к виду

$$
\begin{gathered}
H=2\omega_2 r_1-\omega_2 r_2-\omega_2^{1/2}|a|r_2 r_1^{1/2}\sin(\varphi_1+2\varphi_2)+H^\circ(r_i,\varphi_i)\\
2r_i=p_i'^2+q_i'^2,\quad H^\circ=O[(r_1+r_2)^2]\\
a=(r^2\mu^{1/2}/5\omega_2\Delta_2\Delta_1^{1/2})(27r^4-138r^2+52\mu r^2+15-32\mu+\mu^2)
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Для $0<\mu\leqslant 1$ на резонансной кривой $\omega_1=2\omega_2$ $a\neq 0$ и на основании теоремы [6] равновесие (1.4) неустойчиво. В плоскости параметров r, μ кривая $\omega_1=2\omega_2$ дается уравнением



$$
r=(1/3\sqrt{2})[82-41\mu+(6400(1-\mu)+1825\mu^2)^{1/2}]^{1/2} \tag{2.2}
$$

и изображена на фигуре штрихпунктирной линией.

Из соотношения $\omega_1=2\omega_2$, используя $r=\mu^{1/2}\operatorname{tg}\varphi$, также имеем

$$
\operatorname{tg}\varphi=(18\mu)^{-1/2}[82-41\mu+(6400(1-\mu)+1825\mu^2)^{1/2}]^{1/2}\quad (0<\mu\leqslant 1) \tag{2.3}
$$

Формула (2.3) указывает значение широты при данном μ, при движении по которой точки подвеса системы равновесие (1.4) неустойчиво.

3. При выполнении второго соотношения (1.8) при помощи нелинейного канонического преобразования функция Гамильтона (1.5) приводится к виду

$$
\begin{gathered}
H=3\omega_2 r_1-\omega_2 r_2+c_{20}r_1^2+c_{11}r_1r_2+c_{02}r_2^2+\frac{1}{3\sqrt{3}}br_2(r_1r_2)^{1/2}\cos(\varphi_1+3\varphi_2)+\\
+H^\circ(r_i,\varphi_i),\quad H^\circ=O[(r_1+r_2)^{5/2}]\quad (i=1,2)
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Если $|c_{20}+3c_{11}+9c_{02}|<b$, равновесие (1.4) неустойчиво, в противном случае имеет место устойчивость по Ляпунову [6]. В плоскости параметров r, μ кривая $\omega_1=3\omega_2$ дается уравнением

$$
r=(1/8\sqrt{2})[272-136\mu+10(576(1-\mu)+208\mu^2)^{1/2}]^{1/2} \tag{3.2}
$$

и изображена на фигуре сплошной линией.

Численный расчет на ЭВМ показал, что на резонансной кривой $\omega_1=3\omega_2$ равновесие (1.4) неустойчиво для $0{,}1908\ldots<\mu<0{,}3803\ldots$, на остальной части кривой равновесие устойчиво, кроме, быть может, двух точек на кривой $\omega_1=3\omega_2$, в которых $\mu=0{,}1908\ldots$ или $\mu=0{,}3803\ldots$ (в этих точках $|c_{20}+3c_{11}+9c_{02}|=b$). Из уравнения (3.2), используя $r=\mu^{1/2}\operatorname{tg}\varphi$, получим

$$
\operatorname{tg}\varphi=(128\mu)^{-1/2}[272-136\mu+10(576(1-\mu)+208\mu^2)^{1/2}]^{1/2}\quad (0<\mu\leqslant 1) \tag{3.3}
$$

При $0{,}1908\ldots<\mu<0{,}3803\ldots$ формула (3.3) указывает значение широты, при движении по которой точки подвеса системы равновесие (1.4) неустойчиво.

Полученные результаты можно сформулировать в форме теоремы.

Теорема. В области устойчивости в линейном приближении $r^2>1$ невозмущенное движение (1.4) маятника Шулера при движении точки подвеса по параллели с постоянной скоростью устойчиво для всех $0<\mu\leqslant 1$, кроме, быть может, значений параметров r, μ, лежащих на кривых (1.13) и (1.8) второго соотношения при $\mu=0{,}1908\ldots$ или $\mu=0{,}3803\ldots$, и неустойчиво для значений параметров r, μ, лежащих на кривой $\omega_1=2\omega_2$ и на части кривой $\omega_1=3\omega_2$, где выполняется неравенство $0{,}1908\ldots<\mu<$ $<0{,}3803\ldots$. Вопрос об устойчивости невозмущенного движения (1.4) на кривых (1.13) и $\omega_1=3\omega_2$ при $\mu=0{,}1908\ldots$ или $\mu=0{,}3803\ldots$ остается открытым. Для решения вопроса об устойчивости в этих случаях необходимо рассмотреть в разложении функции Гамильтона (1.5) формы выше четвертого порядка.

Отметим, что кривые (1.8), (1.13) построены в области $r>1$. Так как параметр r во всех формулах присутствует в виде r^2, то полученные результаты переносятся и в область $r<-1$. Используя механическую аналогию между маятником Шулера и гирогоризонткомпасом, установленную в [2], можно утверждать, что результаты настоящей работы распространяются на гирогоризонткомпас при движении точки его подвеса по параллели с постоянной скоростью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. – Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 6, с. 91–192.
2. *Жбанов Ю. К.* Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта. – ПММ, 1960, т. 24, вып. 6, с. 1024–1029.
3. *Меркин Д. Р.* Об устойчивости движения гирорамы. – ПММ, 1961, т. 25, вып. 6, с. 983–991.
4. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М.: Наука, 1966. 579 с.
5. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
6. *Маркеев А. П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса. – ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, с. 738–744.

Москва

Поступила в редакцию 10.XI.1981